SEARS & ZEMANSKY

FÍSICA II

TERMODINÂMICA E ONDAS

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

PEARSON
Addison Wesley

Site com material de apoio para professores e estudantes

SEARS & ZEMANSKY

FÍSICA II

TERMODINÂMICA E ONDAS

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

Hugh D. Young
Universidade Carnegie-Mellon, Pittsburgh

Roger A. Freedman
Universidade da Califórnia, Santa Bárbara

Colaborador
A. Lewis Ford
Universidade A&M do Texas

Tradução
Cláudia Santana Martins

Revisão Técnica
Adir Moysés Luiz
Doutor em ciência
Professor associado do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

PEARSON Addison Wesley

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

© 2008 by Pearson Education do Brasil

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de nenhum modo ou por algum outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Diretor editorial: Roger Trimer
Gerente editorial: Sabrina Cairo
Supervisor de produção editorial: Marcelo Françozo
Editores: Arlete Sousa e Marco Pace
Preparação: Marina Mourão Fanti
Revisão: Hebe Lucas e Thaís Totino Richter
Capa: Rafael Mazzo, sob projeto original de Yvo Riezebos Design
Projeto gráfico e diagramação: Globaltec Artes Gráficas

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Young, Hugh D.
Física II : Termodinâmica e Ondas / Young e Freedman ; [colaborador A. Lewis Ford]; tradução Cláudia Santana Martins ; revisão técnica Adir Moysés Luiz. — 12. ed. — São Paulo : Addison Wesley, 2008.

Título original: Sear and Zemansky's University physics.

ISBN 978-85-88639-33-1

1. Física 2. Ondas 3. Termodinâmica
I. Freedman, Roger A. II. Ford, A. Lewis. III. Título.

08-02034 CDD-530

Índice para catálogo sistemático:
1. Física : Estudo e ensino 530

2008

Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil,
uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermano Marchetti, 1435
CEP: 05038-001 – São Paulo – SP
Fone: (11) 2178-8686 – Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearsoned.com

SUMÁRIO

FÍSICA 2
TERMODINÂMICA E ONDAS

CAPÍTULO 12 Gravitação

12.1 Lei de Newton da Gravitação 01
12.2 Peso 05
12.3 Energia Potencial Gravitacional 08
12.4 Movimento de Satélites 10
12.5 As Leis de Kepler e o Movimento de Planetas 13
*12.6 Distribuição Esférica de Massa 17
*12.7 Peso Aparente e Rotação da Terra 20
12.8 Buraco Negro 22

Resumo/Principais Termos 25
Questões/Exercícios/Problemas 27

CAPÍTULO 13 Movimento Periódico

13.1 Causas da Oscilação 36
13.2 Movimento Harmônico Simples 38
13.3 Energia no Movimento Harmônico Simples 45
13.4 Aplicações do Movimento Harmônico Simples 49
13.5 O Pêndulo Simples 52
13.6 O Pêndulo Físico 54
13.7 Oscilações Amortecidas 56
13.8 Oscilações Forçadas e Ressonância 58

Resumo/Principais Termos 60
Questões/Exercícios/Problemas 62

CAPÍTULO 14 Mecânica dos Fluidos

14.1 Densidade 72
14.2 Pressão em um Fluido 74
14.3 Empuxo 79
14.4 Escoamento de um Fluido 82
14.5 Equação de Bernoulli 84
14.6 Viscosidade e Turbulência 88

Resumo/Principais Termos 90
Questões/Exercícios/Problemas 92

CAPÍTULO 15 Ondas Mecânicas

15.1 Tipos de Ondas Mecânicas 103
15.2 Ondas Periódicas 105
15.3 Descrição Matemática das Ondas 107
15.4 Velocidade de uma Onda Transversal 113
15.5 Energia no Movimento Ondulatório 116
15.6 Interferência de Ondas, Condições de Contorno de uma Corda e Princípio da Superposição 119
15.7 Ondas Estacionárias em uma Corda 121
15.8 Modos Normais de uma Corda 125

Resumo/Principais Termos 128
Questões/Exercícios/Problemas 130

CAPÍTULO 16 Som e Audição

16.1 Ondas Sonoras 140
16.2 Velocidade das Ondas Sonoras 145
16.3 Intensidade do Som 149
16.4 Ondas Estacionárias e Modos Normais 153
16.5 Ressonância e Som 157
16.6 Interferência de Ondas 159
16.7 Batimentos 161
16.8 O Efeito Doppler 162
*16.9 Ondas de Choque 167

Resumo/Principais Termos 169
Questões/Exercícios/Problemas 171

CAPÍTULO 17 Temperatura e Calor

17.1 Temperatura e Equilíbrio Térmico 179
17.2 Termômetros e Escalas de Temperatura 181
17.3 Termômetro de Gás e Escala Kelvin 182
17.4 Expansão Térmica 184
17.5 Quantidade de Calor 190
17.6 Calorimetria e Transições de Fases 193
17.7 Mecanismos de Transferência de Calor 198

Resumo/Principais Termos 205
Questões/Exercícios/Problemas 206

CAPÍTULO 18 Propriedades Térmicas da Matéria

18.1 Equações de Estado 217
18.2 Propriedades Moleculares da Matéria 223
18.3 Modelo Cinético-Molecular de um Gás Ideal 226
18.4 Calor Específico 231

*18.5 Velocidades Moleculares 235
18.6 Fases da Matéria 237

Resumo/Principais Termos 240
Questões/Exercícios/Problemas 242

CAPÍTULO 19 A Primeira Lei da Termodinâmica

19.1 Sistemas Termodinâmicos 251
19.2 Trabalho Realizado Durante Variações de Volume 252
19.3 Caminhos entre Estados Termodinâmicos 255
19.4 Energia Interna e Primeira Lei da Termodinâmica 256
19.5 Tipos de Processos Termodinâmicos 261
19.6 Energia Interna de um Gás Ideal 262
19.7 Calor Específico de um Gás Ideal 263
19.8 Processo Adiabático de um Gás Ideal 266

Resumo/Principais Termos 268
Questões/Exercícios/Problemas 270

CAPÍTULO 20 A Segunda Lei da Termodinâmica

20.1 Sentido de um Processo Termodinâmico 278
20.2 Máquinas Térmicas 279
20.3 Máquinas de Combustão Interna 282
20.4 Refrigeradores 284
20.5 Segunda Lei da Termodinâmica 286
20.6 O Ciclo de Carnot 288
20.7 Entropia 293
*20.8 Interpretação Microscópica da Entropia 298

Resumo/Principais Termos 301
Questões/Exercícios/Problemas 303

APÊNDICES

A Sistema Internacional de Unidades 311
B Relações Matemáticas Úteis 313
C Alfabeto Grego 314
D Tabela Periódica dos Elementos 315
E Fatores de Conversão das Unidades 316
F Constantes Numéricas 317

Respostas dos Problemas Ímpares 319

Índice Remissivo 323

Créditos das fotos 327

Sobre os autores 329

FÍSICA 1
MECÂNICA

CAPÍTULO 1 Unidades, Grandezas Físicas e Vetores

1.1 A Natureza da Física
1.2 Solução de Problemas de Física
1.3 Padrões e Unidades
1.4 Coerência e Conversão de Unidades
1.5 Incerteza e Algarismos Significativos
1.6 Estimativas e Ordens de Grandeza
1.7 Vetores e Soma Vetorial
1.8 Componentes de Vetores
1.9 Vetores Unitários
1.10 Produtos de Vetores

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 2 Movimento Retilíneo

2.1 Deslocamento, Tempo e Velocidade Média
2.2 Velocidade Instantânea
2.3 Aceleração Instantânea e Aceleração Média
2.4 Movimento com Aceleração Constante
2.5 Queda Livre de Corpos
*2.6 Velocidade e Posição por Integração

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 3 Movimento em Duas ou Três Dimensões

3.1 Vetor Posição e Vetor Velocidade
3.2 Vetor Aceleração
3.3 Movimento de um Projétil
3.4 Movimento Circular
3.5 Velocidade Relativa

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 4 Leis de Newton do Movimento

4.1 Força e Interações
4.2 Primeira Lei de Newton

4.3 Segunda Lei de Newton
4.4 Massa e Peso
4.5 Terceira Lei de Newton
4.6 Exemplos de Diagramas do Corpo Livre

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 5 Aplicações das Leis de Newton

5.1 Uso da Primeira Lei de Newton: Partículas em Equilíbrio
5.2 Uso da Segunda Lei de Newton: Dinâmica das Partículas
5.3 Forças de Atrito
5.4 Dinâmica do Movimento Circular
*5.5 As Forças Fundamentais da Natureza

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 6 Trabalho e Energia Cinética

6.1 Trabalho
6.2 Energia Cinética e o Teorema do Trabalho-Energia
6.3 Trabalho e Energia com Forças Variáveis
6.4 Potência

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 7 Energia Potencial e Conservação da Energia

7.1 Energia Potencial Gravitacional
7.2 Energia Potencial Elástica
7.3 Forças Conservativas e Forças Não Conservativas
7.4 Força e Energia Potencial
7.5 Diagramas de Energia

Resumo/Principais Termo
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 8 Momento Linear, Impulso e Colisões

8.1 Momento Linear e Impulso
8.2 Conservação do Momento Linear
8.3 Conservação do Momento Linear e Colisões
8.4 Colisões Elásticas
8.5 Centro de Massa
*8.6 Propulsão de um Foguete

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 9 Rotação de Corpos Rígidos

9.1 Velocidade Angular e Aceleração Angular
9.2 Rotação com Aceleração Angular Constante
9.3 Relações entre a Cinemática Linear e a Cinemática Angular
9.4 Energia no Movimento de Rotação
9.5 Teorema dos Eixos Paralelos
*9.6 Cálculos de Momento de Inércia

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 10 Dinâmica do Movimento de Rotação

10.1 Torque
10.2 Torque e Aceleração Angular de um Corpo Rígido
10.3 Rotação de um Corpo Rígido em Torno de um Eixo Móvel
10.4 Trabalho e Potência no Movimento de Rotação
10.5 Momento Angular
10.6 Conservação do Momento Angular
10.7 Giroscópios e Precessão

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 11 Equilíbrio e Elasticidade

11.1 Condições de Equilíbrio
11.2 Centro de Gravidade
11.3 Soluções de Problemas de Equilíbrio de Corpos Rígidos
11.4 Tensão, Deformação e Módulos de Elasticidade
11.5 Elasticidade e Plasticidade

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

FÍSICA 3
ELETROMAGNETISMO

CAPÍTULO 21 Carga Elétrica e Campo Elétrico

21.1 Carga Elétrica
21.2 Condutores, Isolantes e Cargas Induzidas
21.3 Lei de Coulomb
21.4 Campo Elétrico e Forças Elétricas
21.5 Determinação do Campo Elétrico
21.6 Linhas de Força de um Campo Elétrico
21.7 Dipolos Elétricos

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 22 Lei de Gauss

22.1 Carga Elétrica e Fluxo Elétrico
22.2 Determinação do Fluxo Elétrico
22.3 Lei de Gauss
22.4 Aplicações da Lei de Gauss
22.5 Cargas e Condutores

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 23 Potencial Elétrico

23.1 Energia Potencial Elétrica
23.2 Potencial Elétrico
23.3 Determinação do Potencial Elétrico
23.4 Superfícies Equipotenciais
23.5 Gradiente de Potencial

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 24 Capacitância e Dielétricos

24.1 Capacitância e Capacitores
24.2 Capacitores em Série e em Paralelo
24.3 Armazenamento de Energia em Capacitores e Energia do Campo Elétrico
24.4 Dielétricos *24.5 Modelo Molecular da Carga Induzida
*24.6 Lei de Gauss em Dielétricos

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 25 Corrente, Resistência e Força Eletromotriz

25.1 Corrente
25.2 Resistividade
25.3 Resistência
25.4 Força Eletromotriz e Circuitos
25.5 Energia e Potência em Circuitos Elétricos
*25.6 Teoria da Condução em Metais

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 26 Circuitos de Corrente Contínua

26.1 Resistores em Série e em Paralelo
26.2 Leis de Kirchhoff
26.3 Instrumentos de Medidas Elétricas
26.4 Circuito R-C
26.5 Sistemas de Distribuição de Potência

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 27 Campo Magnético e Força Magnética

27.1 Magnetismo
27.2 Campo Magnético
27.3 Linhas de Campo Magnético e Fluxo Magnético
27.4 Movimento de Partículas Carregadas em um Campo Magnético
27.5 Aplicações do Movimento de Partículas Carregadas
27.6 Força Magnética Sobre um Condutor Transportando uma Corrente
27.7 Força e Torque Sobre uma Espira de Corrente
*27.8 O Motor de Corrente Contínua
*27.9 O Efeito Hall

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 28 Fontes de Campo Magnético

28.1 Campo Magnético de uma Carga em Movimento

28.2 Campo Magnético de um Elemento de Corrente
28.3 Campo Magnético de um Condutor Retilíneo Transportando uma Corrente
28.4 Força Entre Condutores Paralelos
28.5 Campo Magnético de uma Espira de Corrente
28.6 Lei de Ampère
28.7 Aplicações da Lei de Ampère
*28.8 Materiais Magnéticos
Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 29 Indução Eletromagnética
29.1 Experiências de Indução
29.2 Lei de Faraday
29.3 Lei de Lenz
29.4 Força Eletromotriz Produzida pelo Movimento
29.5 Campos Elétricos Induzidos
*29.6 Correntes de Rodamoinho
29.7 Corrente de Deslocamento e Equações de Maxwell
*29.8 Supercondutividade
Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 30 Indutância
30.1 Indutância Mútua
30.2 Indutores e Auto-Indutância
30.3 Indutores e Energia do Campo Magnético
30.4 O Circuito R-L
30.5 O Circuito L-C
30.6 O Circuito R-L-C em Série
Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 31 Corrente Alternada
31.1 Fasor e Corrente Alternada
31.2 Resistência e Reatância
31.3 O Circuito R-L-C em Série
31.4 Potência em Circuitos de Corrente Alternada
31.5 Ressonância em Circuitos de Corrente Alternada
31.6 Transformadores
Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 32 Ondas Eletromagnéticas
32.1 Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas
32.2 Ondas Eletromagnéticas Planas e a Velocidade da Luz
32.3 Ondas Eletromagnéticas Senoidais
32.4 Energia e Momento Linear em Ondas Eletromagnéticas
32.5 Ondas Eletromagnéticas Estacionárias
Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

FÍSICA 4
ÓTICA E FÍSICA MODERNA

CAPÍTULO 33 Natureza e Propagação da Luz
33.1 Natureza da Luz
33.2 Reflexão e Refração
33.3 Reflexão Interna Total
*33.4 Dispersão
33.5 Polarização
*33.6 Espalhamento da Luz
33.7 Princípio de Huygens
Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 34 Ótica Geométrica e Instrumentos de Ótica
34.1 Reflexão e Refração em uma Superfície Plana
34.2 Reflexão em uma Superfície Esférica
34.3 Refração em uma Superfície Esférica
34.4 Lentes Delgadas
34.5 Câmera
34.6 O Olho
34.7 A Lupa
34.8 Microscópios e Telescópios
Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 35 Interferência
35.1 Interferência e Fontes Coerentes
35.2 Interferência da Luz Produzida por Duas Fontes
35.3 Intensidade das Figuras de Interferência
35.4 Interferência em Películas Finas
35.5 O Interferômetro de Michelson
Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 36 Difração

36.1 Difração de Fresnel e Difração de Fraunhofer
36.2 Difração Produzida por uma Fenda Simples
36.3 Intensidade na Difração Produzida por uma Fenda Simples
36.4 Fendas Múltiplas
36.5 A Rede de Difração
36.6 Difração de Raios X
36.7 Orifícios Circulares e Poder de Resolução
*36.8 Holografia

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 37 Relatividade

37.1 Invariância das Leis Físicas
37.2 Relatividade da Simultaneidade
37.3 Relatividade dos Intervalos de Tempo
37.4 Relatividade do Comprimento
37.5 As Transformações de Lorentz
*37.6 O Efeito Doppler para as Ondas Eletromagnéticas
37.7 Momento Linear Relativístico
37.8 Trabalho e Energia na Relatividade
37.9 Mecânica Newtoniana e Relatividade

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 38 Fótons, Elétrons e Átomos

38.1 Emissão e Absorção da Luz
38.2 O Efeito Fotoelétrico
38.3 Espectro Atômico de Linhas e Níveis de Energia
38.4 O Núcleo do Átomo
38.5 O Modelo de Bohr
38.6 O Laser
38.7 Espalhamento e Produção de Raios X
38.8 Espectro Contínuo
38.9 A Dualidade Onda-Partícula

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 39 A Natureza Ondulatória das Partículas

39.1 Onda de De Broglie
39.2 Difração de Elétrons
39.3 Probabilidade e Incerteza
39.4 O Microscópio Eletrônico
39.5 Função de Onda e Equação de Schrödinger

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 40 Mecânica Quântica

40.1 Partícula em uma Caixa
40.2 Poço de Potencial
40.3 Barreira de Potencial e Efeito Túnel
40.4 O Oscilador Harmônico
40.5 Problemas em Três Dimensões

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 41 Estrutura Atômica

41.1 O Átomo de Hidrogênio
41.2 O Efeito Zeeman
41.3 Spin do Elétron
41.4 Átomos com Muitos Elétrons e o Princípio de Exclusão
41.5 Espectro de Raios X

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 42 Moléculas e Matéria Condensada

42.1 Tipos de Ligações Moleculares
42.2 Espectro Molecular
42.3 Estrutura de um Sólido
42.4 Bandas de Energia
42.5 Modelo do Elétron Livre para um Metal
42.6 Semicondutores
42.7 Dispositivos Semicondutores
42.8 Supercondutividade

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 43 Física Nuclear

43.1 Propriedades do Núcleo
43.2 Ligação Nuclear e Estrutura Nuclear
43.3 Estabilidade Nuclear e Radioatividade
43.4 Atividade e Meia-Vida
43.5 Efeitos Biológicos da Radiação
43.6 Reações Nucleares
43.7 Fissão Nuclear
43.8 Fusão Nuclear

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 44 Física das Partículas e Cosmologia

44.1 Partículas Fundamentais – uma História
44.2 Aceleradores de Partículas e Detectores
44.3 Interações entre Partículas
44.4 Quarks e o Modelo com Simetria de Oito Modos
44.5 O Modelo Padrão e os Modelos Futuros
44.5 O Universo em Expansão
44.6 O Começo do Tempo

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

PREFÁCIO

Este livro é o resultado de meio século de liderança e inovação no ensino da Física. A primeira edição do livro *Física*, de Francis W. Sears e Mark W. Zemansky, publicada em 1949, foi revolucionária dentre os livros-texto baseados em cálculo por dar ênfase aos princípios da Física e suas aplicações. O êxito alcançado por esta obra para o uso de diversas gerações de alunos e professores em várias partes do mundo atesta os méritos desse método e das muitas inovações introduzidas posteriormente.

Ao preparar esta nova edição, incrementamos e desenvolvemos o livro de modo a incorporar as melhores ideias em várias de pesquisas acadêmicas, com ensino aprimorado de solução de problemas, pedagogia visual e conceitual pioneira

Novidades desta Edição

Estratégias para a solução de problemas e Exemplos resolvidos. Seções de Estratégia para a solução de problemas permeiam o livro e fornecem aos alunos táticas específicas para a resolução de determinados tipos de problema. Eles atendem às necessidades de todo estudante que já sentiu que 'compreende os conceitos, mas não consegue resolver os problemas'.

Todas as seções de Estratégia para a Solução de Problemas seguem a abordagem ISEE (do inglês *Identify, Set Up, Execute and Evaluate* – Identificar, Preparar, Executar e Avaliar). Essa abordagem ajuda os estudantes a saber como começar a tratar uma situação aparentemente complexa, identificar os conceitos relevantes de Física, decidir quais recursos são necessários para solucionar o problema, executar a solução e depois avaliar se o resultado faz sentido.

Essa é uma idéia extraída de pesquisas acadêmicas realizadas recentemente na área. Por ser um recurso extremamente didático, é muito eficiente para o aprendizado.

Estratégia para a solução de problemas

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A equação de Bernoulli foi deduzida a partir do teorema do trabalho-energia, portanto não é surpresa que possamos aplicar aqui muitas recomendações de estratégia para a solução de problemas mencionadas na Seção 7.1.

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* comece certificando-se de que o escoamento do fluido seja estacionário e que o fluido seja compressível e livre de atrito interno. Este caso é uma idealização, mas é surpreendentemente aplicável a fluidos que escoam por tubos suficientemente grandes e a escoamentos dentro de fluidos com grande volume (por exemplo, o ar que cerca um avião ou a água ao redor de um peixe).

PREPARAR *segundo os passos:*

1. Sempre comece identificando claramente os pontos 1 e 2 mencionados na equação de Bernoulli.
2. Defina o seu sistema de coordenadas e, em especial, o nível em que $y = 0$.
3. Faça uma lista das grandezas conhecidas e desconhecidas na Equação (14.17). As variáveis são P_1, P_2, v_1, v_2, y_1 e y_2; as constantes são ρ e g. O que foi dado? O que você precisa calcular?

EXECUTAR *o problema* da seguinte forma: escreva a equação de Bernoulli e encontre as grandezas desconhecidas. Em alguns problemas você terá de usar a equação da continuidade [Equação (14.10)] para obter uma relação entre as duas velocidades em termos das áreas das seções retas dos tubos ou dos recipientes. Ou talvez você conheça as velocidades, mas precise encontrar uma

Cada seção de Estratégia para a Solução de Problemas é seguida por um ou mais **Exemplos resolvidos**, que ilustram a estratégia. Muitos outros Exemplos podem ser encontrados em cada capítulo. Assim como as seções de Estratégia para a Solução de Problemas, todos os exemplos quantitativos aplicam a abordagem ISEE. Vários deles são puramente qualitativos e classificados como Exemplos Conceituais.

Exemplo 12.1

CÁLCULO DE UMA FORÇA GRAVITACIONAL. A massa m de uma das esferas pequenas da balança de Cavendish é igual a 0,0100 kg, a massa m de uma das esferas grandes é igual a 0,500 kg e a distância entre o centro de massa da esfera pequena e o centro de massa da esfera grande é igual a 0,0500 m. Calcule a força gravitacional F_g sobre cada esfera.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como os objetos de 0,0100 kg e 0,500 kg são esfericamente simétricos, podemos calcular a força gravitacional que um exerce sobre o outro, supondo que eles sejam partículas distanciadas de 0,0500 m. Cada esfera recebe uma força de *mesmo* módulo da outra esfera, ainda que suas massas sejam muito diferentes.

PREPARAR: usaremos a lei da gravitação, Equação (12.1), para determinar F_g.

Ensino associado à prática. Um recurso eficiente e sistemático de aprendizado associado à prática inclui os Objetivos de Aprendizagem, disponíveis no início de cada capítulo, e os Resumos dos capítulos, que consolidam cada conceito por meio de palavras, fórmulas matemáticas e figuras.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

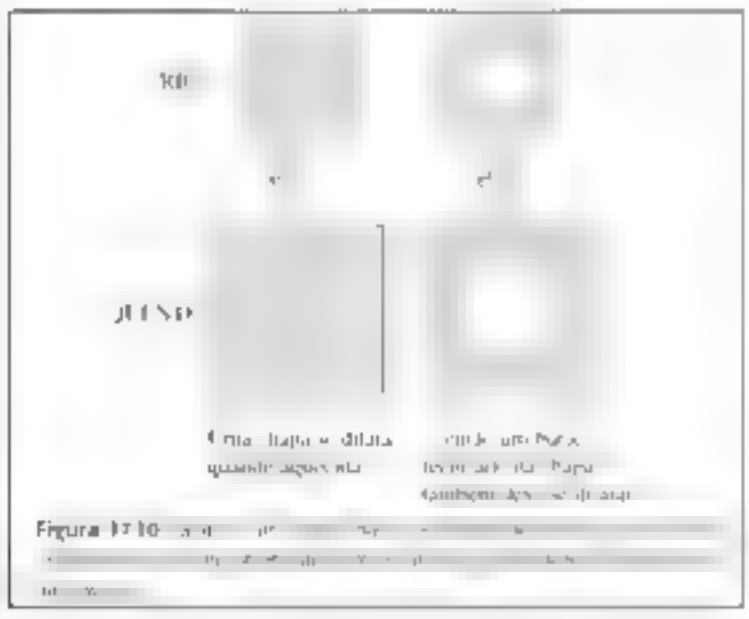
Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como descrever oscilações em termos da amplitude, período, frequência e frequência angular.
- Como fazer cálculos com movimento harmônico simples (MHS), um tipo importante de oscilação.
- Como usar conceitos de energia para analisar MHS.
- Como aplicar os conceitos envolvidos em um MHS a diferentes situações físicas.
- Como analisar os movimentos de um pêndulo simples.
- O que é um pêndulo físico, e como calcular as propriedades de seu movimento.

Teste sua compreensão da Seção 14.4 Uma equipe de manutenção está trabalhando em um trecho de uma estrada de três pistas, deixando apenas uma pista aberta ao tráfego. O resultado é um tráfego muito mais lento (um engarrafamento). Os carros na estrada se comportam como (i) moléculas de um fluido incompressível ou (ii) moléculas de um fluido compressível? ■

Organização dos capítulos

A **Introdução** de cada capítulo fornece exemplos específicos do conteúdo e faz a conexão com assuntos abordados em capítulos anteriores. Há também uma Pergunta de **abertura do capítulo** e uma lista de **Objetivos de Aprendizagem** para que o aluno reflita sobre a matéria no capítulo a seguir. (Para encontrar a resposta a essa pergunta, procure pelo ícone '?'.) A maioria das seções termina com um **Teste de compreensão**, que apresenta perguntas simples relacionadas ao conteúdo estudado. Esse recurso ajuda os alunos a testarem instantaneamente o que acabaram de aprender. O final de cada capítulo traz um Resumo visual dos princípios mais importantes apresentados, bem como uma lista de Principais termos com referência da página na qual cada termo foi introduzido pela primeira vez. As respostas à Pergunta de abertura do capítulo e do Teste de compreensão vêm na sequência dos Principais termos.



O poder didático das figuras. O poder instrutivo das figuras é potencializado por meio da comprovada técnica de 'anotação' (comentários no estilo quadro-negro integrados às figuras, para orientar o estudante em sua interpretação) e do uso eficiente de detalhes.

Problemas em destaque, ao final dos capítulos. Outro reconhecido mérito desta 12ª edição vai ainda mais longe: ela oferece em seus quatro volumes a primeira biblioteca de problemas sistematicamente melhorados em Física, com mais de 800 novos problemas, que compõem o acervo total de 3700.

Questões e exercícios. No final de cada capítulo há um conjunto de Questões para discussão destinadas a aprofundar e ampliar a assimilação conceitual pelo aluno, e logo após vêm os Exercícios, problemas simples que envolvem um dado conceito relacionado com seções específicas do texto. Em seguida temos os Problemas, que normalmente necessitam de duas ou mais etapas não triviais e, por fim, os Problemas desafiadores, destinados a desafiar os melhores estudantes. Os problemas abrangem aplicações a campos tão diversos quanto astrofísica, biologia e aerodinâmica. Muitos deles possuem partes conceituais às quais os estudantes devem discutir e explicar seus resultados. As novas questões, exercícios e problemas desta edição foram criados e organizados por Wayne Anderson (Sacramento City College), Laird Kramer (Florida International University) e Charlie Hibbard.

Parágrafos de 'atenção'. Duas décadas de pesquisa acadêmica em Física revelaram uma série de armadilhas conceituais que comumente afligem os estudantes no estudo da Física. Dentre elas, as noções de que uma força é necessária para o movimento, que a corrente elétrica é "usada" ao longo de um circuito e que o próprio produto da massa pela aceleração é uma força. Os parágrafos de 'Atenção' alertam para essas e outras armadilhas e explicam onde está o erro na abordagem (que pode ter inicialmente ocorrido ao estudante) de uma determinada situação.

> ATENÇÃO *Energia interna* Note que a energia interna não inclui a energia potencial decorrente das interações entre o sistema e suas vizinhanças. Se o sistema for um copo com água quando o colocarmos no alto de uma prateleira sua energia potencial oriunda da interação com a Terra aumentará. Porém, isso não acarreta nenhuma mudança na energia potencial decorrente das interações entre as moléculas da água de modo que a energia interna da água não varia.

Notação e unidades. Os estudantes geralmente levam muito tempo para distinguir as grandezas escalares das grandezas vetoriais. Nesta edição usamos letras em itálico e negrito com uma seta em cima para designar vetores, como $\vec{p}$, $\vec{a}$, e $\vec{F}$; vetores unitários como $\hat{i}$ possuem acento circunflexo. Os sinais em negrito **+**, **−**, **×** e **=** são usados para relacionar grandezas vetoriais e não confundi-los com os respectivos sinais usados para relacionar grandezas escalares.

Nesta edição são usadas somente unidades SI. As unidades inglesas ocorrem em casos de exceção. O joule é usado como unidade padrão para todas as formas de energia, incluindo o calor.

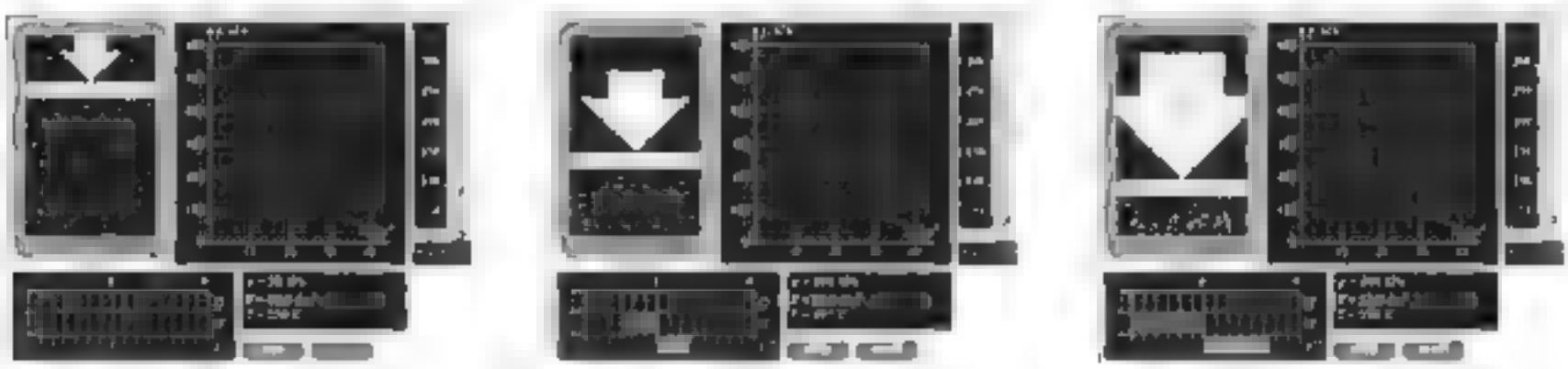
Um guia para o estudante. Muitos estudantes sentem dificuldade simplesmente porque não sabem como fazer o melhor uso do livro-texto. Depois deste prefácio, incluímos uma seção com o título "Como Aprender Física Tentando para Valer", que serve como um "manual do usuário" apontando para todas as características deste livro. Essa seção, escrita pelo Professor Mark Hollabaugh (Normandale Community College), fornece também inúmeras dicas para os alunos. Recomendamos que *todos* os estudantes leiam atentamente essa seção!

Flexibilidade. Este livro pode ser utilizado em uma grande variedade de cursos. Existe material suficiente para cursos de três semestres ou cinco trimestres. Embora muitos professores possam achar que há material demais para um curso de um ano, ele pode ser usado um pouco se certos capítulos ou seções. Por exemplo, alguns ou todos os capítulos sobre propriedades dos fluidos, acústica, ondas eletromagnéticas ou relatividade podem ser omitidos sem perda da continuidade. Seja como for, ninguém é obrigado a seguir estritamente a sequência do livro.

Material Adicional

No Companion Website deste livro (www.grupogen.com.br/young_br), professores e estudantes têm acesso a materiais adicionais que facilitarão a exposição das aulas e o aprendizado.
Para os professores: manual de soluções (em inglês) e apresentações em PowerPoint com figuras e os principais conceitos do livro (protegidos por senha).
Para estudantes: exercícios de múltipla escolha para ajudar na fixação de conceitos e animações (em inglês, que simulam alguns temas das lições, como no exemplo abaixo.

Simulação de um processo adiabático



Como Aprender Física Tentando para Valer

Mark Hollabaugh (Normandale Community College)

A física abrange o pequeno e o grande, o velho e o novo. Dos átomos até as galáxias, dos circuitos elétricos até a aerodinâmica, a física é parte integrante do mundo que nos cerca. Você provavelmente está fazendo este curso de física baseado no cálculo como pré-requisito de cursos subseqüentes que fará para se preparar para uma carreira de ciências ou de engenharia. Seu professor deseja que você aprenda física e que goste da experiência. Ele está muito interessado em ajudá-lo a aprender essa fascinante matéria. Essa é uma das razões para ter escolhido este livro-texto para o seu curso. Também foi por isso que os doutores Young e Freedman me pediram para escrever esta seção introdutória. Desejamos o seu sucesso!

O objetivo desta seção é fornecer algumas idéias que possam auxiliá-lo durante a aprendizagem. Após uma breve abordagem sobre hábitos e estratégias gerais de estudo, serão apresentadas sugestões específicas sobre como usar o livro-texto.

Preparação para este Curso

Caso esteja adiantado em seus estudos de Física, você aprenderá mais rapidamente alguns conceitos por estar familiarizado com a linguagem dessa matéria. Da mesma forma, seus estudos de matemática facilitarão sua assimilação dos aspectos matemáticos da física. Seu professor poderá indicar alguns tópicos de matemática que serão úteis neste curso.

Aprendendo a Aprender

Cada um de nós possui um estilo próprio e um método preferido de aprendizagem. Compreender seu estilo de aprender ajudará você a identificar as dificuldades e superá-las. Obviamente você preferirá dedicar mais tempo estudando os assuntos mais complicados. Se você aprende mais ouvindo, assistir às aulas e conferências será muito importante. Caso prefira explicar o trabalho em equipe, vai lhe ser útil. Se a sua dificuldade está na solução de problemas, grande uma parte maior de seu tempo aprendendo a resolver problemas. Também é fundamental desenvolver bons hábitos de estudo. Talvez a coisa mais importante que você possa fazer por si mesmo seja estabelecer uma rotina de estudos, em horários regulares e em um ambiente livre de distrações.

Responda para si mesmo as seguintes perguntas:

- Estou apto para usar os conceitos matemáticos fundamentais da álgebra, da geometria e da trigonometria? (Caso não esteja apto, faça um programa de revisão com a ajuda de seu professor.)
- Em cursos semelhantes, qual foi a atividade na qual tive mais dificuldade? (Dedique mais tempo a isso. Qual foi a atividade mais fácil para mim? (Execute-a primeiro, isso lhe dará mais confiança.)
- Estou entendendo melhor a matéria se leio o livro antes ou depois da aula? (Pode ser que você aprenda melhor fazendo uma leitura superficial da matéria, assistindo à aula e depois relendo o material com mais atenção.)
- Estou dedicando um tempo adequado aos meus estudos de física? (Uma regra prática para um curso deste tipo é dedicar 2h30 de estudos para cada hora de aula. Para uma semana com 5 horas de aula, deve-se dedicar cerca de 10 a 15 horas de estudos por semana.)
- Devo estudar física todos os dias? (Distribua as 10 ou 15 horas de estudos durante a semana.) Em que parte do dia meus estudos são mais eficientes? (Escolha um período específico do dia e atenha-se a ele.)
- Estou estudando em ambiente silencioso que favoreça minha concentração? (As distrações podem quebrar sua rotina de estudos e atrapalhar a assimilação de pontos importantes.)

Trabalho em Grupo

Cientistas e engenheiros raramente trabalham sozinhos e preferem cooperar entre si. Você aprenderá melhor e com mais prazer estudando Física junto com outros colegas. Alguns professores aplicam métodos formais de aprendizagem cooperativa ou incentivam a formação de grupos. Você pode, por exemplo, formar seu próprio grupo de estudos com amigos da escola ou de sua vizinhança. Caso possua *e-mail*, use-o para se comunicar com outros colegas. Seu grupo de estudos será especialmente importante quando estiver fazendo uma revisão para os exames.

Aulas e Anotações

Um componente importante de seu curso são as aulas e conferências. Na física, isso é especialmente importante porque seu professor geralmente faz demonstrações de princípios físicos, exceto simulações em computador ou exibe filmes. Todos esses recursos ajudam você a entender princípios fundamentais. Não falte a nenhuma aula, e caso, por algum motivo, isso seja inevitável, peça as anotações de algum colega de seu grupo de estudos.

Faça anotações das aulas sob a forma de tópicos e deixe espaço para completar os detalhes do conteúdo mais tarde. É difícil anotar palavra por palavra; portanto, anote apenas as idéias básicas. O professor pode usar um diagrama do livro

Deixe um espaço em suas notas para inserir o diagrama depois. Após as aulas, revise suas anotações, preenchendo as lacunas e anotando os pontos que devem ser mais desenvolvidos posteriormente. Anote as referências de páginas, equações ou seções do livro.

Faça perguntas em classe ou procure o professor depois da aula. Lembre-se de que a única pergunta tola é aquela que não foi feita.

Exames

Fazer uma prova gera um elevado nível de estresse. Contudo, estar bem preparado e descansado ajuda a tensão. Preparar-se para uma prova é um processo contínuo, começa assim que termina a última prova. Imediatamente depois de uma prova, você deve rever cuidadosamente os eventuais erros cometidos. Proceda do seguinte modo: cavida uma folha de papel em duas colunas. Em uma delas, escreva a solução correta do problema. Na outra, coloque sua solução e verifique onde foi que errou. Caso não consiga identificar com certeza o erro, consulte seu professor. A física se constrói a partir de princípios básicos e é necessário corrigir imediatamente qualquer interpretação incorreta. Atenção: embora você possa passar em um exame deixando para estudar na última hora, não conseguirá reter adequadamente os conceitos necessários para serem usados na próxima prova.

Agradecimentos

Desejamos agradecer as centenas de revisores e colegas que ofereceram valiosos comentários e sugestões para este livro. O sucesso duradouro de *Física* deve se, em grande medida, às suas contribuições.

Edward Adelson (Ohio State University)
Ralph Alexander (University of Missouri at Rolla)
J. G. Anderson, R. S. Anderson
Wayne Anderson (Sacramento City College)
Alex Azima (Lansing Community College)
Dilip Balamore (Nassau Community College)
Harold Bale (University of North Dakota)
Arun Bansil (Northeastern University)
John Baruch (Vanderbilt University)
J. D. Barnett, H. H. Barschall
Albert Bartlett (University of Colorado)
Paul Baum (CUNY, Queens College)
Frederick Becchetti (University of Michigan)
B. Bederson, David Bennum (University of Nevada, Reno)
Lev I. Berger (San Diego State University)
Robert Boeke (William Rainey Harper College)
S. Borowitz, A. C. Braden, James Brooks (Boston University)
Nicholas E. Brown (California Polytechnic State University, San Luis Obispo)
Tony Buffa (California Polytechnic State University, San Luis Obispo)
A. Capecelatro, Michael Cardamone (Pennsylvania State University)
Duane Carmony (Purdue University)
Troy Carter (UCLA)
P. Catranides, John Cerne (SUNY at Buffalo)
Roger Clapp (University of South Florida)
William M. Cloud (Eastern Illinois University)
Leonard Cohen (Drexel University)
W. R. Coker (University of Texas, Austin)
Malcolm D. Cole (University of Missouri at Rolla)
H. Conrad, David Cook (Lawrence University)
Gayl Cook (University of Colorado)
Hans Courant (University of Minnesota)
Bruce A. Craver (University of Dayton)
Larry Curtis (University of Toledo)
Jai Dahiya (Southeast Missouri State University)
Steve Detweiler (University of Florida)
George Dixon (Oklahoma State University)
Donald S. Duncan, Boyd Edwards (West Virginia University)
Robert Eisenstein (Carnegie Mellon University)
Amy Emerson Missourn (Virginia Institute of Technology)
William Fasnacht (U. S. Naval Academy)
Paul Feldker (St. Louis Community College)
Carlos Figueroa (Cabrillo College)
L. H. Fisher
Neil Fletcher (Florida State University)
Robert Folk
Peter Fong (Emory University)
A. Lewis Ford (Texas A&M University)
D. Franzosa, James R. Gaines (Ohio State University)
Solomon Gartenhaus (Purdue University)
Ron Gautreau (New Jersey Institute of Technology)
J. David Gavenda (University of Texas, Austin)
Dennis Gay (University of North Florida)
James Gerhart (University of Washington)
N. S. Gingrich
J. L. Glathart
S. Goodwin
Rich Gottfried (Frederick Community College)
Walter S. Gray (University of Michigan)
Paul Gresser (University of Maryland)
Benjamin Grinstein (UC San Diego)
Howard Grotch (Pennsylvania State University)
John Gruber (San Jose State University)
Graham D. Gutsche (U.S. Naval Academy)
Michael J. Harrison (Michigan State University)
Harold Hart (Western Illinois University)
Howard Hayden (University of Connecticut)
Carl Helrich (Goshen College)
Laurent Hodges (Iowa State University)
C. D. Hodgman
Michael Hones (Villanova University)
Keith Honey (West Virginia Institute of Technology)
Gregory Hood (Tidewater Community College)
John Hubisz (North Carolina State University)
M. Iona, John Jaszczak (Michigan Technical University)
Alvin Jenkins (North Carolina State University)
Robert P. Johnson (UC Santa Cruz)
Lorella Jones (University of Illinois)
John Karchek (GMI Engineering & Management Institute)

Thomas Keil (Worcester Polytechnic Institute)
Robert Kraemer (Carnegie Mellon University)
Jean P. Krisch (University of Michigan)
Robert A. Kromhout, Andrew Kunz (Marquette University)
Charles Lane (Berry College)
Thomas N. Lawrence (Texas State University)
Robert J. Lee
Alfred Leitner (Rensselaer Polytechnic University)
Gerald P. Lietz (De Paul University)
Gordon Lind (Utah State University)
S. Livingston
Phu Lukkin (University of Wisconsin, Milwaukee)
Robert Luke (Boise State University)
David Lynch (Iowa State University)
Michael Lysak (San Bernardino Valley College)
Jeffrey Mallow (Loyola University) Robert Martin (Kentucky State University)
Robert Marchina (University of Memphis)
David Markowitz (University of Connecticut)
R. J. Maurer
Oren Maxwell (Florida International University)
Joseph L. McCauley (University of Houston)
T. K. McCubbin, Jr. (Pennsylvania State University)
Charles McFarland (University of Missouri at Rolla)
James Meguire (Tulane University)
Lawrence McIntyre (University of Arizona)
Fredric Messing (Carnegie-Mellon University)
Thomas Meyer (Texas A&M University)
Andre Mirabelli (St. Peter's College, New Jersey)
Herbert Muether (S.U.N.Y., Stony Brook)
Jack Munsee (California State University, Long Beach)
Lorenzo Narducci (Drexel University)
Van E. Neie (Purdue University)
David A. Nordling (U. S. Naval Academy)
Benedict Oh (Pennsylvania State University)
L. O. Olsen
Jim Pannell (DeVry Institute of Technology)
W. F. Parks (University of Missouri)
Robert Paulson (California State University, Chico)
Jerry Peacher (University of Missouri at Rolla)
Arnold Perlmutter (University of Miami)
Lennart Peterson (University of Florida)
R. J. Peterson (University of Colorado, Boulder)
R. Prikston
Ronald Poling (University of Minnesota)
J. G. Potter
C. W. Price (Millersville University)
Francis Prosser (University of Kansas)
Shelden H. Radin
Michael Rapport (Anne Arundel Community College)
R. Resnick
James A. Richards, Jr.
John S. Risley (North Carolina State University)
Francesc Roig (University of California, Santa Barbara)
T. L. Rokoske
Richard Roth (Eastern Michigan University)
Carl Rotter (University of West Virginia)
S. Clark Rowland (Andrews University)
Rajarshi Roy (Georgia Institute of Technology)
Russell A. Roy (Santa Fe Community College)
Dhiraj Sardar (University of Texas, San Antonio)
Bruce Schumm (UC Santa Cruz)
Melvin Schwartz (St. John's University)
F. A. Scott
L. W. Seagondollar
Paul Shand (University of Northern Iowa)
Stan Shepherd (Pennsylvania State University)
Douglas Sherman (San Jose State)
Bruce Sherwood (Carnegie Mellon University)
Hugh Siefkin (Greenville College)
Tomasz Skwarnecki (Syracuse University)
C. P. Slichter
Charles W. Smith (University of Maine, Orono)
Malcolm Smith (University of Lowell)
Ross Spencer (Brigham Young University)
Julien Sprott (University of Wisconsin)
Victor Stanionis (Iona College)
James Stith (American Institute of Physics)
Chuck Stone (North Carolina A&T State University)
Edward Strother (Florida Institute of Technology)
Conley Stutz (Bradley University)
Albert Stwertka (U. S. Merchant Marine Academy)
Martin Tiersten (CUNY City College)
David Toot (Alfred University)
Somdev Tyagi (Drexel University)
F. Verbrugge
Helmut Vogel (Carnegie Mellon University)
Robert Webb (Texas A & M)
Thomas Weber (Iowa State University)
M. Russell Wehr (Pennsylvania State University)
Robert Weidman (Michigan Technical University)
Dan Whalen (UC San Diego)
Lester V. Whitney
Thomas Wiggins (Pennsylvania State University)
David Willey (University of Pittsburgh, Johnstown)
George Williams (University of Utah)
John Williams (Auburn University)
Stanley Williams (Iowa State University)
Jack Willis
Suzanne Willis (Northern Illinois University)
Robert Wilson (San Bernardino Valley College)
L. Wolfenstein, James Wood (Palm Beach Junior College)
Lowell Wood (University of Houston)
R. E. Worley
D. H. Ziebell (Manatee Community College)
George O. Zimmerman (Boston University).

Além disso, nós dos temos agradecimentos individuais a fazer

Estendo meus cordiais agradecimentos aos meus colegas da Carnegie-Mellon, em especial aos professores Robert Kraemer, Bruce Sherwood, Ruth Chabay, Helmut Vogel e Brian Quinn, por discussões estimulantes sobre pedagogia da Física e por seu apoio e incentivo durante a elaboração das sucessivas edições deste livro. Agradeço também às muitas gerações de estudantes da Carnegie-Mellon, por me ajudarem a entender o que é ser um bom professor e um bom escritor e por me mostrarem o que funciona ou não. É sempre um prazer e um privilégio expressar minha gratidão a minha mulher, Alice, e minhas filhas, Gretchen e Rebeca, pelo amor, suporte e amparo emocional durante a elaboração das sucessivas edições deste livro. Quem dera todos os homens e mulheres fossem abençoados com o amor que elas me dedicam.

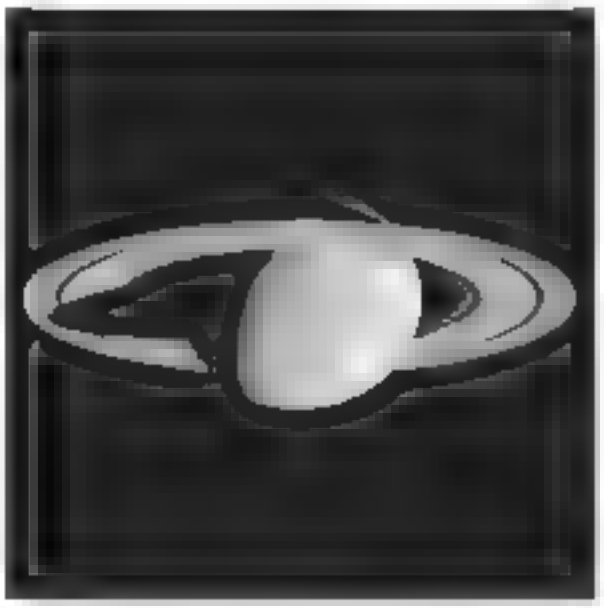
H. D. Y.

Gostaria de prestar agradecimento aos meus colegas do passado e do presente da UCSB incluindo Rob Geller, Carl Gwin, A. Nash, Elisabeth Nicol e Francesc Rogé pelo dedicado apoio e pelas valiosas discussões. Expresso minha gratidão especial aos meus primeiros professores Wilda Ramsay, Peter Zimmerman, William Little, Alan Schwerdtman e Dirk Walecka por me mostrarem como é claro e envolvente o ensino da Física, e a Stuart Johnson por me convidar a participar deste projeto como co-autor a partir da nona edição. Meus especiais agradecimentos à equipe editorial da Addison Wesley e seus parceiros: a Adam Black pela visão editorial; a Margot Otway pelo extraordinário senso gráfico e cuidadoso desenvolvimento desta edição; a Peter Murphy e Carol Reitz pela cuidadosa leitura do manuscrito; a Wayne Anderson, Charnie Hibbard, Laird Kramer e Larry Stookey pelo trabalho nos problemas de final de capítulo; e a Laura Kenney, Chandrika Madhavan, Nancy Tabor e Pat McCutcheon por manter a produção editorial fluindo. Desejo agradecer ao meu pai por seu amor e suporte permanentes e por reservar um espaço na estante para este livro. Acima de tudo, desejo expressar minha gratidão e amor a minha esposa, Caroline, a quem dedico minhas contribuições a este livro. A ti, Caroline, a nova edição finalmente saiu – vamos comemorar!

R. A. F.

GRAVITAÇÃO

12



Os anéis de Saturno são compostos de inúmeras partículas individuais orbitando. Todas as partículas do anel orbitam à mesma velocidade ou as partículas de dentro são mais rápidas ou mais lentas do que as de fora?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como calcular as forças gravitacionais que dois corpos quaisquer exercem um sobre o outro.
- Como relacionar o peso de um objeto à expressão geral para a força gravitacional.
- Como usar e interpretar a expressão geral para a energia potencial gravitacional.
- Como relacionar a velocidade, o período orbital e a energia mecânica de um satélite em uma órbita circular.
- As leis que descrevem os movimentos dos planetas, e como aplicá-las.
- O que são buracos negros, como calcular suas propriedades e como eles são encontrados.

Algumas das primeiras investigações em Física começaram com perguntas que as pessoas se faziam a respeito do céu noturno. Por que a Lua não cai sobre a Terra? Por que os planetas se deslocam no céu? Por que a Terra não está voando no espaço em vez de permanecer em órbita ao redor do Sol? O estudo da interação gravitacional fornece respostas para essas e outras perguntas relacionadas.

Conforme acentuamos no Capítulo 5 (*Física I*), a gravitação é uma das quatro classes de interações presentes na Natureza, e foi a primeira das quatro a ser estudada extensivamente. No século XVII Newton descobriu que a interação que faz a maçã cair de uma macieira é a mesma que mantém os planetas em órbita ao redor do Sol. Essa descoberta assinalou o começo da *mecânica celeste* — o estudo da dinâmica dos astros. Hoje, nossos conhecimentos da mecânica celeste nos permitem determinar como colocar um satélite artificial da Terra em uma órbita desejada, ou escolher a trajetória exata para enviar uma nave espacial a outro planeta.

Neste capítulo estudaremos a lei básica que governa a interação gravitacional. Essa lei é *universal*: a gravidade atua do mesmo modo entre a Terra e o corpo do leitor deste livro, entre o Sol e um planeta, e entre um planeta e uma de suas luas. Aplicaremos a lei da gravitação a fenômenos como a variação do peso com a altura, as órbitas de um satélite em torno da Terra e as órbitas de planetas em torno do Sol.

12.1 Lei de Newton da gravitação

O seu peso, a força que te atrai para o centro da Terra, talvez seja o mais familiar exemplo de atração gravitacional que você conhece. Estudando o movimento da Lua e dos planetas, Newton descobriu o caráter fundamental da atração gravitacional entre dois corpos de qualquer natureza. Juntamente com as três leis do movimento, Newton publicou a lei da gravitação em 1687. Ela pode ser enunciada do seguinte modo:

> **Cada partícula do universo atrai qualquer outra partícula com uma força diretamente proporcional ao produto das respectivas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as partículas.**

Traduzindo matematicamente, essa lei pode ser escrita da seguinte forma:

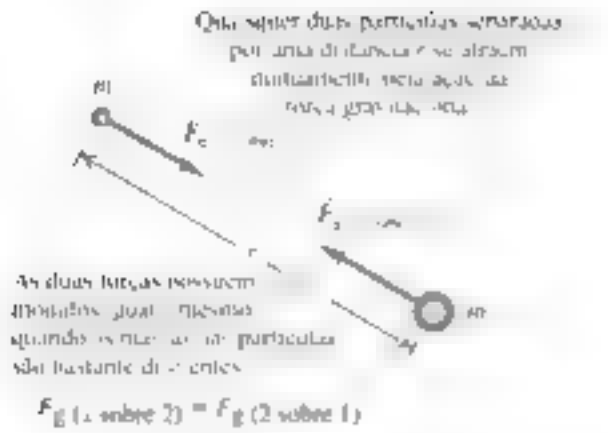


Figura 12.1 Forças gravitacionais entre duas partículas de

$$F = \frac{Gm_1m}{r^2}$$

(lei da gravitação) (12.1)

onde F é o módulo da força gravitacional que atua sobre cada partícula, m e m_1 são as massas das partículas, r é a distância entre elas (Figura 12.1) e G é uma constante física fundamental denominada **constante gravitacional**. O valor numérico de G depende do sistema de unidades usado.

A Equação (12.1) nos mostra que a força gravitacional entre duas partículas diminui com o aumento da distância r: se a distância dobra, a força se reduz a um quarto, e assim por diante. Embora muitas estrelas no céu noturno possuam muito mais massa do que o Sol, elas estão tão distantes que sua força gravitacional sobre a Terra pode ser desprezada, pois é muito pequena.

ATENÇÃO Como os símbolos g e G são muito parecidos, é bastante comum confundir as grandezas gravitacionais representadas por eles. A letra minúscula g é a aceleração da gravidade que relaciona o peso p com a massa m do corpo através da equação $p = mg$. O valor de g varia em locais diferentes da Terra e sobre as superfícies de outros planetas. Em contraste, a letra maiúscula G relaciona a força entre dois corpos com as suas massas e a distância entre eles. A constante G denomina-se *universal* porque ela possui sempre o mesmo valor para dois corpos, independentemente dos locais do universo nos quais os corpos estejam. Na próxima seção mostraremos como G se relaciona com g.

As forças gravitacionais atuam sempre ao longo da linha que une as duas partículas, constituindo um par de ação e reação. Essas forças possuem sempre módulos iguais, mesmo quando as massas são diferentes (Figura 12.1). A força de atração que o seu corpo exerce sobre a Terra possui o mesmo módulo da força de atração que a Terra exerce sobre você! Quando você salta do trampolim de uma piscina, a Terra se move em sua direção! (Por que você não nota isso? Porque a massa da Terra é cerca de 10^{23} vezes maior do que a sua massa, de modo que a aceleração da Terra é igual a 10^{-23} da sua aceleração.)

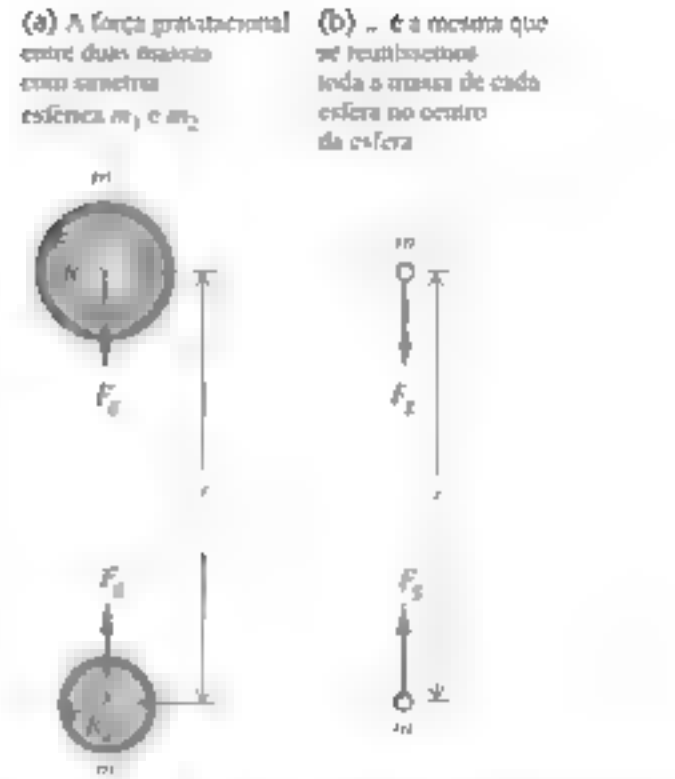


Figura 12.2 O efeito gravitacional na parte externa de qualquer distribuição de massa com simetria esférica é o mesmo efeito produzido supondo-se que a massa total da esfera esteja reunida em seu centro.

Gravitação e corpos de simetria esférica

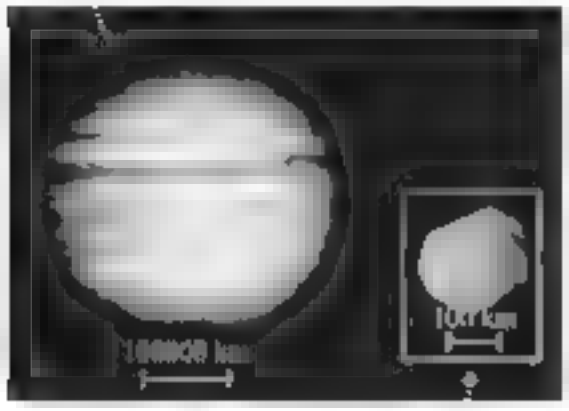
Enunciamos a lei da gravitação em termos da interação entre duas *partículas*. Verifica-se que a interação gravitacional entre dois corpos que possuem distribuições de massa com *simetria esférica* (tal como esferas maciças ou ocas) é igual à interação gravitacional entre duas partículas localizadas nos centros das respectivas esferas, como indicado na Figura 12.2. Portanto, quando modelamos a Terra como um corpo esférico de massa m_1, a força que ela exerce sobre uma partícula ou sobre um corpo com simetria esférica de massa m, sendo r a distância entre seus respectivos centros, é dada por

$$F = \frac{Gm_1m}{r^2} \qquad (12.2)$$

desde que o corpo esteja situado na parte externa da Terra. Uma força de mesmo módulo é realizada pelo corpo *sobre* a Terra. (Essas afirmações serão demonstradas na Seção 12.6.)

Para os pontos situados no *interior* da Terra, a situação é diferente. Se pudéssemos fazer um furo até o centro da Terra e medíssemos a força gravitacional em diferentes profundidades, verificaríamos que a força gravitacional *diminui* com o aumento da profundidade, em vez de crescer com $1/r^2$. À medida que um corpo penetra no interior da Terra (ou em qualquer outro corpo esférico), as partes externas da massa da Terra opostas em relação ao centro exercem sobre o corpo forças em sentidos contrários. Exatamente no centro da Terra, a força gravitacional exercida por ela sobre o corpo é igual a zero.

A massa de Júpiter é muito grande ($1{,}90 \times 10^{27}$ kg), então a atração gravitacional mútua de suas partes deu-lhe uma forma quase esférica



Amalteia, uma das pequenas luas de Júpiter, possui uma massa relativamente pequena ($7{,}17 \times 10^{18}$ kg, apenas cerca de $3{,}8 \times 10^{-9}$ da massa de Júpiter) e fraca atração gravitacional mútua, por isso tem uma forma irregular

Figura 12.3 Corpos esféricos e não esféricos: o planeta Júpiter e uma de suas pequenas luas, Amalteia

Corpos que possuem uma distribuição de massa com simetria esférica são muito importantes, porque luas, planetas e estrelas tendem a possuir uma forma esférica. Visto que todas as partículas de um corpo sofrem a ação de forças gravitacionais que tendem a aproximá-las entre si, as partículas tendem a se mover para minimizar a distância entre elas. Por causa disso, o corpo tende naturalmente a possuir uma forma esférica, do mesmo modo que uma porção de barro tende a assumir uma forma esférica quando você comprime o barro com força igual em todas as direções. Quando o corpo celeste possui massa pequena, esse efeito é bastante reduzido, porque as forças gravitacionais são menos intensas, e esses corpos tendem a *não* assumir uma forma esférica (Figura 12.3).

Determinação do valor de G

Para determinar o valor da constante gravitacional G, devemos *medir* a força gravitacional entre dois corpos de massas conhecidas m_1 e m_2 separados por uma distância r conhecida. Essa força é extremamente pequena para corpos existentes em laboratórios, mas ela pode ser medida com um instrumento denominado *balança de torção* usado em 1798 por Henry Cavendish para determinar o valor de G.

Uma versão moderna da balança de Cavendish é indicada na Figura 12.4. Uma haste leve e rígida em forma de letra T invertida é sustentada verticalmente por uma fibra de quartzo fina. Duas pequenas esferas, cada uma com massa m_1, estão fixadas nas extremidades dos braços horizontais da armação em forma de T. Ao aproximarmos duas esferas grandes, cada uma com massa m_2, nas posições indicadas, as forças gravitacionais fazem o T girar um pequeno ângulo devido à torção. Para medir esse ângulo, fazemos um feixe de luz incidir sobre um espelho fixado na haste do T. O feixe refletido atinge uma escala graduada e, quando o T sofre uma torção, o feixe refletido se move ao longo da escala.

Depois de calibrar a balança de Cavendish, podemos medir as forças gravitacionais e, assim, determinar o valor de G. O valor atualmente aceito (em unidades SI) é dado por

$$G = 6{,}742(10) \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

Com três algarismos significativos, escrevemos: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. Como $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, as unidades de G (em unidades fundamentais do SI) também podem ser expressas como $\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$.

As forças gravitacionais devem ser adicionadas vetorialmente. Se duas massas exercem forças gravitacionais sobre uma terceira massa, a força *resultante* sobre a terceira massa é igual à soma vetorial dessas duas forças gravitacionais. No Exemplo 12.3, utilizamos esta propriedade normalmente chamada de *superposição de forças*.

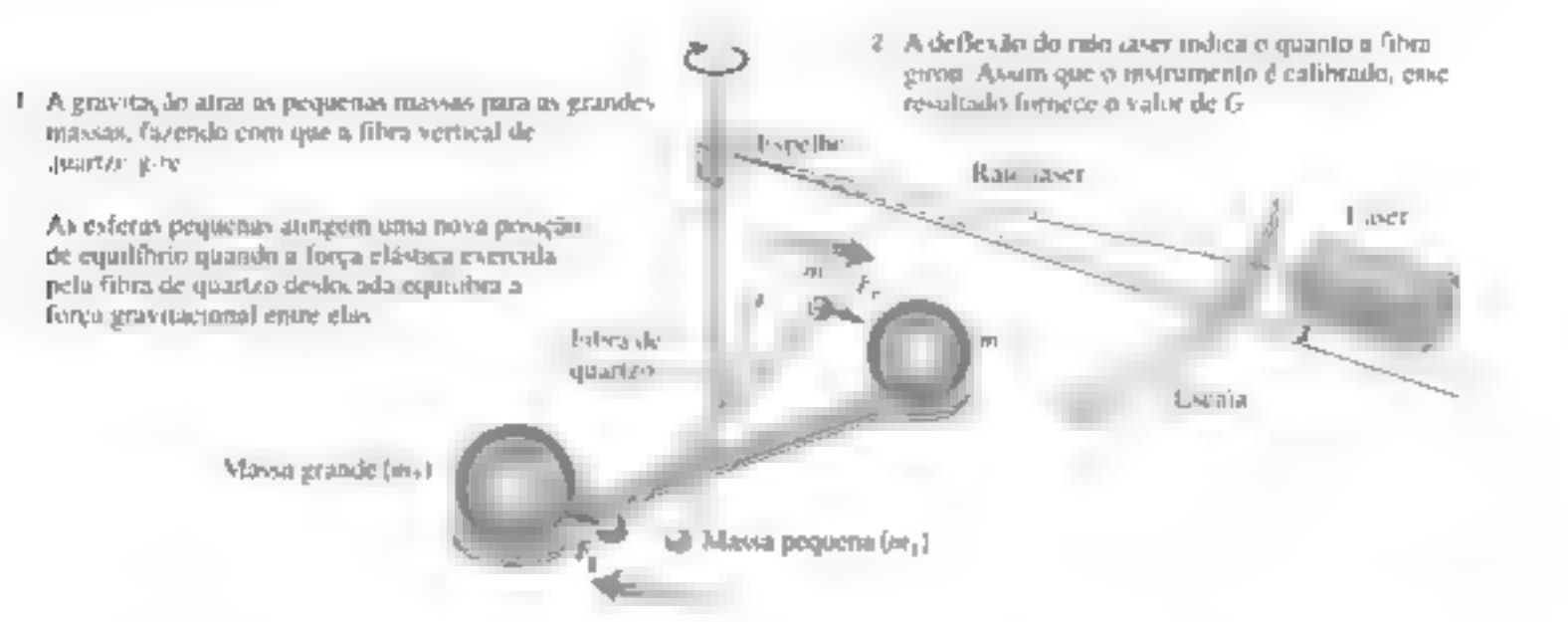

1 A gravitação atrai as pequenas massas para as grandes massas, fazendo com que a fibra vertical de quartzo gire
As esferas pequenas atingem uma nova posição de equilíbrio quando a força elástica exercida pela fibra de quartzo deslocada equilibra a força gravitacional entre elas
2 A deflexão do raio laser indica o quanto a fibra girou. Assim que o instrumento é calibrado, esse resultado fornece o valor de G
Espelho
Raio laser
Laser
Escala
Fibra de quartzo
Massa grande (m_2)
Massa pequena (m_1)

Figura 12.4 Princípio de funcionamento de uma balança de torção usada para a determinação do valor de G. O ângulo de deflexão está exagerado para maior clareza.

Exemplo 12.1

CÁLCULO DE UMA FORÇA GRAVITACIONAL A massa m_1 de uma das esferas pequenas da balança de Cavendish é igual a 0,0100 kg, a massa m_2 de uma das esferas grandes é igual a 0,500 kg, e a distância entre o centro de massa da esfera pequena e o centro de massa da esfera grande é igual a 0,0500 m. Calcule a força gravitacional F_g sobre cada esfera.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR como os objetos de 0,0100 kg e 0,500 kg são esfericamente simétricos, podemos calcular a força gravitacional que um exerce sobre o outro, supondo que eles sejam partículas distanciadas de 0,0500 m. Cada esfera recebe uma força de *mesmo* módulo da outra esfera, ainda que suas massas sejam muito diferentes.

PREPARAR usaremos a lei da gravitação, Equação (12.1), para determinar F_g.

EXECUTAR o módulo da força que uma esfera exerce sobre a outra é

$$F_g = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(0{,}0100\ \text{kg})(0{,}500\ \text{kg})}{(0{,}0500\ \text{m})^2}$$

$$= 1{,}33 \times 10^{-10}\ \text{N}$$

AVALIAR essa força é bastante pequena, como era de se esperar. Não experimentamos atração gravitacional perceptível devido a objetos comuns de massa pequena em nosso meio ambiente. É preciso um objeto de massa realmente grande para exercer uma força gravitacional substancial.

Exemplo 12.2

ACELERAÇÃO PRODUZIDA POR ATRAÇÃO GRAVITACIONAL Suponha que uma esfera pequena e uma esfera grande sejam destacadas do dispositivo descrito no Exemplo 12.1 e colocadas a uma distância de 0,0500 m (entre seus centros) em um local do espaço muito afastado de outros corpos. Qual é o módulo da aceleração de cada esfera em relação a um sistema inercial?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR a força gravitacional que as duas esferas exercem uma na outra possui o mesmo módulo. O sistema de duas esferas está tão distante de outros corpos que podemos desprezar quaisquer outras forças.) Mas as *acelerações* das duas esferas são diferentes, porque suas massas são diferentes.

PREPARAR calculamos o módulo da força sobre cada esfera no Exemplo 12.1. Para achar o módulo da aceleração de cada esfera, usaremos a segunda lei de Newton.

EXECUTAR a aceleração a_1 da esfera menor possui módulo

$$a_1 = \frac{F_g}{m_1} = \frac{1{,}33 \times 10^{-10}\ \text{N}}{0{,}0100\ \text{kg}} = 1{,}33 \times 10^{-8}\ \text{m/s}$$

A aceleração a_2 da esfera maior possui módulo

$$a_2 = \frac{F_g}{m_2} = \frac{1{,}33 \times 10^{-10}\ \text{N}}{0{,}500\ \text{kg}} = 2{,}66 \times 10^{-10}\ \text{m/s}$$

AVALIAR a esfera maior possui uma massa 50 vezes maior do que a da menor e, assim, sua aceleração é igual a 1/50 da aceleração da menor. Note também que as acelerações não são constantes, as forças gravitacionais aumentam à medida que as esferas se aproximam.

Exemplo 12.3

SUPERPOSIÇÃO DE FORÇAS GRAVITACIONAIS Muitas estrelas no céu são, na verdade, sistemas de duas ou mais estrelas mantidas juntas devido à atração gravitacional mútua. A Figura 12.5 mostra um sistema de três estrelas em um instante em que elas estão localizadas nos vértices de um triângulo retângulo de 45°. Determine o módulo, a direção e o sentido da força gravitacional resultante sobre a estrela menor exercida pela ação das duas estrelas maiores.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR devemos usar o princípio da superposição: a força gravitacional resultante sobre a estrela menor é a soma vetorial das duas forças gravitacionais produzidas pelas estrelas maiores.

PREPARAR vamos supor que as estrelas sejam esferas, para que possamos usar a lei da gravitação em cada força, como na Figura 12.2. Primeiro calcularemos os módulos de cada força usando a Equação (12.1) e depois a soma vetorial usando componentes ao longo dos eixos mostrados na Figura 12.5.

EXECUTAR o módulo de F_1, a força exercida pela estrela grande superior sobre a estrela menor é dado por

$$F_1 = \frac{\left[(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \times (8{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg})(1{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg})\right]}{(2{,}0 \times 10^{12}\ \text{m})^2 + (2{,}0 \times 10^{12}\ \text{m})^2}$$

$$= 6{,}67 \times 10^{28}\ \text{N}$$

O módulo da força F_2 exercida pela estrela grande inferior é dado por

$$F_2 = \frac{\left[(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \times (8{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg})(1{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg})\right]}{(2{,}0 \times 10^{12}\ \text{m})^2}$$

$$= 1{,}33 \times 10^{29}\ \text{N}$$

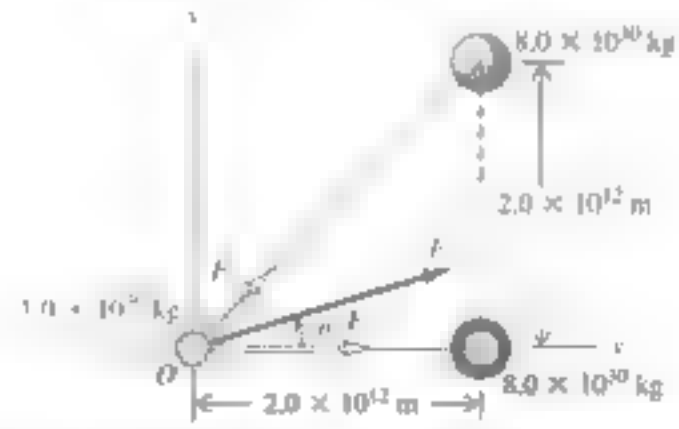


Figura 12.5 A força gravitacional resultante sobre a estrela menor (em *O*) é a soma vetorial das forças gravitacionais exercidas sobre ela pelas duas estrelas maiores. (Em comparação, a massa do Sol — uma estrela bastante comum — é $1{,}99 \times 10^{30}$ kg e a distância da Terra ao Sol é $1{,}50 \times 10^{11}$ m.)

Os componentes x e y destas forças são

$$F_x = (6{,}67 \times 10^{-25}\ \text{N})(\cos 45°) = 4{,}72 \times 10^{-25}\ \text{N}$$
$$F_y = (6{,}67 \times 10^{-25}\ \text{N})(\text{sen}\,45°) = 4{,}72 \times 10^{-25}\ \text{N}$$
$$F_z = 1{,}33 \times 10^{-26}\ \text{N}$$
$$F_z = 0$$

Os componentes da força resultante sobre a esfera menor são

$$F = F + F = 1{,}81 \times 10^{-26}\ \text{N}$$
$$F = F + F = 4{,}72 \times 10^{-25}\ \text{N}$$

O módulo da força resultante é dado por

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(1{,}81 \times 10^{-26}\ \text{N})^2 + (4{,}72 \times 10^{-25}\ \text{N})}$$
$$= 4{,}7 \times 10^{-25}\ \text{N}$$

e sua direção em relação ao eixo Ox é determinada pelo ângulo

$$\theta = \arctg\frac{F_y}{F_x} = \arctg\frac{4{,}72 \times 10^{-25}\ \text{N}}{1{,}81 \times 10^{-26}\ \text{N}} = 14{,}6°$$

AVALIAR: embora a força resultante sobre a esfera pequena se aproxime, o módulo da aceleração resultante não é $a = F/m = (1{,}87 \times 10^{-26}\ \text{N})/(1{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg}) = 1{,}87 \times 10^{-56}\ \text{m/s}$.

Você é capaz de mostrar que essa força *não* está dirigida para o centro de massa das duas estrelas maiores? (Veja o Problema 12.51.)

Por que as forças gravitacionais são importantes

Comparando os exemplos 12.1 e 12.3, vemos que as forças gravitacionais entre objetos caseiros de tamanho normal são desprezíveis, mas bastante significativas entre objetos do tamanho de estrelas. Com efeito, a gravidade é a força mais importante na escala de planetas, estrelas e galáxias (Figura 12.6). Ela é responsável por manter a nossa Terra agregada e por manter os planetas girando ao redor do Sol. A atração gravitacional mútua entre as diversas partes do Sol comprime a massa no núcleo do Sol a intensidades e temperaturas muito altas, possibilitando as reações nucleares que acontecem lá. Essas reações geram a energia do Sol, que torna possível a existência da vida na Terra e permite que você esteja agora lendo estas palavras.

A força gravitacional é muito importante em escala cósmica porque ela atua a distância sem nenhum contato entre os corpos. As forças elétricas e magnéticas também possuem essa notável propriedade, mas são menos importantes em escala astronômica porque grandes acumulações de matéria são eletricamente neutras, ou seja, contêm quantidades iguais de carga positiva e negativa. Em resultado, as forças elétricas e magnéticas entre estrelas e planetas aproximam-se de zero. As interações fortes e fracas discutidas na Seção 5.5 (*Física I*) também agem a distância, porém sua influência é desprezível em distâncias muito maiores do que o diâmetro de um núcleo atômico (cerca de 10^{-14} m).

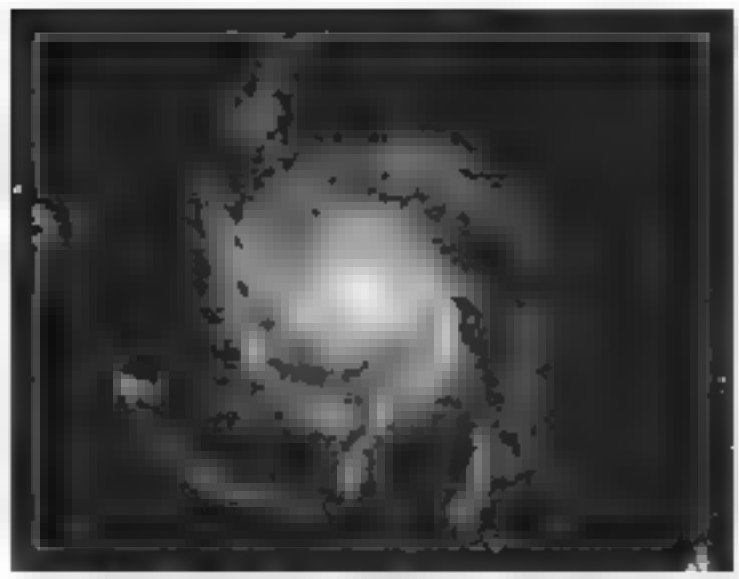


Figura 12.6 Nossa [illegible] é [illegible] de uma galáxia espiral [illegible] nela, que contêm não apenas estrelas, mas também gás, poeira e outros [illegible] ambos agregados [illegible] gravitação [illegible].

O conceito de campo é um método útil para descrever forças que atuam a distância. Um corpo produz uma perturbação ou campo em todos os pontos do espaço, e a força que atua sobre outro corpo situado em um dado ponto é uma resposta do campo do primeiro corpo nesse ponto. Existem campos associados às forças que atuam a distância; por essa razão, mencionaremos campos gravitacionais, campos elétricos, campos magnéticos, e assim por diante. Como não necessitamos do conceito de campo gravitacional para os estudos deste capítulo, não o mencionaremos mais aqui. No entanto, em capítulos posteriores, verificaremos que o conceito de campo é uma ferramenta extremamente poderosa para descrever interações elétricas e magnéticas.

Teste sua compreensão da Seção 12.1 O planeta Saturno possui cerca de cem vezes a massa da Terra e fica cerca de dez vezes mais longe do Sol do que a Terra. Comparando a aceleração da Terra provocada pela atração gravitacional do Sol quão maior ou menor é a aceleração de Saturno em virtude da atração gravitacional do Sol? (i) cem vezes maior; (ii) dez vezes maior; (iii) igual; (iv) 1/10 da aceleração da Terra; (v) 1/100 da aceleração da Terra. ∎

12.2 Peso

Definimos o *peso* de um corpo na Seção 4.4 (*Física I*) como a força de atração gravitacional exercida pela Terra sobre o corpo. Podemos agora estender nossa definição:

O peso de um corpo é a força gravitacional resultante exercida por todos os corpos do universo sobre o corpo.

Quando o corpo está próximo da superfície terrestre podemos desprezar todas as outras forças gravitacionais e considerar o peso somente a atração gravitacional exercida pela Terra sobre o corpo. Na superfície da *Lua* considera-

mos o peso do corpo a atração gravitacional exercida por ela sobre o corpo, e assim por diante.

Se modelarmos a Terra como um corpo esférico de raio R_T e massa m_T, o peso p de um corpo pequeno de massa m na superfície terrestre (a uma distância R_T do seu centro) é dado por

$$p = F_g = \frac{Gm_Tm}{R_T^2} \qquad (12.5)$$

(peso de um corpo de massa m na superfície terrestre)

Sabemos, porém, da Seção 4.4, que o peso p de um corpo é a força que produz uma aceleração g quando o corpo está em queda livre, então, pela segunda lei de Newton, $p = mg$. Igualando esta relação com a Equação (12.3) e dividindo por m, obtemos

$$g = \frac{Gm_T}{R_T^2} \qquad (12.4)$$

(aceleração da gravidade na superfície)

A aceleração da gravidade g é independente da massa m do corpo, porque m não aparece na relação anterior. Já conhecíamos esse resultado, porém agora verificamos como ele decorre da lei da gravitação.

Com exceção de m_T, as demais grandezas da Equação (12.4) são *mensuráveis*, portanto, usando-se essa relação podemos determinar a massa da Terra. Explicitando m_T da Equação (12.4) e usando os valores $R_T = 6.380$ km $= 6,38 \times 10^6$ m e $g = 9,80$ m/s^2, achamos

$$m_T = \frac{gR_T^2}{G} = 5,98 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

resultado bem próximo do valor de $5,974 \times 10^{24}$ kg atualmente aceito. Quando Cavendish mediu G, ele determinou a massa da Terra usando esse método.

Em um ponto acima da superfície terrestre situado a uma distância r do centro da Terra (a uma altura $r - R_T$ acima da superfície), o peso de um corpo é dado pela Equação (12.3), substituindo-se R_T por r,

$$p = F_g = \frac{Gm_Tm}{r^2}$$

O peso de um corpo diminui com o inverso do quadrado da distância ao centro da Terra (Figura 12.7). A Figura 12.8 mostra como o peso varia com a altura acima da Terra para uma astronauta que pesa 700 N na superfície terrestre.

O peso *aparente* de um corpo na superfície terrestre difere ligeiramente da força de atração gravitacional exercida pela Terra porque a Terra gira e, portanto, ela não é precisamente um sistema de referência inercial. Em nossa discussão anterior desprezamos esse efeito, e a Terra *foi* considerada um sistema de referência inercial. Voltaremos a discutir o efeito da rotação da Terra na Seção 12.7.

Figura 12.7 Quando está em um avião voando a uma altitude elevada, você pesa menos por estar mais longe do centro da Terra do que quando está sobre a superfície terrestre. O efeito é bastante pequeno, porém mensurável. Você é capaz de mostrar que, a uma altura de 10 km acima da superfície terrestre, seu peso é precisamente 0,3% menor do que seu peso sobre a superfície terrestre?

Em nossa discussão sobre peso, consideramos a Terra um corpo que possui aproximadamente uma distribuição de massa com simetria esférica. Porém, isso *não* significa supor que a Terra seja uniforme. Para provar que ela não pode ser uniforme, vamos inicialmente calcular sua *densidade* média; ou seja, a massa por unidade de volume da Terra. Supondo que ela seja esférica, seu volume é

$$V_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3 = \frac{4}{3}\pi(6,38 \times 10^6\ \text{m})^3 = 1,09 \times 10^{21}\ \text{m}^3$$

A densidade média ρ (letra grega "rô") é igual à massa total dividida pelo volume

$$\rho = \frac{m_T}{V_T} = \frac{5,97 \times 10^{24}\ \text{kg}}{1,09 \times 10^{21}\ \text{m}^3}$$
$$= 5500\ \text{kg/m}^3 = 5,5\ \text{g/cm}^3$$

(Compare com a densidade da água dada por 1000 kg/m^3 = 1,0 g/cm^3.) Caso a Terra fosse uniforme, as rochas nas vizinhanças da superfície terrestre deveriam possuir essa densidade. Na realidade, a densidade das rochas de superfície é bem menor: entre aproximadamente 2000 kg/m^3 = 2 g/cm^3 para as rochas sedimentares e cerca de 3300 kg/m^3 = 3,3 g/cm^3 para o basalto. Portanto, a Terra *não pode* ser uniforme, e o interior dela deve possuir uma densidade maior do que a densidade da superfície terrestre para que a sua *densidade* média seja de 5500 kg/m^3 = 5,50 g/cm^3. De acordo com modelos geofísicos do interior da Terra, a densidade máxima no centro da Terra é aproximadamente igual a 13000 kg/m^3 = 13 g/cm^3. A Figura 12.9 mostra um gráfico da densidade em função da distância ao centro da Terra.

Exemplo 12.4

GRAVIDADE EM MARTE Um veículo explorador não tripulado é enviado à superfície do planeta Marte, que possui raio $R_M = 3,40 \times 10^6$ m e massa $m_M = 6,42 \times 10^{23}$ kg. O veículo possui um

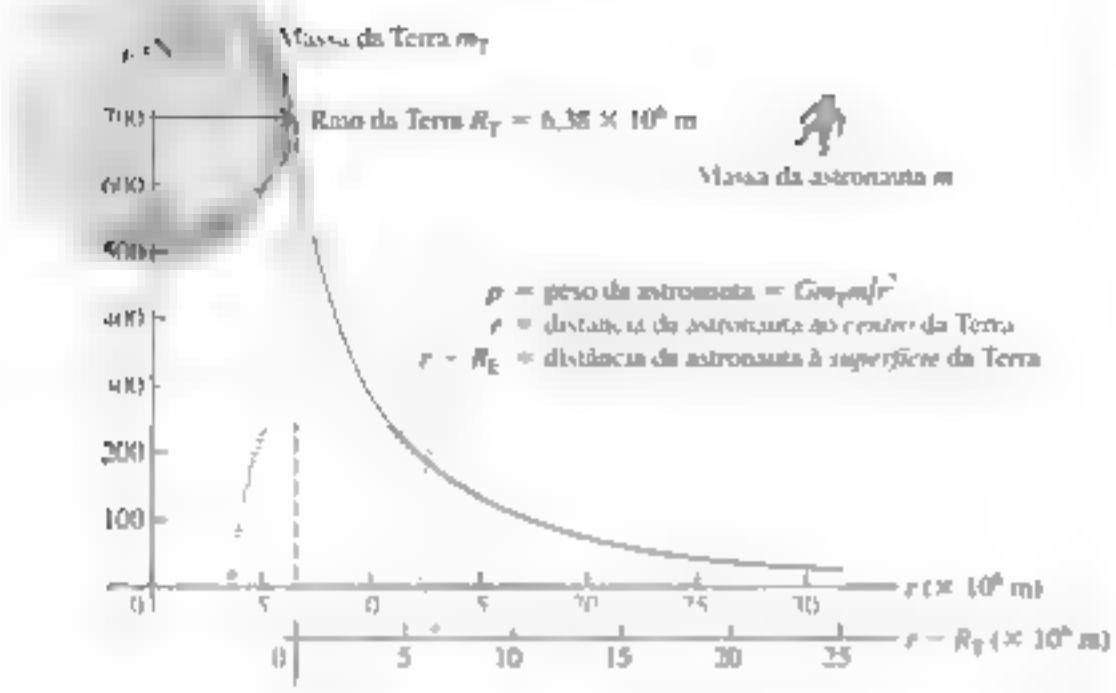

Massa da Terra m_T
Raio da Terra $R_T = 6{,}38 \times 10^6$ m
Massa do astronauta m
p = peso do astronauta = Gm_Tm/r^2
r = distância do astronauta ao *centro* da Terra
$r - R_E$ = distância do astronauta à *superfície* da Terra
r ($\times 10^6$ m)
$r - R_E$ ($\times 10^6$ m)

Figura 12.8 [illegible] gravitacional menor em pontos acima dessa superfície. A distância que importa é a distância r do astronauta ao centro da Terra (não a distância do astronauta à superfície terrestre).

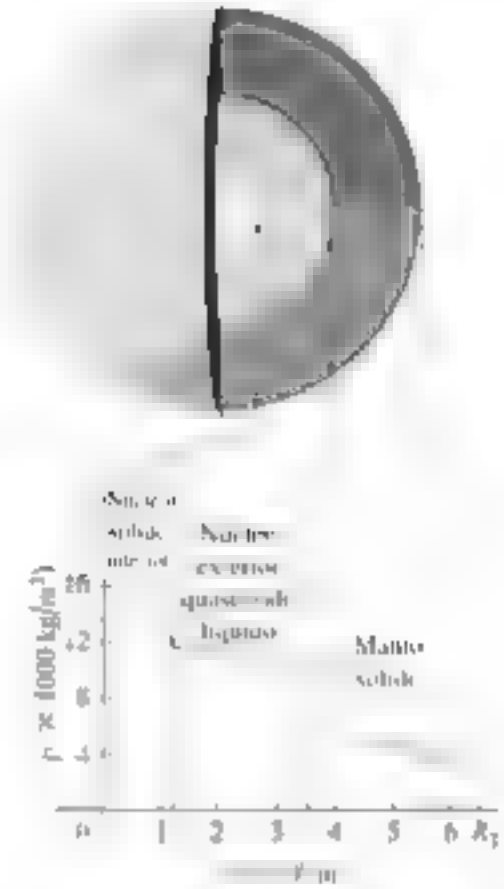


Figura 12.9 A densidade diminui à medida que aumenta a distância ao centro da Terra.

peso na Terra igual a 3920 N. Calcule o peso F_g e a aceleração g_M decorrentes da gravidade em Marte: a) a uma altura de $6{,}0 \times 10^6$ m acima da superfície de Marte (a distância entre a órbita do satélite Fobos e a superfície de Marte); b) sobre a superfície de Marte. Despreze os efeitos das (muito pequenas) luas de Marte.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: precisamos encontrar o peso F_g do veículo e a aceleração gravitacional g_M em duas distâncias diferentes do centro de Marte.

PREPARAR: encontramos o peso F_g usando a Equação (12.5), substituindo m_T (a massa da Terra) por m_M (a massa de Marte). Note que o valor da constante gravitacional G é sempre o mesmo em qualquer local do universo, ele é uma constante física fundamental. A seguir, encontramos a aceleração g_M usando a equação $F_g = mg_M$, onde m é a massa do veículo. O valor da massa não foi dado, mas podemos calculá-lo a partir do peso do veículo na Terra.

EXECUTAR: a distância r entre o ponto e o *centro* de Marte é dada por

$$r = (6{,}0 \times 10^6\ \text{m}) + (3{,}40 \times 10^6\ \text{m}) = 9{,}4 \times 10^6\ \text{m}$$

A massa m do veículo que deve pousar em Marte é dada pelo seu peso na Terra p dividido pela aceleração da gravidade g na Terra:

$$m = \frac{p}{g} = \frac{3920\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 400\ \text{kg}$$

A massa da nave é sempre a mesma, esteja na Terra ou em Marte, ou em qualquer lugar entre esses planetas. Usando a Equação (12.5),

$$F_g = \frac{GmM}{r^2} = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(6{,}42 \times 10^{23}\ \text{kg})(400\ \text{kg})}{(9{,}4 \times 10^6\ \text{m})^2}$$

$$= 194\ \text{N}$$

A aceleração decorrente da gravidade de Marte no ponto considerado é

$$g_M = \frac{F_g}{m} = \frac{194\ \text{N}}{400\ \text{kg}} = 0{,}48\ \text{m/s}^2$$

Essa aceleração é a mesma experimentada por Fobos em sua órbita, a uma altura de $6{,}0 \times 10^6$ m acima da superfície de Marte. b) Para achar F_g e g_M na superfície de Marte, repetimos os cálculos efetuados no item (a), substituindo $r = 9{,}4 \times 10^6$ m por $R_M = 3{,}40 \times 10^6$ m. De modo alternativo, como F_g e g_M são inversamente proporcionais a $1/r^2$ (em qualquer ponto fora do planeta), podemos multiplicar o resultado da parte (a) pelo fator

$$\left(\frac{9{,}4 \times 10^6\ \text{m}}{3{,}40 \times 10^6\ \text{m}}\right)^2$$

Convidamos você a completar os cálculos pelos dois métodos e a mostrar que na superfície de Marte $F_g = 1500$ N e $g_M = 3{,}7$ m/s^2.

AVALIAR: os resultados do item (b) mostram que o peso e a aceleração da gravidade de um objeto são, na superfície de Marte, aproximadamente 40% de seu valor na superfície da Terra. Os filmes e histórias de ficção científica que se passam em Marte em geral descrevem as temperaturas mais baixas e a atmosfera mais rarefeita do planeta, mas raramente se concentram na experiência de se estar em um ambiente de baixa gravidade.

Teste sua compreensão da Seção 12.2 Coloque os seguintes planetas hipotéticos em ordem, da maior à menor gravidade de superfície: (i) massa = 2 vezes a massa da Terra, raio = 2 vezes o raio da Terra; (ii) massa = 4 vezes a massa da Terra, raio = 4 vezes o raio da Terra; (iii) massa = 4 vezes a massa da Terra, raio = 2 vezes o raio da Terra; (iv) massa = 2 vezes a massa da Terra, raio = 4 vezes o raio da Terra. ■

12.3 Energia potencial gravitacional

Quando desenvolvemos o conceito de energia potencial gravitacional na Seção 7.1 (*Física I*), a força gravitacional que atua sobre um corpo foi considerada constante em módulo, direção e sentido. Isso nos levou ao resultado $U = mgy$. Agora, contudo, sabemos que a força gravitacional que atua sobre um corpo de massa m em qualquer ponto fora da Terra é dada de forma geral pela Equação (12.2), $F_g = Gm_Tm/r^2$, onde m_T é a massa da Terra e r é a distância entre o corpo e o centro da Terra. Em problemas nos quais r varia de modo suficiente para que a força gravitacional não possa ser considerada constante, precisamos de uma expressão genérica para a energia potencial gravitacional.

Para obter essa expressão, seguimos as mesmas etapas indicadas na Seção 7.1. Consideramos um corpo de massa m fora da Terra e, inicialmente, calculamos o trabalho W_{grav} realizado pela força gravitacional quando o corpo se move ao longo de uma reta que o une ao centro da Terra, movendo-se diretamente para cima ou para baixo, como na Figura 12.10, desde o ponto $r = r_1$ até o ponto $r = r_2$. Esse trabalho é dado por

$$W_{grav} = \int_{r_1}^{r_2} F_r\, dr \qquad (12.6)$$

onde F_r é o componente radial da força gravitacional, ou seja, o componente que aponta para fora do centro da Terra. Como a força aponta para dentro do centro da Terra, F_r é negativo. Esse componente é diferente da Equação (12.2), que fornece o módulo da força gravitacional, porque ele possui um sinal negativo:

$$F_r = -\frac{Gm_Tm}{r^2} \qquad (12.7)$$

Substituindo a Equação (12.7) na (12.6), vemos que W_{grav} é dado por

$$W_{grav} = -Gm_Tm\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Gm_Tm}{r_2} - \frac{Gm_Tm}{r_1} \qquad (12.8)$$

Trajetória retilínea
Trajetória curva
F_g
A força gravitacional é conservativa. O trabalho realizado por F_g não depende da trajetória de r_1 a r_2.
m_T

Figura 12.10 Trabalho realizado pela força gravitacional quando o corpo se move da coordenada radial r_1 até r_2.

A trajetória não precisa ser retilínea; ela poderia ser uma trajetória curva, como a indicada na Figura 12.10. Usando-se um método semelhante ao da Seção 7.1, vemos que esse trabalho depende apenas do valor final e do valor inicial de r, e não da trajetória descrita. Isso prova também que a força gravitacional é sempre *conservativa*.

Agora definimos a energia potencial gravitacional U correspondente de tal modo que $W_{grav} = U_1 - U_2$, como na Equação (7.3). Comparando este resultado com a Equação (12.8), vemos que a definição apropriada da **energia potencial gravitacional** é

$$U = -\frac{Gm_Tm}{r} \qquad \text{(energia potencial gravitacional)} \qquad (12.9)$$

A Figura 12.11 mostra como a energia potencial gravitacional depende da distância r entre o corpo de massa m e o centro da Terra. Quando o corpo se afasta da Terra, a distância r aumenta, a força gravitacional realiza um trabalho negativo e U aumenta (isto é, torna-se menos negativa). Quando o corpo "cai" na direção da Terra, a distância r diminui, a força gravitacional realiza um trabalho positivo e a energia potencial gravitacional diminui (isto é, torna-se mais negativa).

Talvez você fique confuso com a Equação (12.9), porque ela afirma que a energia potencial gravitacional é sempre negativa. No entanto, você já encontrou valores negativos para U anteriormente. Ao usar a relação $U = mgy$ na Seção 7.1, você verificou que U se tornava negativa quando o corpo de massa m se encontrava em uma altura y abaixo do ponto que você escolheu para $y = 0$, ou seja, sempre que a distância entre o corpo e a Terra era menor do que uma certa distância arbitrária. (Veja o Exemplo 7.2 na Seção 7.1.) Ao definir U pela Equação (12.9), escolhemos $U = 0$ quando o corpo de massa m se encontra em uma distância infinita da Terra ($r = \infty$). À medida que o corpo se aproxima da Terra, a energia potencial gravitacional diminui e, portanto, torna-se negativa.

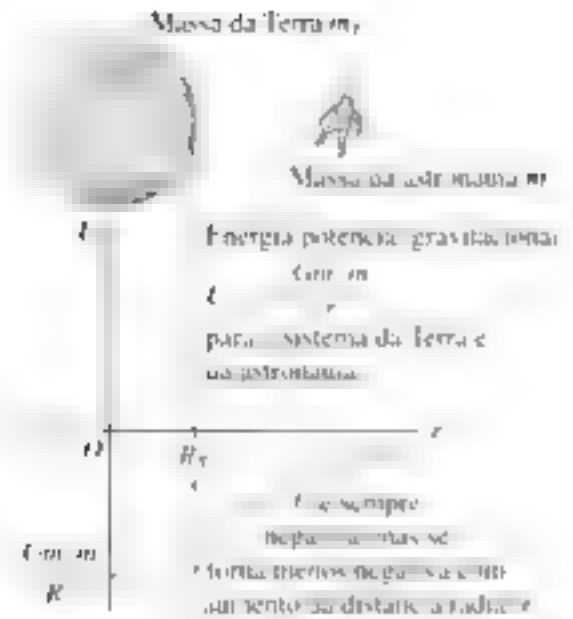


Figura 12.11 Gráfico da energia potencial gravitacional U para o sistema da Terra (massa m_T) e astronauta (massa m) em função da distância r da astronauta ao centro da Terra.

Caso fosse nosso desejo, poderíamos fazer $U = 0$ na superfície terrestre, onde $r = R_T$, simplesmente adicionando a quantidade Gm_Tm/R_T à Equação (12.9). Isso faria U se tornar positiva para $r > R_T$. Não faremos isso por dois motivos: primeiro, porque tornaria a expressão de U mais complicada; segundo, porque o termo adicionado não alteraria a *diferença* de energia potencial entre dois pontos arbitrários, que é a única grandeza que possui significado físico.

ATENÇÃO Força gravitacional x Energia potencial gravitacional Tome cuidado para não confundir a relação da força gravitacional, dada pela Equação (12.7), com a relação da energia potencial gravitacional, dada pela Equação (12.9). A força F_r é proporcional a $1/r^2$, enquanto a energia potencial gravitacional U é proporcional a $1/r$.

Tendo a Equação (12.9) como ferramenta, podemos agora usar relações gerais de energia em problemas nos quais a força gravitacional dependa de $1/r^2$. Quando a força gravitacional é a única força que realiza trabalho, a energia mecânica total do sistema é constante, ou se *conserva*. No exemplo fornecido a seguir, usaremos esse princípio para calcular **a velocidade de escape**, a velocidade mínima necessária para que um corpo escape completamente de um planeta.

Exemplo 12.5

"DA TERRA À LUA" No livro com esse título escrito por Júlio Verne em 1865, um projétil com três homens foi disparado em direção à Lua por um gigantesco canhão semi-enterrado no solo na Flórida. a) Calcule a velocidade mínima necessária na boca do canhão para que o projétil disparado verticalmente atinja uma altura igual ao raio da Terra. b) Calcule a *velocidade de escape* – ou seja, a velocidade mínima necessária para que o projétil deixe a Terra completamente. Despreze a resistência do ar, a rotação da Terra e a atração da Lua. O raio da Terra é dado por

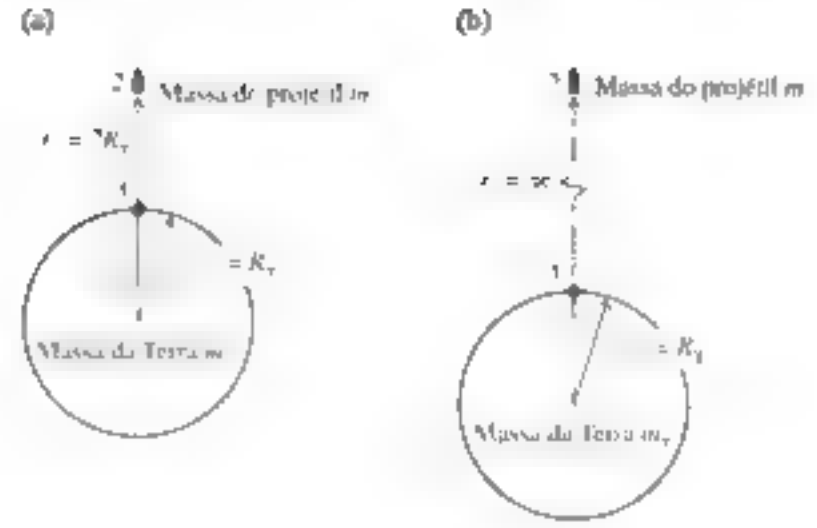


Figura 12.12 Nossos esboços para este problema.

$R_T = 6380$ km $= 6{,}38 \times 10^6$ m, e a massa da Terra é $m_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg (veja o Apêndice F).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: assim que o projétil sai da boca do canhão, apenas a força gravitacional (conservativa) realiza trabalho, e a energia mecânica é conservada. Usamos esse fato para encontrar a velocidade com que o projétil precisa sair da boca do canhão a fim de (a) atingir sua altura máxima a uma distância de dois raios da Terra desde o centro do planeta e (b) atingir sua altura máxima a uma distância infinita da Terra.

PREPARAR: tanto no item (a) quanto no item (b), usamos a equação da conservação da energia, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, em que a energia potencial U é obtida pela Equação (12.9). A Figura 12.12 mostra nossos esboços para resolver o problema. O ponto 1 é aquele em que o projétil sai do canhão com velocidade v_1 (a variável procurada). Nesse ponto, a distância do centro da Terra é $r_1 = R_T$, o raio da Terra. O ponto 2 é onde o projétil atinge a sua altura máxima: no item (a) isso acontece quando $r_2 = 2R_T$ (Figura 12.12a), e no item (b) isso acontece infinitamente longe da Terra, em $r_2 = \infty$ (Figura 12.12b). Em ambos os casos, o projétil está em repouso no ponto 2, então $v_2 = 0$ e $K_2 = 0$. Vamos considerar m a massa do projétil (com os passageiros).

EXECUTAR: podemos calcular v_1 usando a equação da conservação da energia mecânica:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gm_Tm}{R_T} = 0 - \frac{Gm_Tm}{2R_T}$$

Reagrupando os termos, encontramos

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_T}{R_T}}$$

$$= \sqrt{\frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6{,}38 \times 10^6\ \text{m}}}$$

$$= 7900\ \text{m/s}\ (= 28400\ \text{km/h} = 17700\ \text{mi/h})$$

(b) Desejamos que o projétil seja capaz de "atingir" o ponto 2 em $r_2 = \infty$, sem nenhuma energia cinética, ou seja, $K_2 = 0$. Quando o projétil está a uma distância infinita da Terra, a energia potencial

também é nula $U_2 = 0$ (veja a Figura 12.11). A energia resultante é, portanto, zero, e quando o projétil é disparado, a soma da energia cinética K_1 positiva com a energia potencial gravitacional U_1 negativa deve ser igual a zero:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{-GmM}{R_T} = E = 0$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6.38 \times 10^6\ \text{m}}}$$

$$1.12 \times 10^4\ \text{m/s} = 40200\ \text{km/h} = 25000\ \text{mi/h}$$

AVALIAR esse resultado não depende nem da massa do projétil nem da direção em que ele foi lançado. As modernas espaçonaves lançadas na Flórida devem atingir essencialmente a velocidade encontrada no item (b) para deixar a Terra. Uma espaçonave no solo em Cabo Canaveral já está se movendo a 410 m/s de oeste para leste em virtude da rotação da Terra; lançando-se a espaçonave de oeste para leste, ela recebe "gratuitamente" essa contribuição para a velocidade de escape.

Generalizando nosso resultado, a velocidade inicial v_1 necessária para que um corpo escape da superfície de um astro esférico de massa M e raio R (desprezando-se a resistência) é dada por

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad \text{(velocidade de escape)}$$

Você pode usar esse resultado para calcular a velocidade de escape da superfície de outros astros. Para Marte, você achará 5.02×10^3 m/s; para Júpiter, 5.95×10^4 m/s e, para o Sol, 6.18×10^5 m/s.

Outras relações envolvendo energia potencial gravitacional

Como observação final, mostraremos que, quando estamos nas vizinhanças da superfície terrestre, a Equação (12.9) se reduz ao resultado familiar $U = mgy$ obtido no Capítulo 7. Inicialmente, reescrevemos a Equação (12.8) do seguinte modo:

$$W_{grav} = Gm_Tm\frac{r_1 - r_2}{r_1r_2}$$

Quando o corpo está nas vizinhanças da superfície terrestre, podemos substituir r_1 e r_2 pelo raio da Terra R_T no denominador, logo

$$W_{grav} = Gm_Tm\frac{r_1 - r_2}{R_T^2}$$

Usando a Equação (12.4), $g = Gm_T/R_T^2$, obtemos

$$W_{grav} = mg(r_1 - r_2)$$

Substituindo-se cada r pelo respectivo y, obtemos justamente a Equação (7.1) referente ao trabalho realizado por uma força gravitacional constante. Na Seção 7.1 usamos esta relação para deduzir a Equação (7.2), $U = mgy$, de modo que podemos considerar essa expressão da energia potencial gravitacional um caso particular da relação mais geral dada pela Equação (12.9).

Teste sua compreensão da Seção 12.3 É possível que um planeta possua a mesma gravidade de superfície que a Terra (ou seja, o mesmo valor de g na superfície) e ainda assim tenha uma velocidade de escape maior? ■

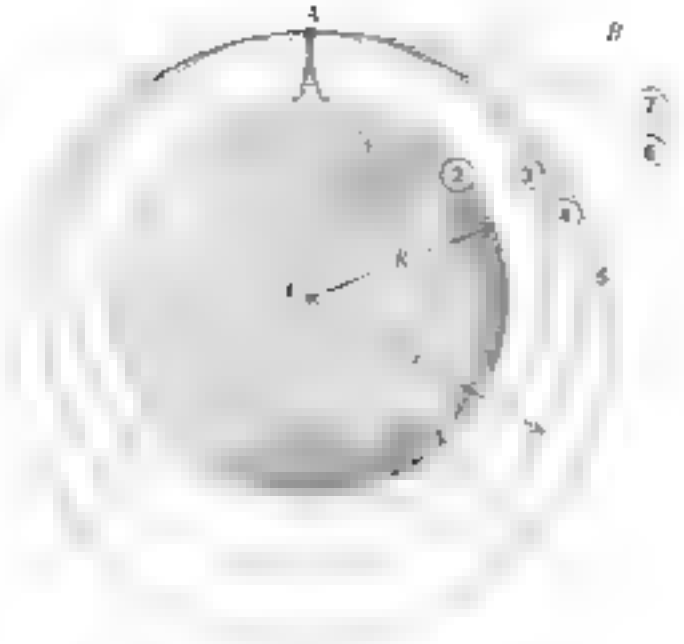
12.4 Movimento de satélites

Satélites artificiais em órbita em torno da Terra constituem um fato familiar na vida contemporânea (Figura 12.13). No entanto, quais são os fatores que determinam as propriedades das órbitas e como eles permanecem em órbita? As respostas podem ser fornecidas aplicando-se as leis de Newton e a lei da gravitação. Veremos na próxima seção que o movimento de planetas pode ser analisado de modo semelhante.

Para começar, lembre-se do raciocínio feito na Seção 3.3 (*Física I*), quando discutimos o movimento de um projétil. No Exemplo 3.6, um motociclista se lança horizontalmente da extremidade de um morro, descrevendo uma trajetória parabólica que termina no solo plano na base do morro. Caso ele sobreviva e repita essa experiência com velocidades crescentes em cada lançamento, ele chegará ao solo em pontos cada vez mais afastados do local do lançamento. É possível imaginar que ele se lance com uma velocidade suficientemente grande para que a curvatura da Terra passe a ser um fator importante. À medida que ele cai, a Terra se encurva embaixo dele. Caso ele se lance com uma velocidade suficientemente grande e caso o topo do morro seja suficientemente elevado, ele pode dar a volta na Terra sem retornar ao solo.

A Figura 12.14 mostra uma variante do tema apresentado no parágrafo anterior. Lançamos um projétil de um ponto A em uma direção AB tangente à superfície terrestre. As trajetórias de (1) até (7) mostram o efeito do aumento da velocidade inicial. Nas trajetórias de (3) até (5) o projétil não volta para o solo e torna-se um satélite artificial da Terra. Caso não exista nenhuma força retardadora, a velo-

Figura 12.13 Com 13,2 m de comprimento e massa igual a 11000 kg, o Telescópio Espacial Hubble está entre os maiores satélites colocados em órbita.



...ar ao solo é lançado de *A* para *B*. As trajetórias de (1) a (7) mostram o efeito do aumento da velocidade inicial.

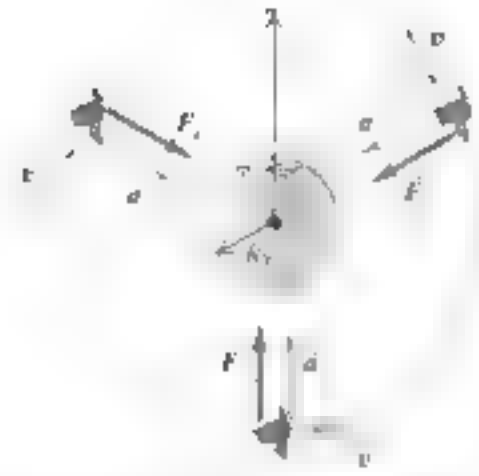
Figura 12.14 Trajetórias de um projétil lançado de uma grande altura (desprezando a resistência do ar). As órbitas 1 e 2 se completariam como mostrado se a Terra fosse uma massa pontual em *C*. (Esta ilustração se baseia em uma ilustração do livro Principia, de Isaac Newton.)

cidade quando ele retorna ao ponto *A* é igual à velocidade inicial, e o corpo repete esse movimento indefinidamente. As trajetórias de (1) até (5) se fecham sobre si mesmas e denominam-se **órbitas fechadas**. Todas as órbitas fechadas ou são elipses ou segmentos de elipses; a trajetória (4) é uma circunferência, que é um caso particular de elipse. (Estudaremos as propriedades das elipses na Seção 12.5.) As trajetórias (6) e (7) denominam-se **órbitas abertas**. Nessas trajetórias o projétil não retorna ao ponto *A*, *em vez disso*, afasta-se cada vez mais da Terra.

Satélites: órbitas circulares

A órbita *circular*, como a trajetória (4) indicada na Figura 12.14, é o caso mais simples. É também um caso importante, porque muitos satélites artificiais possuem órbitas quase circulares, e as órbitas dos planetas do sistema solar também são quase circulares. A única força que atua sobre um satélite artificial em órbita circular em torno da Terra é sua atração gravitacional, que está orientada para o centro desta e, portanto, para o centro da órbita (Figura 12.15). Conforme discutimos na Seção 5.4, isso equivale a dizer que o satélite descreve um movimento circular *uniforme* e sua velocidade é constante. Em sua queda, o satélite não vai *em direção à* Terra; em vez disso, ele segue constantemente *ao redor* dela, e sua velocidade tangencial na órbita circular é exatamente aquela necessária para manter constante sua distância ao centro da Terra.

Como podemos achar a velocidade constante v de um satélite em uma órbita circular? O raio da órbita é r, medido a partir do *centro* da Terra; a aceleração do satélite possui módulo $a_{rad} = v^2/r$ e ela está sempre dirigida para o centro do círculo. De acordo com a lei da gravitação, a



O satélite está em uma órbita circular: sua aceleração $\vec{a}$ é sempre perpendicular à sua velocidade $\vec{v}$, então sua velocidade v é constante.

Figura 12.15 A força devida à atração gravitacional exercida pela Terra fornece a aceleração centrípeta necessária para manter o satélite em órbita. Compare essa figura com a Figura 5.28 (Física I).

força resultante (a força da gravitação) que atua sobre um satélite de massa m é dada por $F_g = Gm_Tm/r^2$ e possui a mesma direção e sentido da aceleração. Então, a segunda lei de Newton permite escrever

$$\sum F = ma$$

$$\frac{Gm_Tm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Explicitando v, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} \qquad \text{(órbita circular)} \tag{12.10}$$

Essa relação mostra que a escolha de v não pode ser feita de modo independente da escolha de r; para um dado valor de r, a velocidade v de uma órbita circular é determinada por essa relação.

A Equação (12.10) também mostra que o movimento de um satélite não depende de sua massa m, visto que o valor de m não aparece nessa equação. Caso pudéssemos dividir um satélite em duas partes iguais sem alterar sua velocidade, as duas partes continuariam a se deslocar como no movimento original. Uma astronauta no interior de um ônibus espacial em órbita é ela própria um satélite artificial da Terra, mantido na mesma órbita do ônibus espacial em virtude da atração gravitacional do planeta. A aceleração e a velocidade da astronauta possuem valores iguais aos da aceleração e da velocidade do ônibus espacial, de modo que não existe nenhuma força empurrando-a nem contra a parede nem contra o piso do ônibus espacial. Ela está no chamado *estado de imponderabilidade*, no qual seu peso aparente é nulo, tal como no caso de um elevador em queda livre; ver a discussão que segue o Exemplo 5.9 da Seção 5.2. (Um *verdadeiro* estado de imponderabilidade ocorreria somente quando ela estivesse muito afastada de qualquer corpo, de modo que a atra-

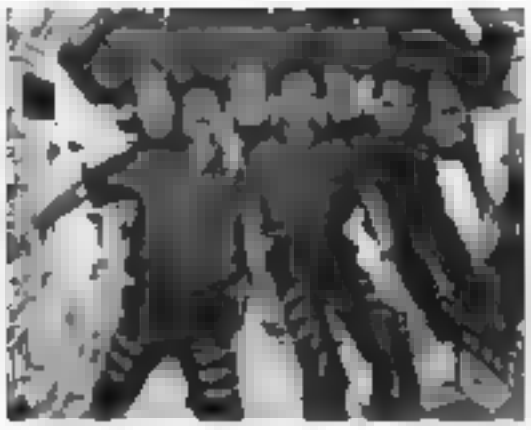


Figura 12.16 Estes astronautas do ônibus espacial encontram-se em um estado de aparente imponderabilidade. Quais estão de cabeça para cima e quais estão de cabeça para baixo?

ção gravitacional sobre ela seria exatamente igual a zero). Na verdade, todas as partes do seu corpo possuem um peso aparente igual a zero; ela não sente nenhuma força empurrando seu estômago contra seu intestino ou sua cabeça contra os seus ombros.

A ocorrência de um peso aparente igual a zero não é apenas característica de uma órbita circular; isso ocorrerá sempre que a atração gravitacional for a única força atuando sobre uma espaçonave. Portanto, ocorre em qualquer tipo de órbita – inclusive as órbitas abertas indicadas pelas trajetórias (6) e (7) da Figura 2.14.

Podemos deduzir uma relação entre o raio r de uma órbita circular e o período T, o tempo de uma revolução. A velocidade v é a distância $2\pi r$ percorrida durante uma revolução, dividida pelo período

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

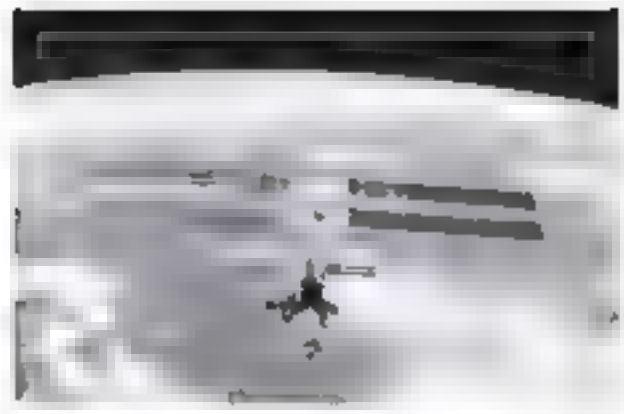
Para obtermos uma expressão para T, explicitamos T da Equação (12.11) e eliminamos v usando a Equação (12.10):

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_E}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_E}} \quad \text{(órbita circular)} \tag{12.12}$$

As equações (12.10) e (12.12) mostram que as órbitas maiores correspondem a velocidades mais baixas e a períodos mais longos (Figura 12.17).

É interessante comparar a Equação (12.10) com o cálculo da velocidade de escape do Exemplo 12.5. Vemos que a velocidade de escape de um corpo esférico com raio R é dada por $\sqrt{2}$ vezes a velocidade de um satélite em uma órbita com mesmo raio. Caso o ônibus espacial esteja em uma órbita circular em torno de *qualquer* planeta, devemos multiplicar a velocidade dessa órbita por $\sqrt{2}$ para que ele escape para o infinito, qualquer que seja a massa do planeta.

Uma vez que a velocidade v em uma órbita circular é determinada pela Equação (12.10) para um dado raio r da órbita, a energia mecânica total $E = K + U$ pode ser também determinada. Usando-se as equações (12.9) e (12.10), achamos



Estação Espacial Internacional
Distância do centro da Terra = 6800 km
(400 km acima da superfície)
Velocidade orbital = 7.7 km/s
Período orbital = 93 min

Lua
Distância do centro da Terra = 384 000 km
Velocidade orbital = 1.0 km/s
Período orbital = 27.3 dias

Figura 12.17 Tanto a Estação Espacial Internacional como a Lua são satélites da Terra. A Lua descreve uma órbita bem mais longe do centro da Terra do que a Estação Espacial, por isso possui uma velocidade orbital menor e

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_E}{r} = \frac{GmM_E}{2r} - \frac{GmM_E}{r}$$

$$E = -\frac{GmM_E}{2r} \quad \text{(órbita circular)} \tag{12.13}$$

A energia mecânica total em uma órbita circular é negativa e igual à metade da energia potencial gravitacional. Aumentar o raio r da órbita significa aumentar a energia mecânica (isto é, fazer E ficar menos negativa). Quando o satélite está em uma órbita relativamente baixa no limite da atmosfera terrestre, a energia mecânica diminui por causa do trabalho negativo realizado pela força de resistência do ar; portanto, o raio da órbita deve ir diminuindo até que o satélite se queime ou então caia no solo.

Temos nos referido principalmente a satélites artificiais da Terra, porém podemos aplicar a análise anterior para *qualquer* corpo submetido a uma atração gravitacional de um astro estacionário. Outros exemplos são fornecidos pela Lua, pelas luas de outros planetas e pelos anéis de Saturno (Figura 12.18).

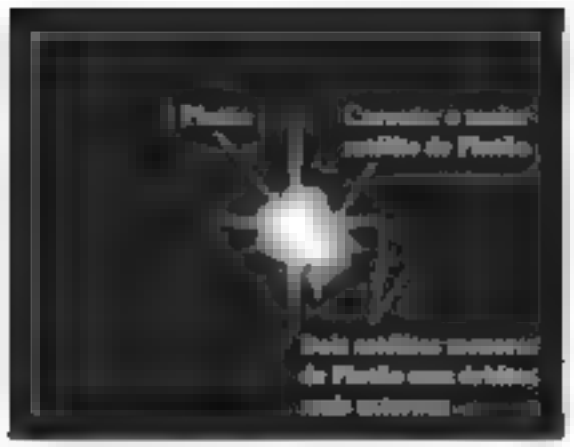


Figura 12.18 Os dois pequenos satélites de Plutão foram descobertos em 2005. De acordo com a Equação (12.12), quanto maior a órbita do satélite mais tempo levará para que ele complete uma volta ao redor de Plutão.

Exemplo 12.8

UMA ÓRBITA DE SATÉLITE Suponha que você deseje colocar um satélite meteorológico de 1000 kg em uma órbita circular 300 km acima da superfície terrestre. a) Qual seria a velocidade, o período e a aceleração radial desse satélite? b) Qual seria o trabalho necessário para colocar esse satélite em órbita? c) Qual seria o trabalho adicional necessário para fazer esse satélite escapar da Terra? O raio da Terra é $R_T = 6.380$ km e a massa é $m_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR O satélite está em uma órbita circular, então podemos usar as equações deduzidas nesta seção.

PREPARAR No item (a), acharemos primeiro o raio r da órbita do satélite nessa altitude. Depois, calcularemos a velocidade v e o período T usando as equações (12.10) e (12.12). A aceleração em uma órbita circular é dada pela fórmula que já conhecemos desde o Capítulo 3, $a_{rad} = v^2/r$. Nos itens (b) e (c), o trabalho necessário é a diferença entre a energia mecânica inicial e a final, que, para uma órbita circular, é dada pela Equação (12.13).

EXECUTAR a) O raio da órbita do satélite é

$$r = 6380 \text{ km} + 300 \text{ km} = 6680 \text{ km} = 6.68 \times 10^6 \text{ m}$$

Pela Equação (12.10), a velocidade orbital é

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6.68 \times 10^6\ \text{m}}}$$

$$= 7720 \text{ m/s}$$

Pela Equação (12.12), o período orbital é

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6.68 \times 10^6\ \text{m})}{7720\ \text{m/s}}$$

$$= 5440 \text{ s} = 90.6 \text{ min.}$$

A aceleração radial é dada por

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \frac{(7720\ \text{m/s})^2}{6.68 \times 10^6\ \text{m}}$$

$$= 8.92\ \text{m/s}^2$$

Esse é o valor de g na altura de 300 km acima da superfície; ele é ligeiramente menor do que o valor de g na superfície terrestre.

b) O trabalho necessário é dado pela diferença entre a energia mecânica total E_2 quando o satélite está em órbita e a energia mecânica total original E_1 quando o satélite estava em repouso na plataforma de lançamento na Terra. Usando a Equação (12.13), obtemos a energia em órbita:

$$E_2 = \frac{Gm_Tm}{2r}$$

$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})(1000\ \text{kg})}{2(6.38 \times 10^6\ \text{m})}$$

$$= 2.99 \times 10^{10}\ \text{J}$$

Em repouso na superfície da Terra ($r = R_T$), a energia cinética é igual a zero:

$$E_1 = K_1 + U_1 = 0 + \left(-\frac{Gm_Tm}{R_T}\right)$$

$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})(1000\ \text{kg})}{6.38 \times 10^6\ \text{m}}$$

$$= -6.25 \times 10^{10}\ \text{J}$$

e portanto

$$W_{externo} = E_2 - E_1 = -2.99 \times 10^{10}\ \text{J} - (-6.25 \times 10^{10}\ \text{J})$$

$$= 3.26 \times 10^{10}\ \text{J}$$

c) Vimos na parte (b) do Exemplo 12.5 que, para um satélite escapar até o infinito, a energia mecânica total deve ser igual a zero. A energia mecânica total na órbita circular é $E_2 = +2.99 \times 10^{10}$ J. Para fazer essa energia crescer até zero, seria preciso realizar um trabalho igual a 2.99×10^{10} J. Essa energia extra poderia ser fornecida pelos motores de um foguete ligado ao satélite.

AVALIAR Na parte (b) nós desprezamos a energia cinética inicial do satélite (que ainda estava na plataforma de lançamento) devido à rotação da Terra. Que diferença faz esse fator? (Veja o Exemplo 12.5.)

Teste sua compreensão da Seção 12.4 A sua espaçonave particular está em uma altitude, em uma órbita circular ao redor da Terra. A resistência do ar nas regiões mais periféricas da atmosfera executa trabalho negativo sobre a espaçonave, fazendo com que o raio da órbita diminua um pouco. A velocidade da espaçonave (i) permanece a mesma, (ii) aumenta ou (iii) diminui? ∎

12.5 As leis de Kepler e o movimento de planetas

A palavra *planeta* deriva de um termo grego que significa "errante" e, na verdade, os planetas mudam constantemente de posição no céu em relação ao fundo das estrelas. Um dos maiores êxitos intelectuais dos séculos XVI e XVII foi a verificação de três fatos: a Terra também é um planeta, todos os planetas descrevem órbitas em torno do Sol e os movimentos aparentes dos planetas vistos da

Terra podem ser usados para uma determinação precisa de suas órbitas.

Nicolau Copérnico publicou em 1543, na Polônia, a primeira e a segunda conclusões acima mencionadas. A determinação das órbitas dos planetas foi realizada entre 1601 e 1619 pelo astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler, usando um conjunto volumoso de dados precisos sobre os movimentos aparentes compilados pelo seu preceptor o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe Por meio do método das tentativas, Kepler descobriu três leis empíricas que descrevem com precisão o movimento dos planetas.

1. **Cada planeta se move em uma órbita elíptica, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.**
2. **A linha que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais a intervalos de tempo iguais.**
3. **O período de um planeta é proporcional à potência 3/2 do comprimento do eixo maior da elipse descrita pelo respectivo planeta.**

Kepler não sabia *por que* os planetas se moviam desse modo. Três gerações mais tarde, quando Newton estudava o movimento dos planetas, descobriu que todas as leis de Kepler poderiam *ser deduzidas*; elas decorrem das leis do movimento de Newton e da lei da gravitação. Vamos examinar separadamente cada uma das leis de Kepler

Primeira lei de Kepler

Inicialmente, vamos considerar a órbita elíptica mencionada na primeira lei de Kepler. A Figura 12.19 mostra a geometria de uma elipse. A dimensão maior corresponde ao *eixo maior*, e a é a metade do comprimento do eixo maior esse comprimento é o **semi-eixo maior**. A soma das distâncias de S até P e de S' até P é a mesma para todos os pontos sobre a curva. Os pontos S e S' são os *focos*. O Sol está no ponto S e o planeta, no ponto P; consideramos esses astros pontos porque suas dimensões são muito menores do que a distância entre eles. Não existe nada no outro foco S'.

A distância de cada foco até o centro da elipse é igual a ea, onde e é um número sem dimensões entre 0 e 1 denominado **excentricidade**. Quando $e = 0$, a elipse é uma circunferência. As órbitas reais dos planetas são aproximadamente circulares, suas excentricidades variam de 0,007 para Vênus a 0,206 para Mercúrio (a excentricidade da Terra é $e = 0,017$). O *periélio* corresponde ao ponto mais próximo do Sol na órbita do planeta e o *afélio* corresponde ao ponto mais afastado do Sol na órbita do planeta.

Newton verificou que, quando uma força proporcional a $1/r^2$ atua sobre um corpo, as únicas órbitas fechadas possíveis são a elipse e a circunferência. ele também mostrou que órbitas abertas (trajetórias (6) e (7) na Figura 12.14) devem ser parábolas ou hipérboles. Esses resultados podem ser obtidos de forma direta usando-se as leis do movimento de Newton e a lei da gravitação, juntamente com algumas equações diferenciais que você ainda não está preparado para resolver

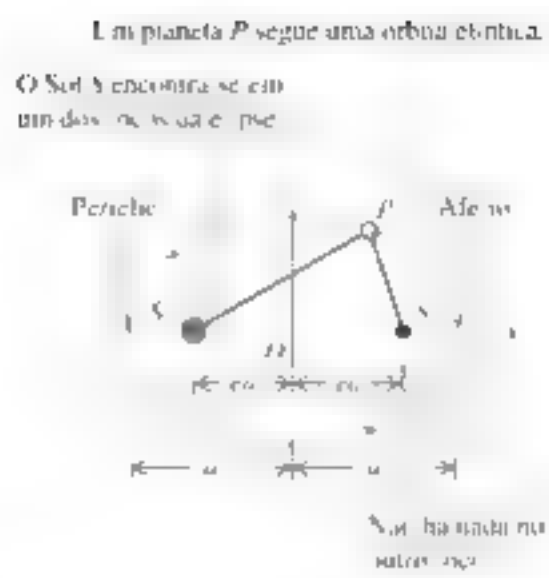


Figura 12.19 Geometria da elipse. A soma da distância SP com a distância $S'P$ permanece constante para todos os pontos da curva. As dimensões do Sol (S) e do planeta (P) estão ampliadas exageradamente para maior clareza.

Segunda lei de Kepler

A segunda lei de Kepler é mostrada na Figura 12.20. Em um pequeno intervalo de tempo dt, a linha que liga o Sol ao planeta descreve um ângulo $d\theta$. A área varrida é dada pelo triângulo sombreado de altura r, base $r\,d\theta$ e área $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$. A taxa com a qual essa área é varrida, dA/dt, denomina-se *velocidade setorial*

$$dA = \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta \qquad (12.14)$$

A essência da segunda lei de Kepler consiste em dizer que a velocidade setorial permanece constante qualquer que seja o ponto da órbita. Quando o planeta está próximo do Sol, r é pequeno e $d\theta/dt$ possui valor grande; quando o planeta está longe do Sol, r é grande e $d\theta/dt$ possui valor pequeno.

Para ver como a segunda lei de Kepler é deduzida a partir das leis de Newton, escrevemos dA/dt em termos da velocidade do planeta P. O componente de perpendicular à linha radial é dado por $= v$ sen ϕ. Pela Figura 12.20b, o deslocamento ao longo da direção de $v_\perp$ durante um intervalo de tempo dt é $r\,d\theta$. de modo que obtemos $v_\perp = r\,d\theta/dt$. Substituindo essa relação na Equação (12.14), achamos

$$v_\perp = r\,d\theta/dt \qquad (12.15)$$

Agora rv sen ϕ é o módulo do produto vetorial $\vec{r} \times \vec{v}$, que, por sua vez, é igual a $1/m$ vezes o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ do planeta em relação ao Sol. Assim, obtemos

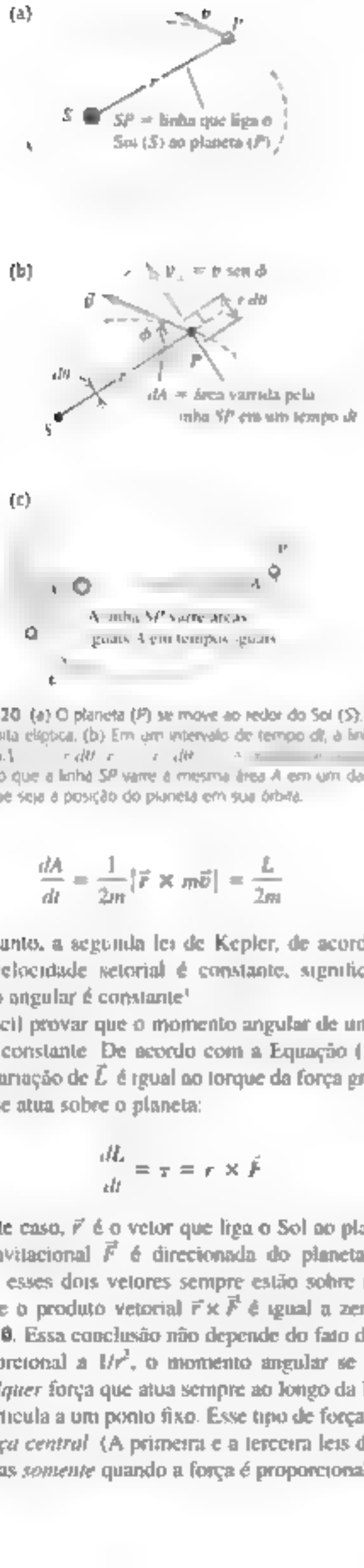

(a)
S
SP = linha que liga o Sol (S) ao planeta (P)
(b)
$v_\perp = v \operatorname{sen} \phi$
$r\,d\theta$
ϕ
P
dA = área varrida pela linha SP em um tempo dt
(c)
A linha SP varre áreas iguais A em tempos iguais

Figura 12.20 (a) O planeta (*P*) se move ao redor do Sol (*S*), descrevendo uma órbita elíptica. (b) Em um intervalo de tempo *dt*, a linha *SP* varre [illegible] de tal modo que a linha *SP* varre a mesma área *A* em um dado tempo *t* qualquer que seja a posição do planeta em sua órbita.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{L}{2m} \qquad (12.16)$$

Portanto, a segunda lei de Kepler, de acordo com a qual a velocidade setorial é constante, significa que o momento angular é constante!

É fácil provar que o momento angular de um planeta *deve* ser constante. De acordo com a Equação (10.26), a taxa de variação de $\vec{L}$ é igual ao torque da força gravitacional $\vec{F}$ que atua sobre o planeta:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \tau = r \times \vec{F}$$

Neste caso, $\vec{r}$ é o vetor que liga o Sol ao planeta, e a força gravitacional $\vec{F}$ é direcionada do planeta ao Sol. Portanto, esses dois vetores sempre estão sobre a mesma direção, e o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{F}$ é igual a zero. Logo, $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$. Essa conclusão não depende do fato de a força ser proporcional a $1/r^2$, o momento angular se conserva para *qualquer* força que atua sempre ao longo da linha que liga a partícula a um ponto fixo. Esse tipo de força denomina-se *força central*. (A primeira e a terceira leis de Kepler são válidas *somente* quando a força é proporcional a $1/r^2$).

A conservação do momento angular também explica por que a órbita deve estar contida em um plano. O vetor $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$; como $\vec{L}$ é um vetor constante em módulo e direção, concluímos que $\vec{r}$ e $\vec{v}$ devem sempre estar sobre um mesmo plano, que é justamente o plano da órbita do planeta.

Terceira lei de Kepler

Já deduzimos a terceira lei de Kepler para o caso particular de órbitas circulares. A Equação (12.12) mostra que o período de um satélite ou planeta é igual à potência 3/2 do raio da órbita. Newton mostrou que essa mesma relação também vale no caso de uma órbita *elíptica*, substituindo-se o raio da órbita *r* pelo semi-eixo *a*.

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{Gm_S}}$$

(órbita elíptica em torno do Sol) (12.17)

Uma vez que o planeta descreve a órbita em torno do Sol, e não em torno da Terra, substituímos a massa da Terra m_E na Equação (12.12) pela massa do Sol m_S. Note que o período não depende da excentricidade *e*. Um asteróide em uma órbita elíptica alongada com um semi-eixo maior *a* terá o mesmo período orbital que um planeta que descreva uma órbita circular com raio *a*. A diferença principal é que o asteróide se move com velocidades diversas em diferentes pontos da órbita elíptica (Figura 12.20c), enquanto a velocidade do planeta se mantém constante ao longo da órbita circular.

Exemplo Conceitual 12.7

VELOCIDADES ORBITAIS Em que ponto de uma órbita elíptica (Figura 12.19) um planeta apresenta a maior velocidade?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR A energia mecânica se conserva enquanto o planeta se move ao redor da órbita. A energia cinética do planeta $K = \frac{1}{2}mv^2$ é máxima quando a energia potencial $U = -Gm_Sm/r$ é mínima (isto é, o mais negativa possível. Veja a Figura 12.11), o que ocorre quando *r* é mínimo. Assim, a velocidade *v* é máxima no periélio.

A sua intuição a respeito de corpos que caem é útil aqui: Enquanto o planeta "cai" na direção do Sol, ele acelera, e sua velocidade é máxima quando ele está mais perto do Sol. Pelo mesmo raciocínio, o planeta desacelera quando se afasta do Sol e sua velocidade é mínima no afélio.

Exemplo Conceitual 12.8

TERCEIRA LEI DE KEPLER O asteróide Palas tem um período orbital de 4,62 anos e uma excentricidade orbital de 0,233. Encontre o semi-eixo maior de sua órbita.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. este exemplo usa a terceira lei de Kepler, que relaciona o período T com o semi-eixo maior a de um objeto como um asteroide) em órbita

PREPARAR usamos a Equação (12.17) para encontrar a a partir do valor dado de T. Note que não precisamos do valor da excentricidade

EXECUTAR pela Equação (12.17) $a^{3/2} = (\sqrt{Gm_S}T)/2\pi$. Para explicitar a, elevamos essa expressão à potência $2/3$:

$$a = \left(\frac{Gm_S T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Como $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg² e $m_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg (a massa do Sol conforme o Apêndice F) são dadas em unidades do SI, precisamos expressar o período T em segundos em vez de anos usando um fator de conversão que você pode encontrar no Apêndice E: $T = (4{,}62\text{ anos})(3{,}16 \times 10^7\text{ s/ano}) = 1{,}46 \times 10^8$ s. Usando esse valor encontramos $a = 4{,}15 \times 10^{11}$ m. (Substitua você mesmo os números para verificar.)

AVALIAR nosso resultado fica entre os semi-eixos maiores de Marte e Júpiter (veja o Apêndice F). Com efeito, a maioria dos asteroides conhecidos orbita em um "cinturão de asteroides" entre as órbitas desses dois planetas.

Como uma nota histórica, Palas só foi descoberto em 1803, quase dois séculos depois da publicação da terceira lei de Kepler. Embora Kepler tenha deduzido suas três leis a partir dos movimentos dos cinco planetas (além da Terra) conhecidos em seu tempo, essas leis se mostraram aplicáveis a todos os planetas, asteroides e cometas que posteriormente se descobriu orbitarem ao redor do Sol.

Exemplo 12.8

O COMETA HALLEY Esse cometa se move em uma órbita alongada ao redor do Sol (Figura 12.21). No periélio, a distância entre o cometa Halley e o Sol é igual a $8{,}75 \times 10^{10}$ km; no afélio, é igual a $5{,}26 \times 10^{12}$ km. Calcule o semi-eixo maior a, a excentricidade e e o período orbital.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. sabemos as distâncias do periélio e do afélio, e precisamos descobrir o semi-eixo maior a, a excentricidade e e o período orbital T (que está relacionado ao semi-eixo maior pela terceira lei de Kepler).

PREPARAR a Figura 12.19 nos mostra como encontrar a e e a partir das distâncias do periélio e do afélio. Assim que soubermos o valor de a, podemos encontrar o período orbital usando a Equação (12.17).

EXECUTAR vemos na Figura 12.19 que o comprimento do eixo maior é igual à soma da distância entre o cometa e o Sol no periélio e a distância entre o cometa e o Sol no afélio. O comprimento do eixo maior é $2a$; portanto

$$a = \frac{8{,}75 \times 10^{10}\text{ km} + 5{,}26 \times 10^{12}\text{ km}}{2} = 2{,}67 \times 10^{9}\text{ km}$$

Observando mais detalhadamente a Figura 12.19, vemos que a distância entre o cometa e o Sol no periélio é

$$a - ae = a(1 - e)$$

Como sabemos que a distância é $8{,}75 \times 10^{10}$ km, a excentricidade é

$$e = 1 - \frac{8{,}75 \times 10^{10}\text{ km}}{a} = 1 - \frac{8{,}75 \times 10^{10}\text{ km}}{2{,}67 \times 10^{9}\text{ km}} = 0{,}967$$

(a)

(b)

Figura 12.21 (a) A órbita do cometa Halley. (b) Imagem do cometa Halley quando ele apareceu em 1986. No centro do cometa encontra-se a enorme bola de gelo chamada núcleo que possui 16 km de comprimento e 8 km de largura. À medida que o cometa se aproxima do Sol, o calor do Sol faz com que parte do gelo evapore. O material evaporado constitui a cauda, que pode se prolongar até uma distância de dezenas de milhões de quilômetros.

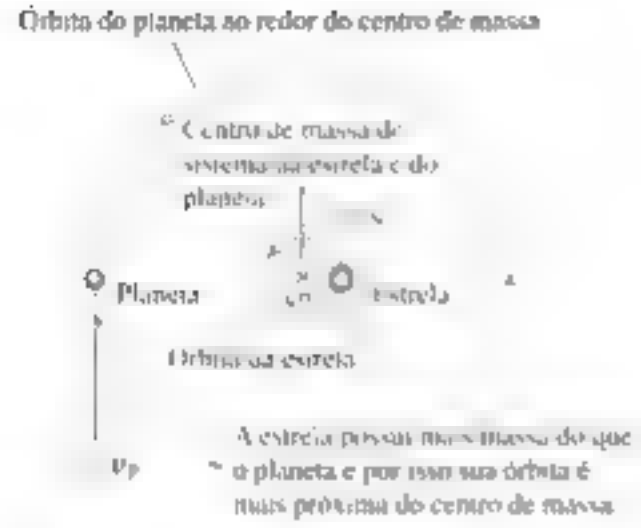

Órbita do planeta ao redor do centro de massa
Centro de massa do sistema estrela e do planeta
Planeta
Estrela
Órbita da estrela
A estrela possui mais massa do que o planeta e por isso sua órbita é mais próxima do centro de massa
O planeta e a estrela estão sempre em lados opostos em relação ao centro de massa.

Figura 12.22 Uma estrela e seu planeta orbitam ao redor de seu centro de massa comum

O período pode ser obtido usando-se a Equação (12.17)

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_S}} = \frac{2\pi(2{,}67 \times 10^{12}\ \text{m})^{3/2}}{\sqrt{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1{,}99 \times 10^{30}\ \text{kg})}}$$
$$= 2{,}38 \times 10^{9}\ \text{s} = 75{,}5\ \text{anos}$$

AVALIAR: A excentricidade é muito próxima de 1, portanto a órbita do cometa é muito alongada (veja a Figura 12.21a). O cometa Halley atingiu o periélio em 1986. A próxima vez que ele atingirá o periélio será em 2061.

Movimentos planetários e o centro de massa

Havíamos suposto que, quando um planeta ou um cometa descreve uma órbita em torno do Sol, o Sol permanece absolutamente estacionário. Obviamente isso não é correto; como o Sol exerce uma força gravitacional sobre o planeta, o planeta exerce uma força gravitacional sobre o Sol de mesmo módulo e direção. Na realidade, o *Sol* e o *planeta* descrevem uma órbita em torno do centro de massa comum (Figura 12.22). Ao desprezarmos esse efeito, no entanto, cometemos apenas um pequeno erro, porque a massa do Sol é aproximadamente 750 vezes maior do que a soma das massas de todos os planetas, de modo que o centro de massa do sistema solar não está muito afastado do centro do Sol. É interessante observar que os astrônomos utilizam esse efeito para detectar a presença de planetas orbitando ao redor de outras estrelas. Telescópios sensíveis são capazes de detectar a 'oscilação' aparente de uma estrela ao orbitar ao redor do centro comum de massa de uma estrela e de um planeta não visível que a acompanha. (Os planetas não são suficientemente iluminados para serem observados diretamente.) Analisando essas 'oscilações', os astrônomos descobriram planetas orbitando ao redor de mais de cem outras estrelas.

A análise de Newton do movimento dos planetas ainda é utilizada pelos astrônomos modernos. O resultado mais impressionante do trabalho de Newton é que as *mesmas* leis usadas para descrever o movimento de corpos na Terra podem ser usadas para descrever o movimento de todos os corpos do universo. Essa *síntese newtoniana*, como se costuma dizer, é um dos grandes princípios unificadores da ciência. Isso produziu efeitos profundos no modo como a humanidade passou a encarar o universo — não como uma realidade misteriosa e impenetrável, mas como uma extensão de nosso mundo cotidiano, acessível ao cálculo e ao estudo científico.

Teste sua compreensão da Seção 12.5 A órbita do Cometa X possui um semi-eixo quatro vezes maior do que o semi-eixo do Cometa Y. Qual é a razão entre o período orbital de X e o período orbital de Y? (i) 2, (ii) 4, (iii) 8, (iv) 16; (v) 32, (vi) 64. ∎

*12.6 Distribuição esférica de massa

Afirmamos sem demonstrar que a interação gravitacional entre dois corpos que possuem distribuições de massa com simetria esférica, para pontos externos das esferas, é igual à interação gravitacional entre duas partículas localizadas nos centros das respectivas esferas. Agora, estamos preparados para demonstrar essa afirmação. Newton passou vários anos em busca dessa demonstração e atrasou a publicação da lei da gravitação até conseguir encontrá-la.

Em vez de começar com dois corpos com simetria esférica, vamos estudar o problema mais simples da atração entre uma partícula de massa m interagindo com uma fina casca esférica de massa M. Mostraremos que, quando a massa m está fora da esfera, a *energia potencial* associada a esse sistema é a mesma obtida supondo-se que toda a massa M da esfera esteja concentrada em seu centro. Vimos na Seção 7.4 que a força é a derivada da energia potencial com o sinal negativo, de modo que a *força* sobre m também é a mesma obtida supondo-se que a massa M esteja concentrada no centro da esfera. Qualquer distribuição de massa com simetria esférica pode ser imaginada como se fosse constituída por uma superposição de muitas cascas esféricas concêntricas, o que significa que nosso resultado será válido para *qualquer* distribuição de massa M com simetria esférica.

Uma massa pontual no exterior de uma casca esférica

Começamos considerando um anel sobre a casca esférica (Figura 12.23a) centralizado sobre a reta que une m ao centro da casca. Escolhemos esse exemplo porque nele todas as partículas sobre o anel estão a uma mesma distância s da massa pontual m. Pela Equação (12.9), a energia

potencial gravitacional da interação entre a massa pontual m e a Terra (massa m_T) é dada por $U = -Gm_Tm/r$. Trocando-se a notação dessa relação, vemos que, na Figura 12.23a, a energia potencial gravitacional da interação entre a massa pontual m e uma partícula de massa m_i no interior do anel é dada por

$$U = \frac{Gmm_i}{s}$$

Para achar a energia potencial da interação entre m e o anel inteiro cuja massa é $dM = \sum m_i$, somamos a expressão anterior de U_i a todas as partículas que constituem o anel. Chamando essa energia potencial de dU, encontramos

$$dU = \sum U_i = \sum\left(\frac{Gmm_i}{s}\right) = \frac{Gm}{s}\sum m_i = -\frac{Gm\,dM}{s} \qquad (12.18)$$

Para prosseguir, precisamos conhecer a massa dM do anel. Podemos encontrá-la com o auxílio da geometria. O raio da casca esférica é igual a R; portanto, em termos do ângulo ϕ mostrado na figura, o raio do anel é dado por R sen ϕ, e sua circunferência possui comprimento $2\pi R$ sen ϕ. A largura do anel é $R\,d\phi$, e sua área é aproximadamente igual ao seu comprimento multiplicado pela sua largura:

$$dA = 2\pi R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

A razão entre a massa do anel dM e a massa total M da casca esférica é igual à razão entre a área dA do anel e a área total $A = 4\pi R^2$ da casca esférica:

$$\frac{dM}{M} = \frac{2\pi R \operatorname{sen}\phi\, d\phi}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\, d\phi \qquad (12.19)$$

Agora explicite dM da Equação (12.19) e substitua o resultado na Equação (12.18) para achar a energia potencial da interação entre a massa pontual m e o anel:

$$dU = \frac{GMm \operatorname{sen}\phi\, d\phi}{2s} \qquad (12.20)$$

A energia potencial total da interação entre a massa pontual m e a *casca esférica* é dada pela integral da Equação (12.20) sobre a esfera inteira quando ϕ varia de zero até π (e não de zero até 2π!) e s varia de $r - R$ até $r + R$. Para poder integrar, devemos escrever o integrando em termos de uma única variável; escolhemos s. Para expressar ϕ e $d\phi$ em função de s, é necessário usar a geometria. A Figura 12.23b mostra que s é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados são $(r - R\cos\phi)$ e R sen ϕ; então, o teorema de Pitágoras fornece

$$s^2 = (r - R\cos\phi)^2 + (R\operatorname{sen}\phi)^2$$
$$s^2 = r^2 - 2rR\cos\phi + R^2 \qquad (12.21)$$

Diferenciando os dois membros dessa relação:

$$2s\,ds = 2rR\operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

Dividindo por $2rR$ e substituindo o resultado na Equação (12.20), obtemos

$$dU = \frac{GMm}{2rR}\,s\,ds = \frac{GMm}{2rR}\,ds \qquad (12.22)$$

Podemos agora integrar a Equação (12.22) lembrando que s varia de $r - R$ a $r + R$.

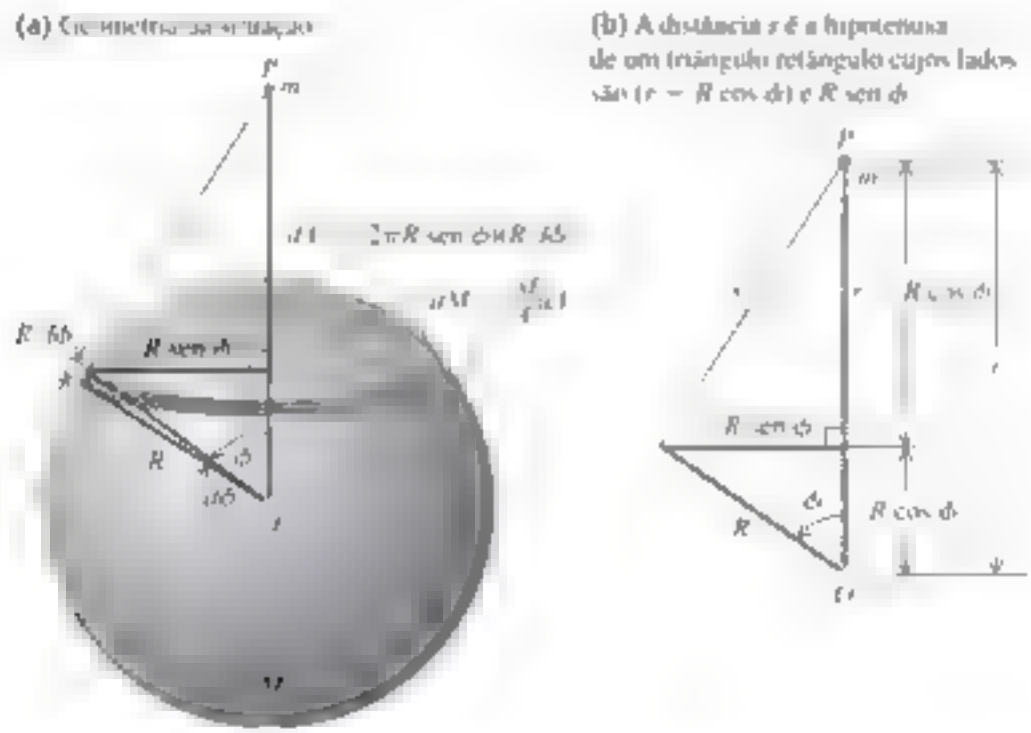

(a) Geometria da situação
(b) A distância s é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados são (r − R cos ϕ) e R sen ϕ
m
R sen ϕ
R dϕ
R
dϕ
R cos ϕ
s
r

Figura 12.23 Cálculo da energia potencial gravitacional da interação entre uma massa pontual m no exterior de uma casca esférica e um anel sobre a superfície da casca.

$$U = -\frac{GMm}{2rR}\int_{r-R}^{r+R} dx = -\frac{GMm}{2rR}[(r+R) - (r-R)] \quad (12.23)$$

Finalmente, temos

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad (12.24)$$

(massa m no exterior de uma casca esférica de massa M)

Isso é igual à energia potencial de duas massas pontuais m e M separadas por uma distância r. Portanto, provamos que a energia potencial de uma massa pontual m interagindo com uma casca esférica de massa M para qualquer distância r é a mesma obtida supondo-se uma interação entre duas massas pontuais. Como a força é dada por $F_r = -dU/dr$, o mesmo raciocínio também vale para a força.

A força gravitacional entre distribuições esféricas de massa

Qualquer distribuição de massa com simetria esférica pode ser imaginada como se fosse constituída por uma superposição de muitas cascas esféricas concêntricas. Aplicando o princípio da superposição das forças, concluímos que o que é verdade para uma camada é verdadeiro também para o conjunto inteiro das camadas. Portanto, provamos metade do que desejávamos demonstrar, ou seja, que a interação gravitacional entre uma massa pontual e uma distribuição de massa com simetria esférica é a mesma, como se toda a massa da distribuição de massa com simetria esférica estivesse concentrada no centro da esfera.

A outra metade a ser provada é que *duas* distribuições de massa com simetria esférica interagem como se ambas fossem pontos. Essa parte é mais fácil. Na Figura 12.23a, as forças de atração formam um par de ação e reação, e elas obedecem à terceira lei de Newton. Portanto, provamos também que a força exercida por *m sobre* a esfera de massa M é a mesma que se M estivesse concentrada em um ponto. Substituímos agora a massa m por uma distribuição de massa com simetria esférica centralizada no ponto onde se encontrava a massa m; a força gravitacional resultante sobre qualquer parte de M é a mesma que a mencionada anteriormente e, portanto, a força total também será a mesma. Isso completa a nossa demonstração.

*Massa pontual no interior de uma casca esférica

Havíamos considerado que a massa pontual m estivesse no exterior da casca esférica, portanto nossa demonstração só vale quando a massa m se encontra no exterior de uma distribuição de massa com simetria esférica. Quando a massa pontual m se encontra no *interior* da casca esférica, a geometria é indicada na Figura 12.24. A análise inteira segue os mesmos passos da dedução anterior; continuam

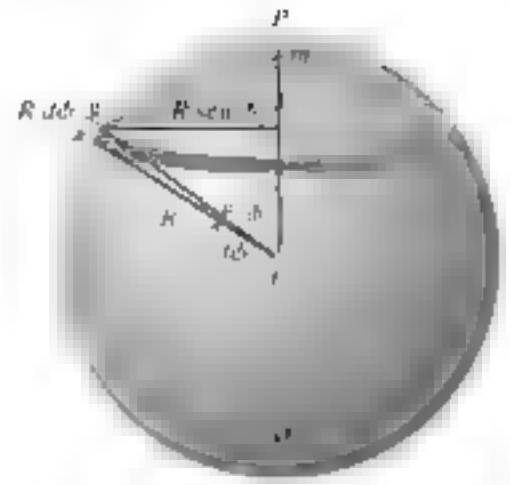


Figura 12.24 Quando uma massa pontual m está no interior de uma casca esférica de massa M, a energia potencial é sempre a mesma qualquer que seja o ponto onde se encontra a massa pontual no interior da casca esférica. A força gravitacional mútua resultante é igual a zero.

válidas as relações desde a Equação (12.18) até a Equação (12.22). Na Equação (12.23), os limites de integração devem ser alterados; os novos limites são de $R - r$ até $R + r$. Obtemos

$$U = -\frac{GMm}{2rR}\int_{R-r}^{R+r} dx = -\frac{GMm}{2rR}[(R+r) - (R-r)] \quad (12.25)$$

e o resultado final é

$$U = -\frac{GMm}{R} \quad (12.26)$$

(massa m no interior de uma casca esférica de massa M)

Compare esse resultado com a Equação (12.24); em vez de termos no denominador a distância r entre m e o centro de M, temos R, o raio da casca esférica. Isso nos leva a concluir que U na Equação (12.26) não depende de r e, portanto, possui o mesmo valor no interior da casca esférica. Quando m se move no interior da esfera, nenhum trabalho é realizado sobre ela, de modo que a força que atua sobre a massa pontual m é igual a zero em qualquer ponto do interior da casca esférica.

Generalizando, em qualquer ponto no interior de uma distribuição de massa com simetria esférica (não necessariamente uma casca esférica), a uma distância r do centro, a força gravitacional sobre uma massa pontual m é a mesma força que seria produzida se removêssemos todas as massas situadas em pontos com distâncias ao centro maiores do que r e concentrássemos toda a massa da esfera restante no centro da esfera.

Exemplo 12.10

"VIAGEM AO CENTRO DA TERRA" Suponha que você faça um furo através de um diâmetro da Terra (massa m_T e raio R_T) e deixe cair um malote de correspondência (massa m) por ele. Deduza uma expressão da força gravitacional sobre o malote em função de sua distância r ao centro. Suponha que a densidade da Terra seja constante (isso não é um modelo realista, veja a Figura 12.9).

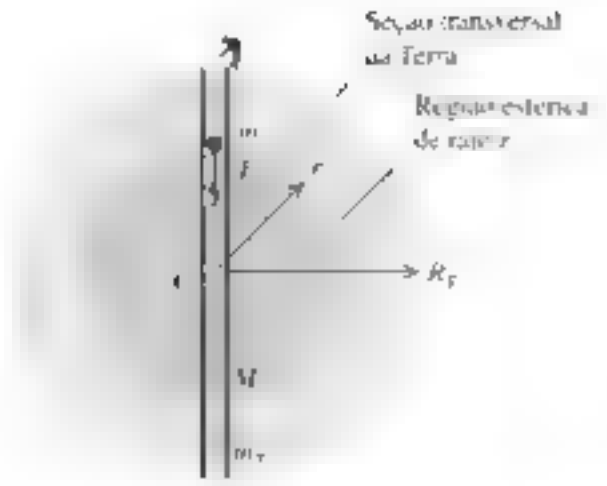


Figura 12.25 Um furo é feito através do centro da Terra (supostamente uniforme). Quando um objeto está a uma distância r do centro, somente a massa no interior de uma esfera de raio r exerce uma força gravitacional resultante sobre o objeto.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. como dissemos anteriormente, a força gravitacional a uma distância r do centro é determinada apenas pela massa M *dentro de uma região esférica de raio* r (Figura 12.25). A massa exterior ao raio não tem efeito sobre o malote.

PREPARAR. a força gravitacional resultante sobre o malote é a mesma que se toda a massa M dentro de um raio r estivesse concentrada no centro da Terra. A massa de uma esfera uniforme é proporcional ao volume da esfera, que é $\frac{4}{3}\pi r^3$ para a esfera de raio r e $\frac{4}{3}\pi R_T^3$ para a Terra inteira.

EXECUTAR. a razão entre a massa M da esfera de raio r e a massa da Terra, m_T, é

$$\frac{M}{m_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{r^3}{R_T^3} \quad \text{então} \quad M = m_T\frac{r^3}{R_T^3}$$

O módulo da força gravitacional resultante sobre m é dado por

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = \frac{Gm}{r^2}m_T\frac{r^3}{R_T^3} = \frac{Gm_Tm}{R_T^3}r$$

AVALIAR. para pontos no interior da esfera de densidade uniforme, F_g é *diretamente proporcional* à distância r ao centro da esfera, em vez de ser proporcional a $1/r^2$ para pontos no exterior da esfera. Diretamente sobre a superfície, onde $r = R_T$, a expressão anterior fornece $F_g = Gm_Tm/R_T^2$, como esperado. No próximo capítulo aprenderemos como calcular o tempo que o malote levaria para emergir do lado oposto da Terra, sob a hipótese da densidade constante.

Teste sua compreensão da Seção 12.6 No clássico livro de ficção científica de 1913, *Tarzan no Centro da Terra*, de Edgar Rice Burroughs, exploradores descobrem que a Terra é uma esfera oca e que existe uma civilização morando dentro dela. Seria possível ficar em pé e caminhar sobre a superfície interna de um planeta oco e sem rotação? ▮

*12.7 Peso aparente e rotação da Terra

Como a Terra gira em torno do seu eixo, não podemos considerá-la precisamente um sistema de referência inercial. Por essa razão, o peso aparente de um corpo sobre a Terra não exatamente igual à força de atração gravitacional que a Terra exerce sobre o corpo, a qual chamamos de **peso real** $\vec{p}_0$ do corpo. A Figura 12.26 exibe um corte da Terra, mostrando três observadores. Cada observador segura uma balança de mola com um corpo de massa m pendurado em cada uma. Cada balança exerce uma tensão $\vec{F}$ sobre o corpo que nela está pendurado, e a leitura da balança fornece o módulo F dessa força. Caso os observadores não tivessem consciência do movimento da Terra, cada um deles *pensaria* que a leitura da escala da balança seria igual ao peso do corpo, porque pensa que o corpo está em equilíbrio na balança. Sendo assim, cada observador pensa que a tensão $\vec{F}$ deve ser igual e oposta à força $\vec{p}_0$, que chamamos de **peso aparente**. Entretanto, como os corpos estão girando com a Terra, eles *não* estão em equilíbrio. Nossa tarefa consiste em encontrar a relação entre o peso aparente $\vec{p}$ e o peso real $\vec{p}_0$.

Supondo-se que a Terra seja esfericamente simétrica, então o peso aparente possui módulo Gm_Tm/R_T^2, onde m_T e R_T são a massa e o raio da Terra. Esse valor é o mesmo para todos os pontos da superfície terrestre. Caso o centro da Terra seja a origem de um sistema inercial, então um corpo no Pólo Norte realmente *está* em equilíbrio em um sistema inercial, e a leitura da balança do observador é igual a p_0. No entanto, um corpo no equador terrestre se move em um círculo de raio R_T com velocidade v, e deverá haver uma força resultante para dentro igual à massa vezes a aceleração centrípeta.

$$p = F = \frac{mv^2}{R_T}$$

Portanto, o módulo do peso aparente (igual ao módulo F) é dado por

$$p = p_0 - \frac{mv^2}{R_T} \quad \text{(no equador)} \tag{12.27}$$

Se a Terra não estivesse girando, quando um corpo fosse libertado ele teria uma aceleração em queda livre dada por $g_0 = p_0/m$. Visto que a Terra *está* girando, a aceleração real do corpo que cai em relação a um observador no equador é $g = p/m$. Dividindo a Equação (12.27) por m e usando essas relações, encontramos

$$g = g_0 - \frac{v^2}{R_T} \quad \text{(no equador)}$$

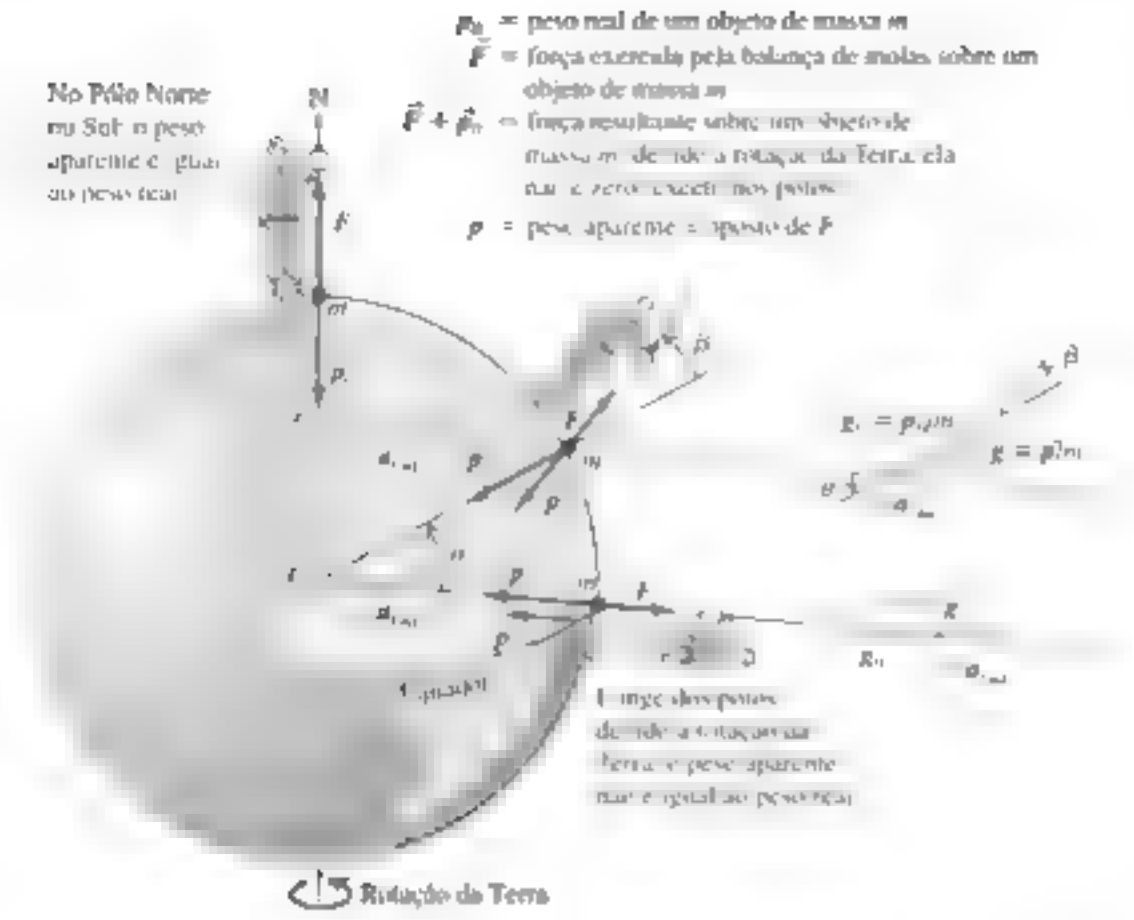

$\vec{p}_0$ = peso real de um objeto de massa m
$\vec{F}$ = força exercida pela balança de molas sobre um objeto de massa m
$\vec{F} + \vec{p}_0$ = força resultante sobre um objeto de massa m devido à rotação da Terra; ela é zero exceto nos pólos
p = peso aparente = módulo de $\vec{F}$
No Pólo Norte ou Sul o peso aparente é igual ao peso real
Rotação da Terra

Figura 12.26 Em pontos próximos aos pólos as leituras das escalas (o *peso aparente*) são menores do que a força de atração gravitacional sobre o objeto (o *peso real*). Isso acontece porque é preciso haver uma força resultante [illegible] diferença entre [illegible]. Para [illegible] é igual ao módulo do peso real do peso aparente.

Para calcular v^2/R_T, notamos que um ponto sobre o equador leva 86.164 s para percorrer uma distância igual ao comprimento da circunferência da Terra, $2\pi R_T = 2\pi (6{,}38 \times 10^6\ \text{m})$. (O dia solar, 86.400 s, é $\frac{1}{365}$ vezes maior do que esse valor, porque em um dia a Terra percorre uma fração de da sua órbita em torno do Sol.) Portanto, achamos

$$v = \frac{2\pi(6{,}38 \times 10^6\ \text{m})}{86\,164\ \text{s}} = 465\ \text{m/s}$$

$$\frac{v^2}{R_T} = \frac{(465\ \text{m/s})^2}{6{,}38 \times 10^6\ \text{m}} = 0{,}0339\ \text{m/s}^2$$

Logo, considerando a Terra esfericamente simétrica, a aceleração da gravidade no equador é cerca de 0,03 m/s² menor do que a aceleração da gravidade nos pólos.

Nos locais intermediários entre o equador e os pólos, o peso real $\vec{p}_0$ e a força centrípeta não estão ao longo da mesma direção, e devemos escrever uma equação vetorial correspondente à Equação (12.27). Pela Figura 12.26, vemos que a equação apropriada é

$$\vec{p} = \vec{p}_0 - m\vec{a}_{rad} = m\vec{g}_0 - m\vec{a}_{rad} \qquad (12.28)$$

A diferença entre os módulos g e g_0 está compreendida entre zero e 0,0339 m/s². Como indicado na Figura 12.26, existe um pequeno ângulo β, da ordem de 0,1° ou menos, entre a *direção* do vetor peso aparente e a direção que liga o ponto ao centro da Terra.

A Tabela 12.1 fornece valores de g em diversos locais, mostrando variações com a latitude. Existem também pequenas variações adicionais provocadas pelas distorções da simetria esférica da Terra, variações locais de densidade e diferenças de altitude.

Tabela 12.1 Variações de g com a Latitude e a Altitude

Local	Latitude Norte	Altitude (m)	g(m/s²)
Zona do Canal	9°	0	9,78243
Jamaica	18°	0	9,78591
Bermuda	32°	0	9,79806
Denver, Co	40°	1638	9,79680
Pittsburgh, PA	40,5°	235	9,80118
Cambridge, MA	42°	0	9,80398
Groenlândia	70°	0	9,82534

Peso aparente e falta de peso aparente

Nossa discussão sobre o peso aparente também pode ser aplicada ao fenômeno da aparente perda de peso em satélites e outros sistemas que permanecem em órbita, descritos na Seção 12.4. Um corpo no interior de uma espaçonave em órbita possui peso; a atração gravitacional da Terra continua a agir sobre o corpo da mesma forma que agia quando ele estava na superfície terrestre. O peso aparente de um corpo no interior de uma espaçonave em órbita é novamente dado pela Equação (12.28):

$$\vec{p} = \vec{p}_0 - m\vec{a}_{rad} = m\vec{g}_0 - m\vec{a}_{rad}$$

No entanto, para uma espaçonave em órbita, assim como para qualquer astronauta no interior dela, a aceleração radial para o centro da Terra é igual ao valor da aceleração

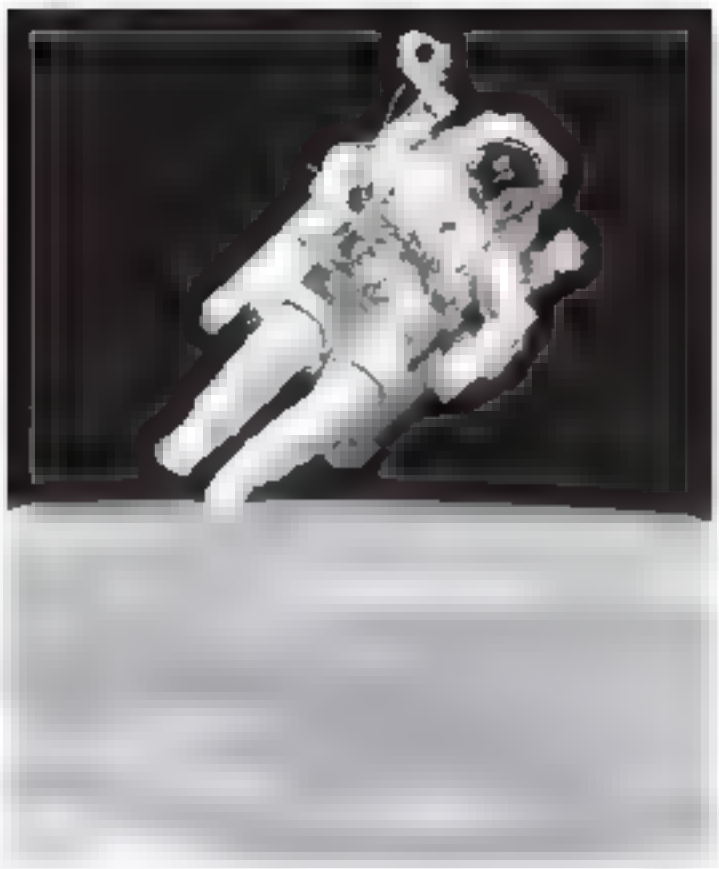


Figura 12.27 Este astronauta encontra-se em órbita em torno da Terra. Embora ele esteja sujeito à força gravitacional da Terra, seu peso aparente é zero porque a espaçonave e o astronauta estão em queda livre com a mesma aceleração, que é igual a g.

da gravidade no local em que a espaçonave se encontra. Logo,

$$R_0 = \vec{w}_{ast}$$

e o peso aparente é

$$p' = 0$$

Isso é o que queremos dizer quando falamos que um astronauta ou qualquer outro corpo no interior de uma espaçonave em órbita possui peso aparente igual a zero. Note que não fizemos nenhuma hipótese acerca da forma da órbita; conforme dissemos na Seção 12.4, um astronauta terá peso aparente igual a zero qualquer que seja a órbita (Figura 12.27).

Teste sua compreensão da Seção 12.7 Imagine um planeta que possua a mesma massa e raio que a Terra, mas complete dez rotações no mesmo tempo em que a Terra completa uma. Qual seria a diferença entre a aceleração da gravidade no equador do planeta e a aceleração da gravidade nos polos? (i) 0,00339 m/s²; (ii) 0,0339 m/s²; (iii) 0,339 m/s²; (iv) 3,39 m/s². ∎

12.8 Buraco negro

O conceito de buraco negro é um dos mais interessantes produtos da teoria da gravitação moderna, embora a ideia fundamental possa ser entendida com base nos princípios da mecânica newtoniana.

Velocidade de escape de uma estrela

Pense nas propriedades do nosso Sol. A sua massa $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg e o raio $R = 6{,}96 \times 10^{8}$ m são muito maiores do que os de qualquer planeta, em comparação com outras estrelas, contudo, o Sol não possui massa excepcionalmente grande. Você pode calcular a densidade média ρ do Sol como calculamos a densidade média da Terra na Seção 12.2:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1{,}99 \times 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi(6{,}96 \times 10^{8}\ \text{m})^3}$$
$$= 1410\ \text{kg/m}^3$$

A temperatura do Sol varia entre 5800 K (cerca de 5500 °C) na superfície e $1{,}5 \times 10^{7}$ K em seu interior, de modo que ele certamente não contém sólidos nem líquidos. Contudo, a atração gravitacional aglutina os átomos dos gases, fazendo com que o Sol tenha uma densidade 41% mais elevada do que a densidade da água, e cerca de 1200 vezes maior do que a densidade do ar que respiramos.

Pense agora na velocidade de escape de um corpo da superfície do Sol. No Exemplo 12.5 (Seção 12.3), verificamos que a velocidade de escape da superfície de um corpo esférico com massa M e raio R é dada por $v = \sqrt{2GM/R}$. Podemos expressar esse resultado em termos da densidade média. Substituindo $M = \rho V = \rho(\frac{4}{3}\pi R^3)$ na relação da velocidade de escape, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}R \qquad (12.29)$$

Usando qualquer uma das duas relações anteriores, você pode mostrar que a velocidade de escape de um corpo da superfície do Sol é dada por $v = 6{,}18 \times 10^{5}$ m/s (cerca de 2,2 milhões de km/h). Esse valor, igual a aproximadamente 1/500 da velocidade da luz, é independente da massa do corpo que escapa; depende apenas da massa e do raio (ou do raio e da densidade média) do Sol.

Considere agora diversas estrelas com a mesma densidade média ρ, mas com diferentes raios R. A Equação (12.29) mostra que, para um dado valor da densidade média ρ, a velocidade de escape v é diretamente proporcional a R. Em 1783, o Rev. John Mitchell, um astrônomo amador, notou que, se um corpo com a mesma densidade média do Sol tivesse um raio aproximadamente 500 vezes maior do que o raio do Sol, o módulo da velocidade de escape seria maior do que a velocidade da luz c. Com a afirmação de que "toda luz emitida por esse corpo seria atraída para seu interior", Mitchell tornou-se o primeiro homem a sugerir a existência do que hoje chamamos de **buraco negro** — um objeto que exerce força de atração gravitacional sobre outros corpos, mas que não pode emitir luz própria.

Buracos negros, raio de Schwarzschild e horizonte de eventos

A primeira expressão para a velocidade de escape indicada na Equação (12.29) sugere que o corpo de massa M pode se converter em um buraco negro caso seu raio R seja menor do que um certo raio crítico. Como determinar esse raio crítico? Talvez você pense que basta substituir v por c na Equação (12.29). Na realidade, esse procedimento fornece uma resposta correta, mas somente por causa de dois erros que se compensam. A energia cinética da luz *não* é dada por $mc^2/2$, e a energia potencial gravitacional nas vizinhanças de um buraco negro *não* é dada pela Equação (12.9). Em 1916, Karl Schwarzschild usou a teoria da relatividade geral de Einstein (em parte uma generalização e extensão da teoria newtoniana da gravitação) para deduzir uma expressão para o raio crítico R_s, atualmente chamado **de raio de Schwarzschild**. Verifica-se que o resultado é igual ao obtido quando substituímos $v = c$ na Equação (12.29), portanto $c = \sqrt{\dfrac{2GM}{R_s}}$. Explicitando o raio de Schwarzschild R_s, obtemos

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

(raio de Schwarzschild) (12.30)

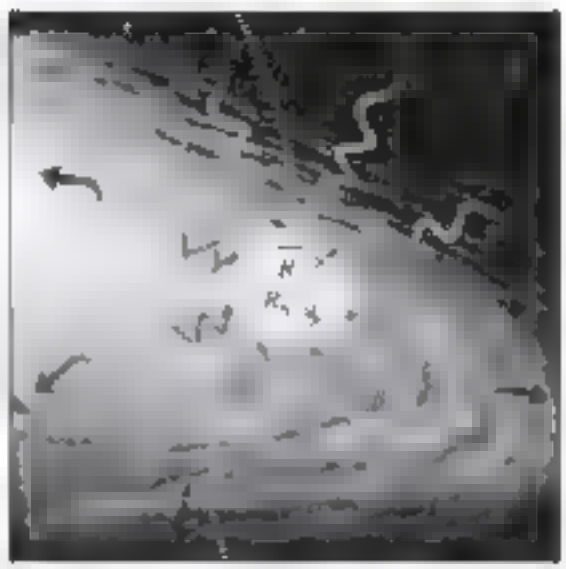
Quando um corpo esférico com massa M, que não está girando, possui um raio menor do que R_s, então *nada* (nem mesmo a luz) pode escapar da superfície do corpo, e o corpo é um buraco negro (Figura 12.28). Nesse caso, qualquer outro corpo situado até uma distância igual a R_s do centro dele é aprisionado por sua atração gravitacional, e não pode escapar.

A superfície da esfera de raio R_s que cerca o buraco negro denomina-se **horizonte de eventos** porque, uma vez que a luz não pode escapar de seu interior, não podemos ver nenhum evento que ocorre nessa esfera. Tudo o que um observador situado no exterior do horizonte de eventos pode conhecer a respeito de um buraco negro é a sua massa (em virtude dos efeitos gravitacionais produzidos sobre outros corpos), sua carga elétrica (em virtude das forças elétricas produzidas sobre outros corpos carregados) e seu momento angular (porque um buraco negro que gira tende a arrastar o espaço — e tudo o que existe nesse espaço em torno da sua fronteira). Todas as outras informações sobre o corpo são perdidas de modo irrecuperável quando ele cai em seu horizonte de eventos.

Exemplo 12.11

CÁLCULOS SOBRE BURACOS NEGROS A teoria astrofísica sugere que uma estrela que terminou de queimar todo o seu combustível pode entrar em colapso gravitacional e formar um buraco negro quando sua massa for três vezes menor do que a massa do Sol. Caso ela possua esse raio-limite, qual seria o seu horizonte de eventos?

(a) Quando o raio R de um corpo é maior do que o raio de Schwarzschild R_s, a luz pode escapar da superfície do corpo.



A gravidade provoca "desvios para o vermelho" da luz que sai do corpo, aumentando o seu comprimento de onda.

(b) Se toda a massa do corpo estiver dentro do raio R_s, esse corpo é um buraco negro. Nenhuma luz pode escapar dele.

Figura 12.28 (a) Um corpo de raio R maior do que o raio de Schwarzschild R_s. (b) Se o corpo passa a ter um raio menor do que R_s, ele é um buraco negro que possui uma velocidade de escape maior que a velocidade da luz. A superfície da esfera de raio R_s é chamada de horizonte de eventos do buraco negro.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o raio pedido corresponde ao raio de Schwarzschild.

PREPARAR: usamos a Equação (12.30) com um valor de $M = 3(1.99 \times 10^{30}\,\text{kg}) = 6.0 \times 10^{30}\,\text{kg}$.

EXECUTAR: da Equação (12.30),

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2(6.67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(6.0 \times 10^{30}\,\text{kg})}{(3.0 \times 10^8\,\text{m/s})^2}$$

$$= 8.9 \times 10^3\,\text{m} = 8.9\,\text{km}$$

AVALIAR: quando o raio desse corpo é exatamente igual ao raio de Schwarzschild, sua densidade média atinge o incrível valor de

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{6{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi (1{,}8 \times 10^{4}\ \text{m})^3} = 2{,}0 \times 10^{18}\ \text{kg/m}^3$$

Essa densidade é cerca de 10^{15} vezes maior do que a densidade dos corpos comuns na Terra, sendo comparável à densidade de núcleos atômicos. Na realidade, depois que o corpo se contrai até o raio R_S, nada pode impedir que haja um colapso posterior produzindo maior contração. Toda a matéria no interior do buraco negro é esmagada até atingir um ponto no seu centro denominado *singularidade*. Esse ponto possui volume igual a zero e, portanto, sua densidade é *infinita*.

Visita a um buraco negro

Em pontos muito distantes do buraco negro, o efeito gravitacional é igual ao produzido por qualquer corpo normal com a mesma massa. Caso o Sol sofresse um colapso e se transformasse em um buraco negro, as órbitas dos planetas não seriam afetadas. Porem, nas vizinhanças de um buraco negro os eventos ocorrem de forma drasticamente diferente. Caso você decidisse se tornar um mártir da ciência e pulasse para dentro de um buraco negro, quem estivesse o observando notaria diversos efeitos adversos à medida que você se aproximasse do horizonte de eventos, quase todos ligados à relatividade geral.

Se você levasse um transmissor de rádio para começar sua viagem, seria necessário sintonizar os sinais para frequências cada vez menores, um efeito chamado de *deslocamento para o vermelho gravitacional*. Devido a esse deslocamento, os relógios (eletrônicos ou biológicos) que estivessem com você pareceriam cada vez mais lentos, um efeito chamado *dilatação do tempo*. Na realidade, durante suas vidas seus observadores jamais veriam você chegar ao horizonte de eventos. No sistema de referência deles, você conseguiria atingir o horizonte de eventos em um intervalo de tempo muito curto, mas de uma forma bastante perturbadora. Quando você se aproximasse da superfície do buraco negro, a força gravitacional sobre os seus pés seria maior do que a força sobre sua cabeça, que estaria ligeiramente mais afastada do centro do buraco. As *diferenças* entre as forças gravitacionais ao longo do seu corpo seriam suficientemente elevadas a ponto de achatar seu corpo comprimindo-o em direção ao buraco negro. Esses efeitos (chamados de *forças de maré*) fariam você se estilhaçar em um grupo de átomos, e a seguir fariam esses átomos se estilhaçarem antes que você chegasse ao horizonte de eventos.

Detectando um buraco negro

Considerando o fato de um buraco negro não permitir que a luz escape dele e o de possuir um raio tão pequeno quanto o indicado no Exemplo 12.11, como podemos verificar se esse corpo existe no espaço? Isso é possível porque poeiras e gases existentes nas vizinhanças do

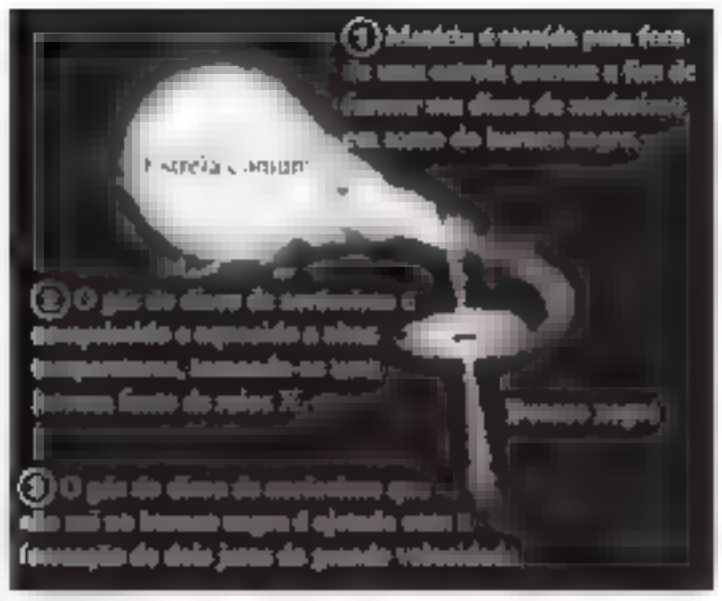

1 Matéria é ejetada para fora de uma estrela comum a fim de formar um disco de acréscimo em torno de buraco negro.
Estrela comum
2 O gás do disco de acréscimo é comprimido e aquecido a altas temperaturas, formando um forte raio X.
Buraco negro
3 O gás do disco de acréscimo que não cai no buraco negro é ejetado com a formação de dois jatos de grande velocidade.

Figura 12.29 [illegible] buraco negro em si não pode [illegible] se acréscimo podem ser detectados.

buraco negro são agrupados formando um *disco de acréscimo* que gira formando uma espiral em torno do buraco negro, de modo semelhante a um redemoinho (Figura 12.29). O atrito entre as partes do material que constitui o disco de acréscimo produz uma perda de energia mecânica, fazendo o material cair dentro do buraco negro e formando uma espiral, à medida que o disco se move e se sofre uma compressão. Isso produz um aquecimento do material, tal como o aquecimento do ar comprimido no interior de uma bomba que você usa para encher o pneu de uma bicicleta. Temperaturas da ordem de 10^6 K podem ocorrer no interior de um disco de acréscimo, de modo que o disco não emite luz visível (como no caso de um corpo "quente vermelho" ou um corpo "quente branco") mas sim raios X. Os astrônomos procuram esses raios X (emitidos *antes* do disco de acréscimo cruzar o horizonte de eventos) para sinalizar a presença de um buraco negro. Diversos candidatos promissores já foram encontrados, e os astrônomos contemporâneos acreditam firmemente na existência de buracos negros.

Um buraco negro em uma estrela binária como o sistema retratado na Figura 12.29 possui massas algumas vezes maior do que a massa do Sol. Há também numerosos indícios da existência de *buracos negros com supermassas*. Acredita-se que um exemplo desses buracos negros ocorra no centro de nossa Via Láctea, a cerca de 26000 anos-luz da Terra na direção da constelação de Sagitário. Imagens de alta resolução do centro da galáxia mostram estrelas se movendo em velocidades maiores do que 1500 km/s perto de um objeto invisível localizado na posição de uma fonte de ondas de rádio chamada Sgr A* (Figura 12.30).

Analisando esses movimentos, os astrônomos podem deduzir o período T e o semi-eixo maior a da órbita de cada estrela. A massa do objeto invisível pode ser calculada por meio da terceira lei de Kepler na forma dada na Equação (12.17), substituindo a massa do Sol, m_S, por m_X

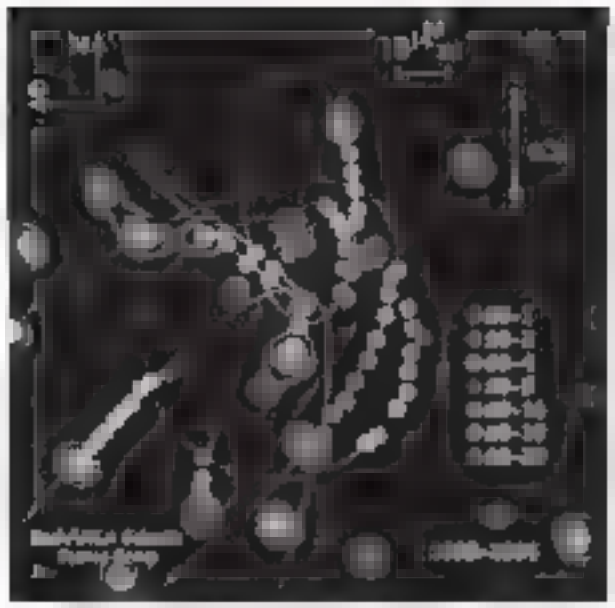


Figura 12.30 [illegible] pelo [illegible] (10 vezes a distância da Terra ao Sol) [illegible]

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{Gm_x}} \quad \text{logo} \quad m_x = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

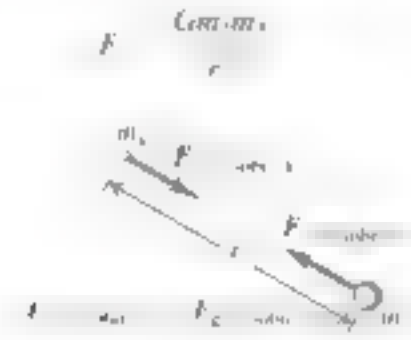
A conclusão extraída desse cálculo é que o misterioso objeto negro no centro da galáxia possui uma massa de $7{,}3 \times 10^{36}$ kg, ou seja, 3,7 *milhões* de vezes a massa do Sol. Apesar disso, observações com radiotelescópios mostram que ele possui um raio de não mais do que cerca de 1/[illegible] comparável à distância da Terra ao Sol. Essas observações sugerem que esse objeto de massa elevada, compacto, é um buraco negro com um raio de Schwarzschild de $1{,}1 \times 10^{10}$ m. Os astrônomos esperam aperfeiçoar a resolução de suas observações de modo a poderem realmente ver o horizonte de eventos desse buraco negro.

Outras linhas de pesquisa sugerem que haveria buracos negros ainda maiores, de massa 10^9 vezes maior do que a do Sol, nos centros de outras galáxias. Os estudos observacionais e teóricos de buracos negros de todos os tamanhos continuam sendo uma área fascinante de pesquisas, tanto na física quanto na astronomia.

Teste sua compreensão da Seção 12.8 Se o Sol sofrer um colapso e formar um buraco negro, que efeito esse acontecimento teria sobre a órbita da Terra? (i) a órbita encolheria; (ii) a órbita se expandiria; (iii) a órbita permaneceria do mesmo tamanho. ∎

Resumo

Lei da gravitação de Newton: *Quaisquer* dois corpos de massa m_1 e m_2, separados por uma distância r, são mutuamente atraídos por forças inversamente proporcionais a r^2. Essas forças formam um par de ação e reação e obedecem à terceira lei de Newton. Quando dois ou mais corpos exercem atrações gravitacionais sobre um corpo particular, a força gravitacional resultante sobre esse corpo é dada pela soma vetorial de todas as forças gravitacionais exercidas pelos outros corpos sobre o corpo em particular. A interação gravitacional entre dois corpos que possuem distribuições de massa com simetria esférica, tais como planetas ou estrelas, é a mesma que existiria se toda a massa dos corpos estivesse concentrada no centro de cada corpo. (Veja os exemplos 12.1–12.3 e 12.10.)



Força gravitacional, peso e energia potencial gravitacional. O peso p de um corpo é a força gravitacional resultante decorrente da ação de todas as forças gravitacionais exercidas pelos outros corpos do universo sobre o corpo considerado. Nas vizinhanças da superfície da Terra (massa m_T e raio R_T), o peso é basicamente dado pela força gravitacional da Terra. A energia potencial gravitacional U de dois corpos de massas m_1 e m_2 separados por uma distância r é inversamente proporcional a r. A energia potencial nunca é positiva, exceto igual a zero somente quando os dois corpos estão separados por uma distância infinita. (Veja os exemplos 12.4 e 12.5.)

$$p = F_g = \frac{Gm_1m}{R_1^2}$$

(peso na superfície da Terra) (12.3)

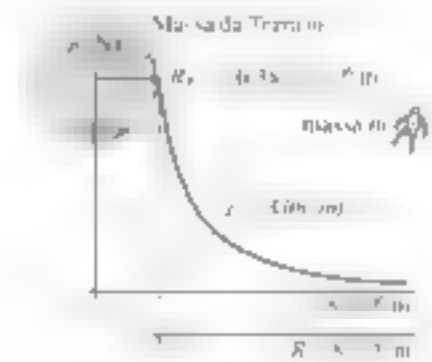
$$g = \frac{Gm_1}{R_1^2}$$

(12.4)

(aceleração da gravidade na superfície da Terra)

$$U = -\frac{Gm_1m}{r}$$

(12.9)



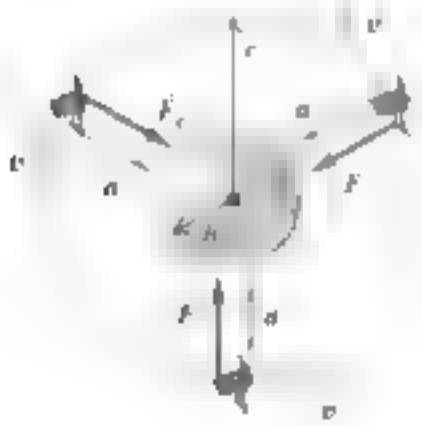
Órbitas: Quando um satélite se move ao longo de uma órbita circular, a aceleração centrípeta é fornecida pela atração gravitacional da Terra. As três leis de Kepler descrevem o caso mais geral: uma órbita elíptica de um planeta em torno do Sol ou um satélite em torno de seu planeta. (Veja os exemplos 12.6–12.9.)

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} \qquad (12.10)$$

(velocidade em uma órbita circular)

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_T}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_T}} \qquad (12.12)$$

(período em uma órbita circular)



Buracos negros. Caso uma distribuição de massa com simetria esférica, sem rotação e que apresente uma resultante M possua um raio menor do que o raio de Schwarzschild, R_s, tal corpo denomina-se buraco negro. A interação gravitacional impede o escape de qualquer tipo de matéria, incluindo a luz, do interior da esfera com raio R_s. (Veja o Exemplo 12.11.)

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \qquad (12.50)$$

(raio de Schwarzschild)

Se todo o corpo de massa M estiver dentro do raio de Schwarzschild, $R_s = 2GM/c^2$, esse corpo é um buraco negro.

Principais termos

lei da gravitação, 1
constante gravitacional, 2
energia potencial gravitacional, 8
velocidade de escape, 9
órbitas fechadas, 11
órbitas abertas, 11
semi-eixo maior, 14
excentricidade, 14
peso real, 20
peso aparente, 21
buraco negro, 22
raio de Schwarzschild, 23
horizonte de eventos, 23

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Quanto menor o raio orbital r de um satélite, maior a sua velocidade orbital v, conforme a Equação (12.10). Assim, uma partícula perto do lado interno dos anéis de Saturno possui uma velocidade maior do que uma partícula perto do lado externo dos anéis.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

12.1 **Resposta: (v)** Pela Equação (12.1), a força gravitacional do Sol (massa m_1) sobre um planeta (massa m_2) a uma distância r tem módulo $F_g = Gm_1m_2/r^2$. Comparado à Terra, Saturno possui um valor de r^2 que é 10^2 = cem vezes maior e um valor de m_2 que é também cem vezes maior. Portanto, a *força* que o Sol exerce sobre Saturno tem o mesmo módulo que a força exercida pelo Sol sobre a Terra. A *aceleração* de um planeta é igual à força resultante dividida pela massa do planeta; como Saturno possui cem vezes mais massa do que a Terra, a sua aceleração é 1/100 da aceleração da Terra.

12.2 **Resposta: (ii), (i), (iii), (iv)** Pela Equação (12.4), a aceleração da gravidade na superfície de um planeta de massa m_p e raio R_p é igual a $g_p = Gm_p/R_p^2$. Ou seja, g_p é diretamente proporcional à massa do planeta e inversamente proporcional ao quadrado de seu raio. Segue-se que, comparado ao valor de g na superfície da Terra, o valor de g_p em cada planeta é (i) $2/2^2$ = 1/2 do valor de g; (ii) $4/4^2$ = 1/4 do valor de g; (iii) $4/2^2$ = 1 vez o valor de g — ou seja, igual, e (iv) $2/4^2$ = 1/8 do valor de g.

12.3 **Resposta: sim.** Isso é possível porque a gravidade e a velocidade de escape na superfície dependem de diferentes formas da massa m_p e raio R_p do planeta. O valor de g na superfície é igual a Gm_p/R_p^2, enquanto a velocidade de escape é $\sqrt{2Gm_p/R_p}$. Para o planeta Saturno, por exemplo, m_p é cerca de cem vezes a massa da Terra e R_p é cerca de dez vezes o raio da Terra. O valor de g é diferente do que é na Terra por um fator $(100/(10)^2 = 1$ (isto é, é o mesmo que na Terra), enquanto a velocidade de escape é maior por um fator = 3,2. Lembre-se de que a gravidade na superfície revela as condições junto à superfície do planeta, enquanto a velocidade de escape (que lhe diz quão rápido é preciso viajar para escapar para o infinito) depende das condições em todos os pontos entre a superfície do planeta e o infinito. Tendo em vista que Saturno possui muito mais massa do que a Terra, os seus efeitos gravitacionais vão ser significativos em distâncias muito maiores, e sua velocidade de escape é maior.

12.4 **Resposta: (ii)** A Equação (12.10) mostra que, em uma órbita de raio menor, a espaçonave apresenta uma maior velocidade. O trabalho negativo realizado pela resistência do ar reduz a energia mecânica *total*, $E = K + U$; a energia cinética K aumenta (torna-se mais positiva), mas a energia potencial gravitacional U diminui (torna-se mais negativa) muito mais.

12.5 **Resposta: (iii)** A Equação (12.17) indica que o período orbital T é proporcional à potência 3/2 do semi-eixo maior a. Assim, o período orbital do Cometa X é maior do que o do Cometa Y por um fator de $4^{3/2} = 8$.

12.6 **Resposta: não.** Nossa análise mostra que existe uma força gravitacional de valor *zero* dentro de uma casca esférica oca. Dessa forma, os visitantes do interior de um planeta oco ficariam sem peso e não poderiam ficar em pé nem caminhar pela superfície interna do planeta.

12.7 **Resposta: (iv)** Ao analisar a Equação (12.27), vimos que a diferença entre a aceleração da gravidade no equador e nos pólos é v^2 / R_T. Como esse planeta possui o mesmo raio e, portanto, a mesma circunferência que a Terra, a velocidade em seu equador deve ser dez vezes a velocidade no equador da Terra. Logo, v^2 / R_T é 10^2 = cem vezes maior do que na Terra, ou 100 (0,0339 m/s^2) = 3,39 m/s^2. A aceleração da gravidade nos pólos é 9,80 m/s^2, enquanto no equador é drasticamente menor: 9,80 m/s^2 − 3,39 m/s^2 = 6,41 m/s^2. Pode-se demonstrar que, se esse planeta precisasse girar 17,0 vezes mais rápido do que a Terra, a aceleração da gravidade no equador seria *zero* e objetos soltos sairiam voando da superfície do equador!

12.8 **Resposta: (iii)** Se o Sol se transformasse em um buraco negro (o que, segundo o nosso conhecimento das estrelas, é impossível), ele teria a mesma massa, porém um raio muito menor. Como a atração gravitacional exercida pelo Sol sobre a Terra não depende do raio do Sol, a órbita da Terra não seria afetada.

Questões para discussão

Q12.1 Um estudante escreveu: "A única razão pela qual a maçã cai no sentido da Terra em vez de a Terra subir no sentido da maçã é que a massa da Terra é muito maior do que a massa da maçã e, portanto, ela exerce uma atração muito maior". Por favor, comente.

Q12.2 Um planeta executa uma órbita circular com período T ao redor de uma estrela. Se uma estrela com três vezes a massa da primeira estrela estivesse em órbita, à mesma distância, o novo período (em termos de T) seria (a) $3T$, (b) $T\sqrt{3}$, (c) T, (d) $T/\sqrt{3}$, ou (e) $T/3$?

Q12.3 Se todos os planetas tivessem a mesma densidade média, como a aceleração da gravidade na superfície de um planeta dependeria do seu raio?

Q12.4 Cem gramas de manteiga na Terra possuem a mesma quantidade de manteiga que cem gramas de manteiga em Marte? O que você diria sobre um quilograma de manteiga? Explique.

Q12.5 O Exemplo 12.2 (Seção 12.1) mostra que a aceleração de cada esfera produzida pela força gravitacional é inversamente proporcional à massa da respectiva esfera. Então, como você explica que qualquer corpo caindo nas vizinhanças da superfície terrestre possua a mesma aceleração da gravidade?

Q12.6 Quando a atração gravitacional entre você e o Sol é maior: ao meio-dia ou à meia-noite? Explique.

Q12.7 Visto que a Lua é constantemente atraída pela força gravitacional da Terra, por que ela não se choca contra a Terra?

Q12.8 Imagine que o Sol tivesse uma massa igual ao dobro da massa atual. Qual seria o efeito produzido sobre seu peso na Terra, medido quando você fica em pé sobre uma balança de mola? Explique sua resposta.

Q12.9 O Sol puxa a Lua com uma força duas vezes maior do que a força de atração entre a Terra e a Lua. Então, por que o Sol não afasta a Lua da Terra?

Q12.10 Conforme vimos no Capítulo 7 (*Física I*), a energia potencial gravitacional é dada por $U = mgy$, sendo positiva para um corpo de massa m acima da superfície terrestre ($y = 0$). Porém, neste capítulo, a energia potencial gravitacional é dada por $U = -Gm_1m/r$, que é *negativa* para um corpo de massa m acima da superfície terrestre ($r = R_T$). Como você pode conciliar essas duas descrições da energia potencial gravitacional aparentemente incompatíveis?

Q12.11 Um planeta se move com velocidade constante em uma órbita circular em torno de uma estrela. Em uma órbita completa, o trabalho total realizado pela força gravitacional da estrela sobre o planeta é positivo, negativo ou nulo? Qual seria a resposta a essa pergunta no caso de uma órbita elíptica ao longo da qual a velocidade não é constante? Explique suas respostas.

Q12.12 A velocidade de escape de um corpo depende da direção em que ele é lançado da superfície terrestre? Explique. Sua resposta depende do fato de incluir ou não o efeito da resistência do ar?

Q12.13 Quando um projétil é disparado verticalmente de baixo para cima da superfície terrestre, o que ocorreria se sua energia mecânica total (cinética mais potencial) fosse: a) menor do que zero? b) maior do que zero? (Em cada caso, despreze a resistência do ar e os efeitos gravitacionais do Sol, da Lua e dos outros planetas.)

Q12.14 Verifique se a afirmação seguinte é correta: "Na ausência da resistência do ar, a trajetória de um projétil nas vizinhanças da superfície terrestre é uma *elipse*, e não uma parábola".

Q12.15 A Terra está mais próxima do Sol em novembro do que em maio. Em qual desses meses a velocidade da Terra é maior? Explique.

Q12.16 Uma empresa de comunicações deseja colocar um satélite em órbita de modo que ele sempre sobrevoe a Terra ao longo do paralelo 45 (latitude norte de 45°). Ou seja, o plano da órbita não passa pelo centro da Terra. Essa órbita seria possível? Explique por quê.

Q12.17 Em qual ponto de uma órbita elíptica a aceleração é máxima? Em qual ponto ela é mínima? Justifique suas respostas.

Q12.18 Considere uma viagem da Terra até a Lua e a viagem de volta da Lua até a Terra. Em qual viagem o gasto de combustível é maior? Explique.

Q12.19 Como seria enunciada a terceira lei de Kepler na hipótese de uma órbita circular, caso a lei de Newton da gravitação fosse alterada de modo que a força fosse inversamente proporcional a r^3? Essa alteração modificaria as outras duas leis de Kepler? Explique.

Q12.20 Na órbita elíptica do cometa Ha ley, indicada na Figura 12.21a, a gravidade do Sol faz o cometa cair aproximando-se do Sol do afélio para o periélio. Porém, qual é o efeito responsável pelo afastamento do cometa do periélio até o afélio?

Q12.21 Muitas pessoas acreditam que astronautas em órbita não sentem seu peso porque estão "fora da atração terrestre". Qual deveria ser a distância entre uma espaçonave e a Terra para que ela realmente ficasse fora da influência do campo gravitacional da Terra? Caso a espaçonave ficasse realmente fora da atração terrestre, ela poderia permanecer em órbita? Explique. Qual é a verdadeira razão pela qual astronautas em órbita sentem como se estivessem sem peso?

Q12.22 Como parte do treinamento para poder permanecer em órbita, os astronautas pilotam um avião que voa ao longo de uma trajetória parabólica como um projétil em queda livre. Explique como a sensação existente nesse caso é a mesma que a experimentada em órbita quando o peso aparente é igual a zero.

Exercícios

Seção 12.1 Lei de Newton da gravitação

12.1 Calcule a razão da força de atração gravitacional entre o Sol e a Lua e a força entre a Terra e a Lua. (Suponha que a distância da Lua ao Sol seja aproximadamente a mesma distância da Terra ao Sol.) Use dados do Apêndice F. É mais preciso dizer que a Lua está em órbita ao redor da Terra ou que a Lua está em órbita ao redor do Sol?

12.2 **Experiência de Cavendish.** Para usar a balança de Cavendish mostrada na Figura 12.4, suponha que m_1 = 1,10 kg, m_2 = 25,0 kg e a haste que conecta os pares de m_1 possui 30,0 cm de comprimento. Se, em cada par, m_1 e m_2 estão a 12,0 cm de distância de centro a centro, encontre a) a força resultante e (b) o torque resultante (em relação ao eixo de rotação) na parte rotatória do aparelho. (c) Você acha que o torque na parte (b) seria suficiente para girar facilmente a haste? Sugira modos de aperfeiçoar a sensibilidade do experimento.

12.3 A que distância de uma pequena esfera de 100 kg uma partícula teria de ser colocada para que a esfera atraísse a partícula com a mesma força que a Terra? Esse experimento poderia ser efetivamente realizado? Por quê?

12.4 Duas esferas uniformes, cada uma com massa M e raio R, estão em contato. Qual é o módulo da força de atração gravitacional entre elas?

12.5 Uma nave espacial interplanetária passa em um ponto do espaço no qual a força de atração gravitacional da Terra sobre a nave cancela a força de atração gravitacional do Sol sobre a nave. a) Qual é a distância entre a nave e o centro da Terra? Use dados do Apêndice F. b) Assim que houver alcançado o ponto encontrado no item (a), a espaçonave poderia desligar seus motores e ficar parada lá indefinidamente? Explique.

12.6 a) Qual é o módulo, a direção e o sentido da força gravitacional resultante exercida pelas outras esferas sobre a esfera uniforme de 0,100 kg indicada na Figura 12.31? Os centros das três esferas estão sobre a mesma linha reta. b) De acordo com a terceira lei de Newton, a esfera de 0,100 kg exerce forças iguais e opostas com o mesmo módulo encontrado na parte (a) sobre cada uma das outras duas esferas?

Figura 12.31 Exercício 12.6

12.7 Um homem adulto típico possui massa igual a 70 kg. Qual é a força que a Lua cheia exerce sobre esse homem quando ela está diretamente sobre ele a uma distância de 378000 km? b) Compare essa força com a força exercida sobre o homem na Terra.

12.8 Uma massa pontual de 8,0 kg e outra massa pontual de 15,0 kg são mantidas fixas a 50,0 cm de distância. Uma partícula de massa m é solta de um ponto entre as duas massas a 20,0 cm da massa de 8,0 kg ao longo da linha que conecta as duas massas fixas. Ache o módulo, a direção e o sentido da aceleração da partícula.

12.9 Determine o módulo, a direção e o sentido da força gravitacional resultante exercida pelo Sol e pela Terra sobre a Lua quando a Lua está em cada uma das posições indicadas na Figura 12.32. (Note que a figura *não* está desenhada em escala. Suponha que o Sol esteja no plano da órbita da Lua em torno da Terra, embora esse caso seja raro.) Use dados do Apêndice F.

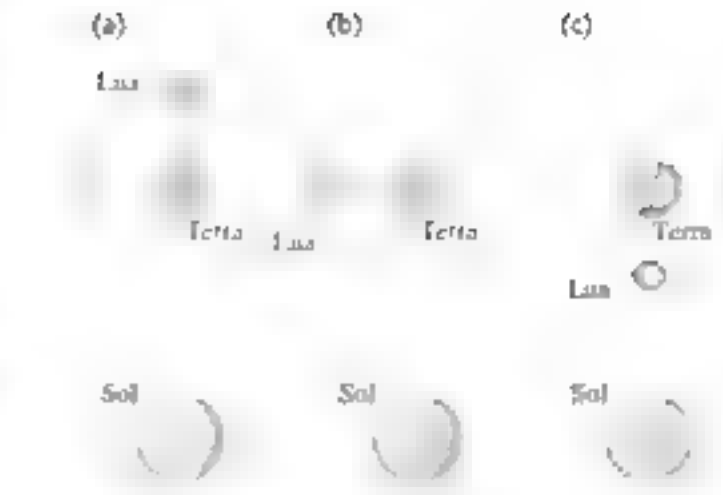


Figura 12.32 Exercício 12.9

12.10 Quatro massas idênticas de 800 kg cada são colocadas nos cantos de um quadrado cujo lado mede 10,0 cm. Qual é a força gravitacional resultante (módulo, direção e sentido) sobre uma das massas em virtude das outras três?

12.11 Uma partícula de massa $3m$ está localizada a 1,0 m de outra partícula de massa m. a) Onde você deve colocar uma terceira massa M de modo que a força gravitacional resultante sobre M em virtude das duas massas seja exatamente zero? b) O equilíbrio de M é estável ou instável (i) em pontos ao longo da linha que conecta m e $3m$, e (ii) em pontos ao longo da linha que passa por M e é perpendicular à linha que conecta m e $3m$?

12.12 As massas pontuais m e $2m$ estão situadas ao longo do eixo x, com m na origem e $2m$ em $x = L$. Uma terceira massa pontual M é deslocada ao longo do eixo x. (a) Em que ponto a força gravitacional resultante sobre M em virtude das duas outras massas é igual a zero? (b) Desenhe o componente x da força resultante sobre M em virtude de m e $2m$, supondo que as grandezas à direita sejam positivas. Inclua as regiões $x < 0$, $0 < x < L$ e $x > L$. Não deixe de mostrar o comportamento do gráfico em ambos os lados de $x = 0$ e $x = L$.

12.13 Duas esferas uniformes, cada uma com massa igual a 0,260 kg, estão fixas nos pontos A e B (Figura 12.33). Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração inicial de uma esfera uniforme com massa 0,010 kg quando ela é liberada do repouso no ponto P e sofrendo apenas atrações gravitacionais das esferas situadas em A e B.

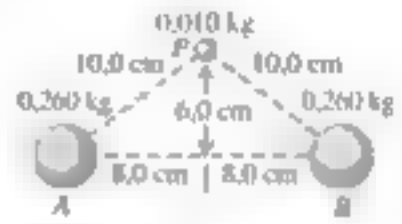


Figura 12.33 Exercício 12.13

Seção 12.2 Peso

12.14 Consulte o Apêndice F e use os valores da massa e do raio do planeta Plutão para calcular a aceleração da gravidade na superfície de Plutão.

12.15 Sabendo que a aceleração da gravidade na superfície da Terra é igual a 9,80 m/s², qual deve ser a altura acima da superfície terrestre na qual a aceleração da gravidade é igual a 0,980 m/s²?

12.16 A massa de Vênus é igual a 81,5% da massa da Terra, e seu raio é 94,9% do raio da Terra. a) Usando esses dados, calcule a

aceleração da gravidade na superfície de Vênus. b) Se uma pedra pesa 75,0 N na Terra, qual seria o seu peso na superfície de Vênus?

12.17 Titânia, a maior lua do planeta Urano, possui um raio igual a 1/8 do raio da Terra e massa igual a 1/1 700 da massa da Terra. a) Qual é a aceleração da gravidade na superfície de Titânia? b) Qual é a densidade média de Titânia? (Esse valor é menor do que a densidade *média* das rochas, uma evidência em favor da hipótese de que Titânia seja basicamente constituída por gelo.)

12.18 Réia, uma das luas de Saturno, possui raio igual a 765 km e a aceleração da gravidade na sua superfície é igual a 0,278 m/s^2. Calcule sua massa e sua densidade média.

12.19 Calcule a força da gravidade exercida pela Terra sobre um astronauta de 75 kg que está consertando o Telescópio Espacial Hubble a 600 km acima da superfície da Terra, e depois compare esse valor com o peso dele na superfície da Terra. Diante do seu resultado, explique por que dizemos que os astronautas não têm peso quando orbitam a Terra em um satélite, tal como um ônibus espacial. Isso se deve ao fato de a atração gravitacional da Terra ser tão pequena a ponto de poder ser desprezada?

12.20 Estrelas de nêutrons, como a que se localiza no centro da Nebulosa do Caranguejo, têm aproximadamente a mesma massa que nosso Sol, mas um diâmetro *muito* menor do que o Sol. Se você pesasse 675 N na Terra, qual seria o seu peso na superfície de uma estrela de nêutrons que possuísse a mesma massa de nosso Sol e um diâmetro de 20 km?

12.21 Usando-se uma balança de Cavendish para a medida da constante gravitacional *G*, verificou-se que uma esfera uniforme de 0,400 kg atrai outra esfera uniforme de 0,00300 kg com uma força igual a $8,0 \times 10^{-10}$ N quando a distância entre os centros destas esferas é igual a 0,0100 m. A aceleração da gravidade na superfície da Terra é igual a 9,80 m/s^2, e o raio da Terra é igual a 6 380 km. Calcule a massa da Terra usando esses dados.

12.22 **Explorando Europa.** Há fortes indícios de que Europa, um satélite de Júpiter, tenha um oceano líquido sob a superfície de gelo. Muitos cientistas acham que deveríamos enviar um módulo espacial para lá em busca de vida. Antes de lançá-lo, deveríamos testar o módulo sob as condições de gravidade na superfície de Europa. Um modo de fazer isso é colocar o módulo na extremidade de um braço rotativo em um satélite orbitando ao redor da Terra. Se o braço possuir 4,25 m de comprimento e girar ao redor de uma extremidade, em que velocidade angular (em rpm) ele deveria girar para que a aceleração do módulo espacial fosse a mesma que a aceleração da gravidade na superfície de Europa? A massa de Europa é $4,8 \times 10^{22}$ kg e seu diâmetro é 3.138 km.

Seção 12.3 Energia potencial gravitacional

12.23 O asteróide *Ductyl*, descoberto em 1993, possui um raio de apenas 700 m e massa aproximadamente igual a $3,6 \times 10^{12}$ kg. Use os resultados do Exemplo 12.5 (Seção 12.3) para calcular a velocidade de escape para um objeto na superfície de *Ductyl*. Poderia uma pessoa atingir essa velocidade apenas caminhando?

12.24 **Massa de um cometa.** Em 4 de julho de 2005, a espaçonave *Deep Impact* da NASA lançou um projétil sobre a superfície do Cometa Tempel 1. Esse cometa tem um diâmetro de cerca de 9,0 km. Observações dos fragmentos provocados pelo impacto na superfície revelaram a liberação de poeira do cometa com uma velocidade bastante reduzida, de cerca de 10 m/s. (a) Supondo uma forma esférica, qual é a massa desse cometa? (*Sugestão*: Veja o Exemplo 12.5 na Seção 12.3.) (b) A que distância do centro do cometa estará um fragmento quando houver perdido (i) 90,0% de sua energia cinética inicial na superfície; e (ii) toda a energia cinética que possuía na superfície?

12.25 Use os resultados do Exemplo 12.5 (Seção 12.3) para calcular a velocidade de escape para uma espaçonave sair: a) da superfície de Marte; b) da superfície de Júpiter. Use dados do Apêndice F. c) Por que a velocidade de escape não depende da massa da espaçonave?

12.26 Dez dias após seu lançamento para Marte em dezembro de 1998, a espaçonave *Mars Climate Orbiter* (massa igual a 629 kg) estava a uma distância de $2,87 \times 10^5$ km da Terra e se deslocava com velocidade igual a $1,20 \times 10^4$ km/h em relação à Terra. Nesse momento, qual era a) a energia cinética da espaçonave em relação à Terra e b) a energia potencial gravitacional do sistema espaçonave-Terra?

Seção 12.4 Movimento de satélites

12.27 Qual deve ser a velocidade orbital de um satélite que descreve uma órbita circular de raio igual a 780 km acima da superfície terrestre?

12.28 **Missão Aura.** Em 15 de julho de 2004, a NASA lançou a espaçonave Aura para estudar o clima e a atmosfera da Terra. Esse satélite foi colocado em uma órbita 705 km acima da superfície da Terra. Suponha uma órbita circular. (a) Quantas horas leva para esse satélite completar uma órbita? (b) Com que velocidade (em quilômetros) a espaçonave Aura está se movendo?

12.29 Suponha que a órbita da Terra ao redor do Sol seja circular. Use o raio orbital e o período orbital da Terra fornecidos no Apêndice F para calcular a massa do Sol.

12.30 **Estação Espacial Internacional (*International Space Station*).** A Estação Espacial Internacional completa 15,65 revoluções por dia em sua órbita ao redor da Terra. Supondo uma órbita circular, a que altura acima da Terra se encontra esse satélite?

12.31 Deimos, uma das luas de Marte, possui cerca de 12 km de diâmetro e $2,0 \times 10^{15}$ kg de massa. Suponha que você tenha sido abandonado sozinho em Deimos e queira jogar beisebol com você mesmo. Você seria o arremessador e o rebatedor ao mesmo tempo! (a) Com que velocidade você teria de arremessar uma bola de beisebol para que ela entrasse em órbita circular um pouco acima da superfície e retornasse a você para que pudesse rebatê-la? Você acha que poderia realmente arremessar a bola a essa velocidade? (b) Quanto tempo (em horas) depois de arremessar a bola você deveria se preparar para rebatê-la? Haveria muita "ação" nesse jogo de beisebol?

Seção 12.5 As leis de Kepler e o movimento de planetas

12.32 **Planeta Vulcano.** Suponha que houvesse sido descoberto um planeta entre o Sol e Mercúrio, com uma órbita circular de raio igual a 2/3 do raio orbital médio de Mercúrio. Qual seria o período orbital desse planeta? (Antigamente acreditava-se que esse planeta existisse, para explicar a precessão da órbita de Mercúrio. Chegou-se mesmo a batizá-lo de Vulcano, embora hoje em dia não se tenha nenhuma evidência de que ele realmente exista. A precessão de Mercúrio é explicada pela relatividade geral.)

12.33 A estrela Rho^1 Cancri está a uma distância de 57 anos-luz da Terra e possui massa igual a 0,85 da massa do Sol. Verificou-se que existe um planeta descrevendo uma órbita circular em torno de Rho^1 Cancri com raio igual a 0,11 do raio da órbita da Terra em torno do Sol. a) Qual é a velocidade orbital e b) o período orbital do planeta de Rho^1 Cancri?

12.34 Em março de 2006, foram descobertos dois pequenos satélites orbitando Plutão, um deles a uma distância de 48000 km e o outro a 64000 km. Já se sabia que Plutão possuía um grande satélite, Caronte, orbitando a 19600 km com um período orbital de 6,39 dias. Supondo que os satélites não se afetem um ao outro, encontre os períodos orbitais dos dois satélites *sem usar* a massa de Plutão.

12.35 a) Use a Figura 12.19 para mostrar que a distância entre o Sol e um planeta no periélio é igual a $(1 - e)a$, a distância entre o Sol e um planeta no afélio é igual a $(1 + e)a$ e, portanto, a soma dessas duas distâncias é igual a $2a$. b) Plutão é chamado de planeta externo, porém, durante o periélio em 1989 ele estava quase 100 milhões de quilômetros mais perto do Sol do que Netuno. Os semi-eixos maiores das órbitas de Plutão e de Netuno são, respectivamente, $5{,}92 \times 10^{12}$ m e $4{,}50 \times 10^{12}$ m, e as respectivas excentricidades são 0,248 e 0,010. Ache a menor distância entre o Sol e Plutão e a maior distância entre o Sol e Netuno. c) Depois de quantos anos do periélio de Plutão em 1989 Plutão estará novamente no periélio?

12.36 **Júpiter quente.** Em 2004, astrônomos relataram a descoberta de um planeta tão grande quanto Júpiter orbitando muito perto da estrela HD 179949 (daí o termo "Júpiter quente"). A órbita é exatamente a distância de Mercúrio a nosso Sol, e o planeta leva apenas 3,09 dias para completar uma órbita (suponha que a órbita seja circular). (a) Qual é a massa da estrela? Dê a sua resposta em quilogramas e como um múltiplo da massa de nosso Sol. b) Qual a velocidade (em km/s) com que esse planeta se move?

12.37 A espaçonave *Hélios B* possuía uma velocidade de 71 km/s quando ela estava a $4{,}3 \times 10^7$ km do Sol. a) Prove que ela não estava em uma órbita circular em torno do Sol. b) Prove que sua órbita em torno do Sol era fechada e, portanto, elíptica.

*Seção 12.6 Distribuição esférica de massa

12.38 Uma casca esférica, uniforme, de massa igual a 1000 kg possui um raio de 5,0 m. (a) Ache a força gravitacional que essa casca exerce sobre uma massa pontual de 2,0 kg colocada nas seguintes distâncias do centro da casca: (i) 5,01 m, (ii) 4,99 m, (iii) 2,72 m. (b) Desenhe um gráfico qualitativo do módulo da força gravitacional que essa esfera exerce sobre uma massa pontual m em função da distância r de m do centro da esfera. Inclua a região de $r = 0$ a $r \to \infty$.

12.39 Uma esfera sólida, uniforme, de massa igual a 1000 kg, possui um raio de 5,0 m. (a) Ache a força gravitacional que essa esfera exerce sobre uma massa pontual de 2,0 kg colocada nas seguintes distâncias do centro da esfera: (i) 5,01 m e (ii) 2,50 m. (b) Desenhe um gráfico qualitativo do módulo da força gravitacional que essa esfera exerce sobre uma massa pontual m em função da distância r de m do centro da esfera. Inclua a região de $r = 0$ a $r \to \infty$.

12.40 Uma barra de gada uniforme possui massa M e comprimento L. Uma pequena esfera uniforme de massa m é situada a uma distância x de uma das extremidades da barra ao longo do eixo da barra (Figura 12.34). a) Calcule a energia potencial gravitacional do sistema barra-esfera. Considere a energia potencial gravitacional igual a zero quando a distância entre a barra e a esfera for igual ao infinito. Mostre que o resultado se reduz ao esperado quando x for muito maior do que L. (*Sugestão*: Use o desenvolvimento em série de potências da função $\ln(1 + x)$ indicado no Apêndice B.) b) Use a relação $F_x = -dU/dx$ para achar o módulo e a direção da força gravitacional exercida pela barra sobre a esfera (veja Seção 7.4). Mostre que o resultado se reduz ao esperado quando x for muito maior do que L.

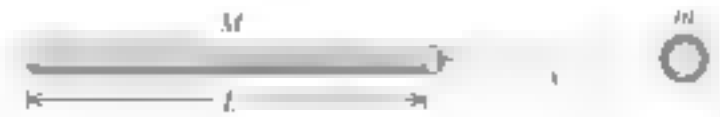


Figura 12.34 Exercício 12.40 e Problema 12.84.

12.41 Considere o corpo em forma de anel indicado na Figura 12.35. Uma partícula de massa m é colocada a uma distância x do centro do anel ao longo de seu eixo e perpendicularmente ao seu plano. a) Calcule a energia potencial gravitacional U desse sistema. Considere a energia potencial gravitacional igual a zero quando os dois objetos estiverem muito distantes. b) Mostre que o resultado da parte (a) se reduz ao esperado quando x for muito maior do que o raio a do anel. c) Use a relação $F_x = -dU/dx$ para achar o módulo e a direção da força gravitacional exercida pelo anel sobre a partícula. d) Mostre que o resultado da parte (c) se reduz ao esperado quando x for muito maior do que a. e) Quais são os valores de U e de F_x quando $x = 0$? Explique por que esses resultados fazem sentido.

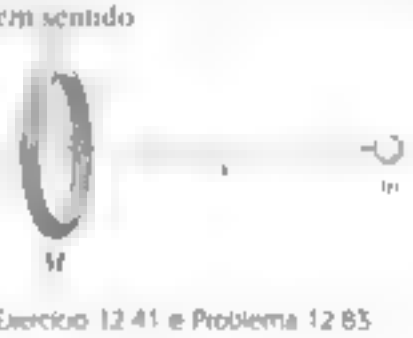


Figura 12.35 Exercício 12.41 e Problema 12.85.

*Seção 12.7 Peso aparente e rotação da Terra

12.42 O peso do Papai Noel no Pólo Norte, determinado pela leitura de uma balança de molas, é igual a 875 N. Qual seria a leitura do peso dele nessa balança no equador, supondo que a Terra fosse esfericamente simétrica?

12.43 A aceleração da gravidade no pólo norte de Netuno é aproximadamente igual a 10,7 m/s². Netuno possui massa igual a $1{,}0 \times 10^{26}$ kg e raio igual a $2{,}5 \times 10^4$ km e gira uma vez em torno de seu eixo em 16 h. a) Qual é a força gravitacional sobre um objeto de 5,0 kg no pólo norte de Netuno? b) Qual é o peso aparente do mesmo objeto no equador de Netuno? (Note que a "superfície" de Netuno é gasosa, e não sólida, de modo que é impossível ficar em pé sobre ela.)

*Seção 12.8 Buraco negro

12.44 **Miniburacos negros.** Os cosmólogos especulam que buracos negros do tamanho de um próton poderiam ter se formado durante os primeiros dias do Big Bang, quando o universo teve início. Se tomarmos o diâmetro de um próton como $1{,}0 \times 10^{-15}$ m, qual seria a massa de um miniburaco negro?

12.45 A que fração do raio atual o raio da Terra deveria ser reduzido para que ela se tornasse um buraco negro?

12.46 a) Mostre que um buraco negro atrai um objeto de massa m com uma força igual a $mc^2R_s/2r^2$), onde r é a distância entre o objeto e o centro do buraco negro. b) Calcule o módulo da força gravitacional exercida por um buraco negro que possua o raio de Schwarzschild igual a 14,0 mm sobre um corpo de 5,0 kg situado

a uma distância de 3000 km do buraco negro. c) Qual é a massa desse buraco negro?

12.47 **No núcleo da Via Láctea.** Os astrônomos observaram um objeto pequeno com massa elevada no centro da nossa galáxia, a Via Láctea (veja Seção 12.8). Giram em torno desse objeto materiais distribuídos ao longo de um anel; o diâmetro desse anel é aproximadamente igual a 15 anos-luz e sua velocidade orbital é aproximadamente igual a 200 km/s. a) Determine a massa desse objeto. Dê a resposta em quilogramas e em massas solares (a massa solar é uma unidade de massa igual à massa do Sol). b) Observações de estrelas, bem como teorias das estruturas estelares, sugerem que é impossível que uma única estrela possua massa maior do que 50 massas solares. Esse objeto com massa elevada seria constituído por uma única estrela? c) Muitos astrônomos acreditam que esse objeto no centro da Via Láctea seja um buraco negro. Caso seja, qual deverá ser o seu raio de Schwarzschild? Um buraco negro desse tamanho caberia no interior da órbita da Terra em torno do Sol?

12.48 Em 2005, foi anunciada a descoberta de um grande buraco negro na galáxia Markarian 766. Esse buraco negro possuía blocos de matéria completando uma órbita a cada 27 horas e movendo-se a 30000 km/s. a) A que distância do centro do buraco negro estão esses blocos? b) Qual é a massa desse buraco negro, supondo órbitas circulares? Dê a resposta em quilogramas e como um múltiplo da massa do nosso Sol. c) Qual é o raio do horizonte de eventos desse buraco negro?

Problemas

12.49 Três esferas uniformes estão fixadas nas posições indicadas na Figura 12.36. a) Determine o módulo, a direção e o sentido da força sobre uma partícula de 0,0150 kg situada no ponto *P*. b) Se essas esferas estivessem nas profundezas do espaço sideral e uma partícula de 0,0150 kg fosse liberada do repouso a 300 m da origem ao longo de uma reta a 45° abaixo do eixo *Ox*, qual seria a velocidade da partícula quando ela atingisse a origem?

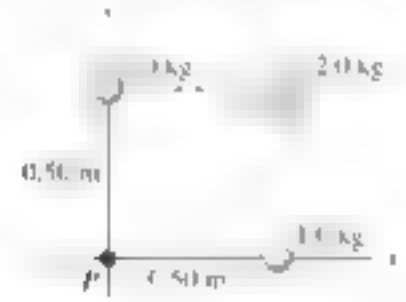


Figura 12.36 Problema 12.49

12.50 Uma esfera uniforme de massa igual a 60,0 kg é mantida fixa com seu centro na origem e uma segunda esfera uniforme de massa igual a 80,0 kg é mantida fixa com seu centro no ponto $x = 0$, $y = 3{,}0$ m. a) Determine o módulo, a direção e o sentido da força gravitacional resultante produzida por essas esferas sobre uma terceira esfera uniforme com massa igual a 0,500 kg situada no ponto $x = 4{,}0$ m, $y = 0$. b) Em que ponto, sem ser o infinito, a terceira esfera deve ser colocada para que a força gravitacional resultante que atua sobre ela seja igual a zero?

12.51 a) Mostre que a força gravitacional exercida pelas duas grandes estrelas do Exemplo 12.3 (Seção 12.1) sobre a estrela menor *não* é dirigida para o ponto situado no meio da distância entre as estrelas maiores. b) Suponha que as duas estrelas maiores constituam um único corpo rígido, como se estivessem ligadas por uma haste de massa desprezível. Calcule o torque exercido pela estrela pequena sobre esse corpo rígido em relação a um pivô situado no seu centro de massa. c) Explique como o resultado da parte (b) mostra que o centro de massa não coincide com o centro de gravidade. Por que não há essa coincidência?

12.52 Em um dado instante, a Terra, a Lua e uma espaçonave de massa igual a 1 250 kg ocupam os vértices de um triângulo equilátero de lado igual a $3{,}84 \times 10^5$ km. a) Determine o módulo, a direção e o sentido da força gravitacional resultante exercida pela Terra e pela Lua sobre a espaçonave. Descreva a direção em termos do ângulo a partir da linha que liga a Terra com a espaçonave. Faça um diagrama mostrando a Terra, a Lua, a espaçonave e o vetor força. b) Qual seria o trabalho mínimo que você deveria realizar para afastar a espaçonave até uma distância infinita da Terra e da Lua? Despreze os efeitos gravitacionais produzidos pelo Sol e pelos outros planetas.

12.53 Realiza-se uma experiência nas profundezas do espaço sideral com duas esferas uniformes de mesmo raio, uma com massa igual a 25,0 kg e a outra com massa igual a 300,0 kg. As esferas possuem raios de mesmo tamanho, $r = 0{,}20$ m, e são liberadas a partir do repouso com seus centros a 40,0 m de distância. Elas aceleram uma ao encontro da outra em virtude da atração gravitacional entre elas. Despreze outras forças gravitacionais além da existente entre as esferas. a) Explique por que existe conservação do momento linear. b) Quando a distância entre seus centros for igual a 20,0 m, calcule i) a velocidade de cada esfera e ii) o módulo da velocidade relativa da aproximação entre as duas esferas. c) Qual é a distância entre o ponto ocupado pelo centro da esfera de 25,0 kg e o ponto no qual as superfícies das duas esferas colidem?

12.54 Suponha que a órbita da Lua em torno da Terra seja circular. A partir do período orbital de 27,3 dias, calcule a distância da Lua ao centro da Terra. Suponha que o movimento da Lua seja determinado unicamente pela força gravitacional que a Terra exerce sobre ela, e use a massa da Terra indicada no Apêndice F.

12.55 **Satélites geossíncronos.** Muitos satélites se movem em um círculo no plano equatorial da Terra. Eles estão a uma altura tal que sempre permanecem sobre um mesmo ponto da Terra. a) Ache a altura desses satélites acima da superfície terrestre. (Esse tipo de órbita é denominado *geossíncrono*.) b) Faça um diagrama para mostrar que um receptor a uma latitude norte superior a 81,3° N não pode receber sinais de rádio emitidos por esse tipo de satélite.

12.56 Um módulo espacial de massa igual a 12500 kg está em uma órbita circular $5{,}75 \times 10^6$ sobre a superfície de um planeta. O período da órbita é 5800 s. Os astronautas no módulo medem o diâmetro do planeta e obtêm $9{,}60 \times 10^6$. O módulo espacial pousa no pólo norte do planeta. Qual é o peso de um astronauta de 85,6 kg ao descer à superfície do planeta?

12.57 Qual é a velocidade de escape de um asteróide com diâmetro de 300 km e com uma densidade igual a 2500 kg/m^3?

12.58 a) Os asteróides possuem densidades da ordem de 2500 kg/m^3 e raios variando de 470 km até menos do que um quilômetro. Supondo que o asteróide possua uma distribuição de massa com simetria esférica, estime o raio do maior asteróide do qual você poderia escapar simplesmente pulando da superfície dele

(*Sugestão:* Você pode estimar a velocidade máxima do seu pulo relacionando-a à altura máxima que você atinge quando pula na superfície terrestre.) b) Europa, uma das quatro maiores luas de Júpiter, possui um raio igual a 1570 km. A aceleração da gravidade em sua superfície é igual a 1,33 m/s^2. Calcule sua densidade média.

12.59 a) Suponha que você esteja no equador da Terra e observe um satélite passando bem em cima de sua cabeça e movendo-se de oeste para leste no céu. Exatamente 12,0 horas depois, você vê esse satélite sobre sua cabeça outra vez. A que distância da superfície da Terra está a órbita do satélite? (b) Você vê outro satélite bem em cima de sua cabeça e seguindo de leste para oeste. Esse satélite está novamente sobre sua cabeça em 12,0 horas. A que distância da superfície da Terra está a órbita desse satélite?

12.60 O Planeta X gira, do mesmo modo que a Terra, ao redor de um eixo que passa por seus pólos norte e sul, e é perfeitamente esférico. Um astronauta que pesa 943,0 N na Terra pesa 915,0 N no pólo norte do Planeta X, e apenas 850,0 N em seu equador. A distância do pólo norte ao equador é 18850 km, medidos ao longo da superfície do Planeta X. a) Qual a duração do dia no Planeta X? b) Se um satélite de 45000 kg for colocado em uma órbita circular 2000 km acima da superfície do Planeta X, qual será o seu período orbital?

12.61 Existem duas equações a partir das quais você pode calcular uma variação da energia potencial gravitacional U do sistema constituído por um corpo de massa m e a Terra. Uma delas é $U = mgy$ (Equação (7.2) — *Física I*). A outra é $U = -Gm_Em/r$ (Equação (12.9)). Como mostramos na Seção 12.3, a primeira equação é correta somente quando a força gravitacional for constante ao longo da variação de altura Δy. A segunda é sempre correta. Na realidade a força gravitacional nunca é exatamente constante ao longo de qualquer variação de altura, porém, quando a variação for pequena, podemos desprezá-la. Calcule a diferença de U usando as duas fórmulas para uma diferença de altura h acima da superfície terrestre e ache o valor de h para o qual a Equação (7.2) fornece um erro de 1%. Expresse esse valor de h como uma fração do raio da Terra, e obtenha também seu valor numérico.

12.62 A sua espaçonave, o *Andarilho Errante*, pousa no misterioso planeta Mongo. Como engenheiro e cientista-chefe, você efetua as seguintes medidas: uma pedra de massa igual a 2,50 kg jogada para cima a partir do solo retorna ao solo em 8,0 s; a circunferência de Mongo no equador é $2,0 \times 10^5$ e não existe atmosfera significativa em Mongo. O comandante da nave, Capitão Confusão, pede as seguintes informações: a) Qual é a massa de Mongo? b) Se o *Andarilho Errante* entrar em uma órbita circular 30000 km acima da superfície de Mongo, quantas horas a nave levará para completar uma órbita?

12.63 Calcule a diferença percentual entre o seu peso em Sacramento, perto do nível do mar, e no topo do Monte Everest, 8 800 m acima do nível do mar.

12.64 No Exemplo 12.5 (Seção 12.3), desprezamos os efeitos gravitacionais da Lua sobre a espaçonave que se deslocava entre a Terra e a Lua. Na realidade, devemos incluir também o efeito da Lua sobre a energia potencial gravitacional. Para este problema, despreze o movimento da Terra e da Lua. a) Chamando de R_L o raio da Lua e de R_{TL} a distância entre a Terra e a Lua, ache a energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra e do sistema partícula-Lua quando uma partícula de massa m está a uma distância r do centro da Terra. Considere a energia potencial gravitacional igual a zero quando a distância entre os corpos for infinita. b) Existe um ponto na linha que une a Terra com a Lua para o qual a força gravitacional resultante é igual a zero. Use a expressão deduzida na parte (a) e dados do Apêndice F para calcular a distância entre este ponto e o centro da Terra. Com que velocidade deve uma espaçonave ser lançada da superfície da Terra para que ela consiga apenas atingir esse ponto, sem ir além? c) Caso uma espaçonave fosse lançada da superfície da Terra em direção à Lua com velocidade igual a 11,2 km/s, com que velocidade ela atingiria a superfície da Lua?

12.65 Uma espaçonave sem tripulação descreve uma órbita circular em torno da Lua, observando a superfície da Lua de uma altura de 50,0 km (ver o Apêndice F). Para surpresa dos cientistas na Terra, devido a uma falha elétrica um dos motores da espaçonave deixa de funcionar, fazendo sua velocidade diminuir 20,0 m/s. Caso nada seja feito para corrigir sua órbita, com que velocidade (em km/h) a espaçonave atingirá a superfície da Lua?

*12.66 Qual seria a duração de um dia (isto é, o tempo necessário para a Terra completar uma rotação em torno do seu eixo), se a taxa de rotação da Terra fosse tal que $g = 0$ no equador?

12.67 **Martelo em queda.** Um martelo com massa m é largado de uma altura h acima da superfície da Terra. Essa altura não é necessariamente pequena em comparação ao raio da Terra R_T. Desprezando a resistência do ar, deduza uma expressão para a velocidade v do martelo quando ele atinge a superfície da Terra. Essa expressão deve envolver h, R_T e m_T, a massa da Terra.

12.68 a) Calcule o trabalho necessário para lançar uma espaçonave de massa m da superfície da Terra (massa m_T e raio R_T) e colocá-la em uma *órbita terrestre baixa*, isto é, uma órbita cuja altura acima da superfície da Terra seja menor do que R_T. (Como exemplo, a *Estação Espacial Internacional* está em uma órbita terrestre baixa a uma altura de 400 km, que é muito menor do que R_T = 6.380 km.) Despreze a energia cinética que a espaçonave possui na superfície da Terra em virtude da rotação da Terra. b) Calcule o trabalho adicional mínimo necessário para fazer a espaçonave se deslocar da órbita terrestre até uma distância muito grande da Terra. Despreze os efeitos gravitacionais do Sol, da Lua e dos outros planetas. c) Justifique a seguinte afirmação: "em termos de energia, uma órbita terrestre baixa está na metade da distância até a borda do universo".

12.69 Desejamos lançar uma espaçonave da superfície da Terra de modo que ela também escape do sistema solar. a) Calcule a velocidade relativa ao centro da Terra com a qual ela deve ser lançada. Considere os efeitos gravitacionais do Sol e da Terra e inclua o efeito da velocidade orbital da Terra, mas despreze a resistência do ar. b) A rotação da Terra pode auxiliar a atingir esta velocidade de escape. Calcule a velocidade que a espaçonave deve possuir em relação à *superfície* da Terra se a espaçonave for lançada da Flórida no ponto indicado na Figura 12.37. A rotação da Terra em torno do seu eixo e seu movimento orbital em torno do Sol possuem o mesmo sentido de rotação. Em Cabo Canaveral um lançamento ocorre na latitude de 28,5° ao norte do equador. c) A *European Space Agency* (ESA) utiliza uma plataforma de lançamento na Guiana Francesa (imediatamente ao norte do Brasil), situada a 5,15° ao norte do equador. Com que velocidade em relação à superfície da Terra deve uma espaçonave ser lançada da plataforma de lançamento na Guiana Francesa para que ela escape do sistema solar?

Figura 12.37 Problema 12.69

•12.70 **Gravidade no interior da Terra.** Ache a força gravitacional que a Terra exerce sobre uma massa de 10.0 kg se ela for colocada nos seguintes locais. Consulte a Figura 12.9 e suponha uma densidade constante em todas as regiões interiores (manto, núcleo externo, núcleo interno), mas *não* a mesma densidade em todas essas regiões. Use o gráfico para estimar a densidade média de cada região. a) Na superfície da Terra; b) na superfície externa do núcleo externo líquefeito; c) na superfície do núcleo interno sólido; (d) no centro da Terra.

12.71 **Lacunas de Kirkwood.** Centenas de milhares de asteroides giram em torno do Sol no interior do *cinturão de asteroides*, que se estende desde uma distância do Sol de 3×10^8 km até cerca de 5×10^8 km. a) Ache o período orbital (em anos) para i) um asteróide na parte interna do cinturão e ii) um asteróide na parte externa do cinturão. Considere órbitas circulares. b) Em 1867 o astrônomo americano Daniel Kirkwood notou diversas lacunas na continuidade do cinturão no interior das quais existem relativamente poucos asteróides. Agora sabemos que essas *lacunas de Kirkwood* são causadas pela atração gravitacional de Júpiter, o maior planeta do sistema solar, que completa uma volta em torno do Sol a cada 11,86 anos. Como exemplo, se o asteróide possuísse um período orbital igual à metade do período de Júpiter, 5,93 anos, cada órbita estaria próxima da de Júpiter e sofreria uma forte atração gravitacional deste planeta. Essa atração, atuando continuamente em órbitas vizinhas, poderia fazer alguns asteróides saírem da lacuna de Kirkwood. Use essa hipótese para determinar o raio da órbita da lacuna de Kirkwood. c) Uma de diversas outras lacunas de Kirkwood surgiu a uma distância do Sol para a qual o período orbital é igual a 0,400 do período de Júpiter. Explique por que ocorre essa lacuna e calcule o raio dessa lacuna de Kirkwood.

12.72 Quando um satélite descreve uma órbita suficientemente baixa, ele sofre arraste do ar da atmosfera terrestre. Como a força de arraste do ar produz um trabalho negativo (a força de arraste do ar possui sentido contrário ao do movimento), a energia mecânica diminui. De acordo com a Equação (12.13), quando E diminui (torna-se mais negativa) o raio r da órbita diminui. Se o arraste do ar for suficientemente pequeno, a órbita pode ser considerada circular com uma diminuição contínua do raio. a) De acordo com a Equação (12.10), quando o raio r de uma órbita circular diminui, a velocidade orbital v do satélite *aumenta*. Como você pode conciliar esse resultado com o fato de que a energia mecânica *diminui*? (*Sugestão:* É a força de arraste do ar a única força que realiza trabalho sobre o satélite quando o raio da órbita diminui?) b) Devido à força de arraste do ar o raio da órbita circular diminui de r para $r - \Delta r$, onde o valor positivo r é muito menor do que Δr. A massa do satélite é igual a m. Mostre que o aumento da velocidade orbital é dado por $\Delta v = +(1/2)(Gm_E m/r^3)^{-1/2}\,\Delta r$; que a variação da energia cinética é dada por $\Delta K = +(Gm_E m/2r^2)\,\Delta r$; que a variação da energia potencial gravitacional é dada por $\Delta U = -2\Delta K = -(Gm_E m/r^2)\,\Delta r$; e que a força de arraste do ar produz um trabalho dado por $W = -(Gm_E m/2r^2)\,\Delta r$. Interprete esses resultados com base em seus comentários da parte (a). c) Um satélite com massa igual a 3000 kg está inicialmente em uma órbita circular a 300 km acima da superfície da Terra. Sua altura diminui para 250 km, graças à força de arraste do ar. Calcule a velocidade orbital inicial; o aumento da velocidade orbital; a energia mecânica inicial; a variação da energia cinética; a variação da energia potencial gravitacional; a variação da energia mecânica e o trabalho realizado pela força de arraste do ar. d) Um satélite passa a se mover em uma altura tão baixa que ele se queima e seus restos se espalham na superfície da Terra. O que ocorreu com a sua energia mecânica inicial?

12.73 **Estrela binária – massas iguais.** Duas estrelas idênticas, cada uma com massa M, giram em torno do centro de massa das duas estrelas. Cada órbita é circular e possui raio R, de modo que as duas estrelas estão sempre em lados opostos do círculo. a) Ache a força gravitacional de uma estrela sobre a outra. b) Ache a velocidade orbital de cada estrela e o período da órbita. c) Qual deve ser a energia necessária para separar as duas estrelas até uma distância infinita?

12.74 **Estrela binária – massas diferentes.** Duas estrelas, uma com massa M_1 e a outra com massa M_2, descrevem uma órbita circular em torno do centro de massa delas. A estrela de massa M_1 possui uma órbita com raio R_1, e a estrela de massa M_2 possui uma órbita com raio R_2. a) Mostre que a razão entre os raios orbitais das duas estrelas é inversamente proporcional à razão entre suas massas, ou seja, mostre que $R_1/R_2 = M_2/M_1$. b) Explique por que as duas estrelas possuem o mesmo período orbital e mostre que o período T é dado por . c) As duas estrelas de um certo sistema de estrela binária descrevem órbitas circulares. A primeira estrela, Alfa, possui velocidade orbital igual a 36,0 km/s. A outra estrela, Beta, possui velocidade orbital igual a 12,0 km/s. O período orbital é igual a 137 d. Calcule a massa de cada uma das duas estrelas. d) Presume-se que um dos melhores candidatos a buraco negro se encontre no sistema binário denominado A0620-0090. Os dois corpos desse sistema são uma estrela laranja, V616 Monocerotis, e um corpo compacto que parece ser um buraco negro (Figura 12.22). O período orbital do binário A0620-0090 é igual a 7,75 horas. Estima-se que a massa de V616 Monocerotis seja igual a 0,67 vez a massa do Sol, e que a massa do buraco negro seja igual a 3,8 vezes a massa do Sol. Supondo que as órbitas sejam circulares, calcule o raio da órbita e a velocidade orbital de cada um desses corpos. Compare suas respostas com o raio orbital e com a velocidade da Terra em sua órbita em torno do Sol.

12.75 Os cometas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol com elevadas excentricidades. Se um cometa possui velocidade igual a $2,0 \times 10^4$ m/s, quando sua distância ao centro do Sol é igual a $2,5 \times 10^{11}$ m, qual é sua velocidade quando sua distância ao centro do Sol é igual a $5,0 \times 10^{10}$ m?

12.76 À medida que Marte percorre sua órbita elíptica em torno do Sol, sua distância mais próxima do centro do Sol (no periélio) é igual a $2,067 \times 10^{11}$ m, e sua distância máxima ao centro do Sol (no afélio) é igual a $2,492 \times 10^{11}$ m. Se a velocidade orbital de Marte no afélio é igual a $2,198 \times 10^4$ m/s, qual é sua velocidade orbital no periélio? (Despreze a influência dos outros planetas.)

12.77 Considere uma espaçonave percorrendo uma órbita elíptica em torno da Terra. Em seu ponto inferior, ou perigeu de sua órbita, ela está a uma altura de 400 km acima da superfície terrestre; em seu ponto superior, ou apogeu de sua órbita, ela está a uma altura de 4000 km acima da superfície terrestre. a) Qual é o período da órbita da espaçonave? b) Usando a conservação do momento angular, ache a razão entre a velocidade no perigeu e a velocidade no apogeu. c) Usando a conservação da energia, ache a velocidade no perigeu e a velocidade no apogeu. d) Desejamos fazer a espaçonave escapar completamente da Terra. Se os motores dos foguetes forem acionados durante o perigeu, quanto a velocidade deve aumentar para atingir esse objetivo? E se os motores forem acionados durante o apogeu? Qual é o ponto da órbita mais eficiente para se usar?

12.78 O planeta Urano possui raio igual a 25560 km e a aceleração da gravidade em sua superfície nos pólos é igual a 11,1 m/s^2. Sua lua Miranda (descoberta por Kuiper em 1948) descreve uma órbita circular em torno de Urano a uma altura de 104000 km acima da superfície deste planeta. Miranda possui massa igual a $6,6 \times 10^{19}$ kg e um raio igual a 235 km. a) Calcule a massa de Miranda usando os dados anteriores. b) Calcule o módulo da aceleração de Miranda em sua órbita em torno de Urano. c) Calcule a aceleração da gravidade na superfície de Miranda. d) Suas respostas dos itens (b) e (c) significam que um objeto lançado a 1 m acima da superfície de Miranda no lado voltado para Urano cairia *para cima* em relação a Miranda? Explique.

12.79 Uma espaçonave de 3000 kg descreve uma órbita circular a uma altura de 2000 km acima da superfície de Marte. Qual é o trabalho realizado pelos motores da espaçonave para transportá-la até uma órbita circular com raio igual a 4000 km?

12.80 Um dos cometas mais brilhantes que apareceram no século XX foi o cometa Hyakutake, que passou nas proximidades do Sol em torno de 1996. Estimou-se em 30000 anos o período orbital deste cometa. Calcule o semi-eixo maior da órbita desse cometa. Compare o resultado com a distância média entre o Sol e Plutão e com a distância da estrela mais próxima do Sol, Alfa Centauro, situada a uma distância da Terra aproximadamente igual a 4,3 anos-luz.

12.81 Planetas não são uniformes por dentro. Normalmente eles são mais densos no núcleo e sua densidade vai decrescendo de centro para fora até a superfície. Modele um planeta esfericamente simétrico, de mesmo raio que a Terra, tendo uma densidade que diminui linearmente com a distância a partir do centro. Suponha que a densidade seja $15,0 \times 10^3$ kg/m^3 no núcleo e $2,0 \times 10^3$ kg/m^3 na superfície. Qual é a aceleração da gravidade na superfície desse planeta?

12.82 Um fio uniforme de comprimento L e massa M está curvado em semicírculo. Calcule o módulo, direção e sentido da força gravitacional que o fio exerce sobre uma partícula de massa m situada no centro da curvatura do semicírculo.

*12.83 Um corpo com forma de anel fino possui raio a e massa M. Uma esfera uniforme de raio R e massa m é colocada com seu centro situado a uma distância x à direita do centro do anel, sobre a linha que une os centros perpendicular ao plano do anel (Figura 12.35). Qual é a força gravitacional que a esfera exerce sobre o corpo em forma de anel? Mostre que o seu resultado se reduz ao esperado quando x for muito maior do que a.

*12.84 Uma barra uniforme delgada possui comprimento L e massa M. Calcule o módulo da força gravitacional que a barra exerce sobre uma partícula de massa m situada ao longo do eixo da barra a uma distância x de uma de suas extremidades (Figura 12.34). Mostre que o seu resultado se reduz ao esperado quando x for muito maior do que L.

*12.85 Perfuramos um túnel da superfície até o centro da Terra (Figura 12.25). Como no Exemplo 12.10 (Seção 12.6), considere a hipótese bastante irreal de que a densidade da Terra seja constante. Com essa aproximação, a força gravitacional exercida sobre um objeto de massa m no interior da Terra situado a uma distância r do centro da Terra possui módulo dado por $F_g = GM_T mr/R_T^3$ (como deduzido no Exemplo 12.10) e aponta para o centro da Terra. a) Deduza uma expressão para a energia potencial gravitacional $U(r)$ do sistema objeto-Terra em função da distância entre o objeto e o centro da Terra. Considere a energia potencial gravitacional igual a zero quando o objeto está no centro da Terra. b) Se um objeto fosse libertado dentro do túnel na superfície terrestre, qual seria sua velocidade quando ele atingisse o centro da Terra?

Problemas desafiadores

12.86 a) Quando um corpo descreve uma órbita circular de raio r em torno da Terra (massa m_T), o período da órbita é igual a T (dado pela Equação (12.12)) e a velocidade orbital é igual a v (dada pela Equação (12.10)). Mostre que, quando o corpo se move em uma órbita circular de raio $r + \Delta r$ sendo $\Delta r \ll r$, seu novo período da órbita é igual a $T + \Delta T$ e sua nova velocidade orbital é igual a $v \times \Delta v$, onde Δr, ΔT e Δv são grandezas positivas e

$$\Delta T = \frac{3\pi \Delta r}{v} \quad e \quad \Delta v = \frac{v \Delta r}{2r}$$

(*Sugestão*: Use a expressão $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, válida para $x \ll 1$.) b) A Estação Espacial Internacional (*International Space Station* — ISS) descreve uma órbita aproximadamente circular a uma altura de 398,00 km acima da superfície terrestre. Uma tripulação de manutenção deverá chegar ao local onde ela se encontra usando um ônibus espacial que também descreve uma órbita circular no mesmo plano da ISS, mas a uma altitude de 398,10 km. A tripulação deve remover um cabo elétrico deteriorado cujo comprimento é igual a 125 m, que possui uma das extremidades presa na ISS e a outra extremidade flutua livre no espaço. A missão planeja retirar o cabo através da extremidade livre quando o ônibus espacial, a ISS e o centro da Terra estiverem alinhados. A seguir o cabo seria destacado da ISS quando ele ficasse sob tensão ao ser esticado. Quanto tempo depois de a extremidade livre do cabo ficar presa ao ônibus espacial seria necessário para ela se destacar da ISS? Dê sua resposta em minutos. c) Caso falhe a tentativa de prender o cabo no ônibus espacial, mostre que a tripulação deverá esperar um tempo $t = T^2/\Delta T$ até que ela tenha uma segunda chance. Calcule o valor numérico de t e explique se compensaria essa espera.

12.87 **Navegação interplanetária.** O método mais eficiente para enviar uma espaçonave da Terra a outro planeta consiste em usar uma *órbita de transferência de Hohmann* (Figura 12.38). Se a órbita da partida e a órbita do destino forem circulares, a órbita de transferência de Hohmann será uma elipse cujo periélio tan-

gencia a órbita de um dos planetas e cujo afélio tangencia a órbita do outro planeta. Os foguetes são acionados brevemente na órbita de partida para colocar a espaçonave na órbita de transferência, a seguir, a espaçonave viaja até atingir o planeta desejado. Depois, os foguetes são novamente acionados para colocar a espaçonave na mesma órbita em torno do Sol descrita pelo planeta do destino. a) Para uma viagem da Terra até Marte, qual deve ser a direção e o sentido em que o foguete deve ser disparado na Terra e em Marte: no sentido do movimento ou no sentido oposto ao movimento? E no caso de uma viagem de Marte até a Terra? b) Quanto tempo entre os disparos dos foguetes levaria uma viagem de ida da Terra até Marte? c) Para atingir Marte a partir da Terra, o lançamento deve ser cronometrado de modo que Marte deve estar no local exato de sua órbita quando a trajetória da espaçonave tangencia a órbita do planeta em torno do Sol. Qual deve ser o ângulo entre a direção do lançamento e a direção da linha que une o Sol com Marte e da linha que une o Sol com a Terra? Use dados do Apêndice F.

Figura 12.38 Problema desafiador 12.87.

12.88 Forças de maré nas vizinhanças de um buraco negro. Uma astronauta no interior de uma espaçonave, que a protege das radiações perigosas, descreve uma órbita em torno de um buraco negro a uma distância de 120 km do seu centro. O buraco negro possui massa igual a 5,0 vezes a massa do Sol e um raio de Schwarzschild igual a 15,0 km. A astronauta está posicionada no interior da espaçonave de tal modo que uma de suas orelhas de 0,030 kg está 6,0 cm mais afastada do centro do buraco negro do que o centro de massa da espaçonave e a outra orelha está 6,0 cm mais próxima. a) Qual é a tensão entre suas orelhas? A astronauta poderia suportar essa força ou seria rasgada por ela? (Uma vez que o corpo inteiro da astronauta descreve a órbita com a mesma velocidade angular, por causa da diferença entre os raios, uma das orelhas se move com velocidade maior do que a outra orelha. Portanto, sua cabeça deverá exercer forças sobre as orelhas para mantê-las na órbita.) b) O centro de massa da sua cabeça está situado no mesmo ponto do seu centro de gravidade? Explique.

***12.89** A massa M está uniformemente distribuída ao longo de um disco de raio a. Determine o módulo, a direção e o sentido da força gravitacional entre o disco e a partícula de massa m localizada a uma distância x acima do centro do disco (Figura 12.39). O seu resultado se reduz a uma expressão correta quando x assume valores muito elevados? (*Sugestão*: Divida o disco em anéis finos concêntricos infinitesimais; a seguir, use a expressão deduzida no Problema 12.41 para a força gravitacional de cada anel e integre o resultado para achar a força total.)

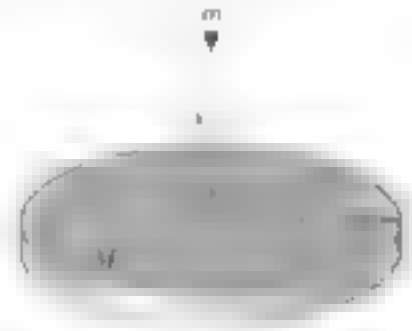


Figura 12.39 Problema desafiador 12.89.

***12.90** A massa M está uniformemente distribuída ao longo de uma linha de comprimento igual a $2L$. Uma partícula de massa m está localizada a uma distância a acima do centro da linha sobre sua bissetriz ortogonal (Ponto P da Figura 12.40). Ache os componentes perpendiculares e paralelos à linha da força gravitacional que a linha exerce sobre a partícula. O seu resultado se reduz a uma expressão correta quando a assume valores muito elevados?

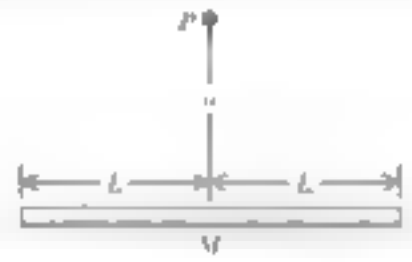
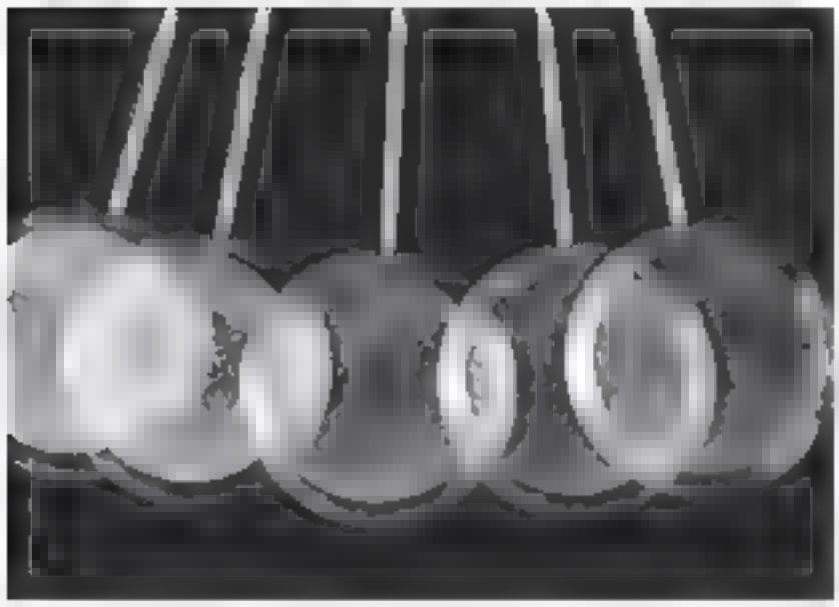


Figura 12.40 Problema desafiador 12.90.

MOVIMENTO PERIÓDICO 13



Suponha que você dobre a massa do pêndulo de um relógio (inclusive a haste e o peso na extremidade) sem alterar suas dimensões. O relógio andará mais depressa ou mais lentamente?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como descrever oscilações em termos da amplitude, período, frequência e frequência angular.
- Como fazer cálculos com movimento harmônico simples (MHS), um tipo importante de oscilação.
- Como usar conceitos de energia para analisar MHS.
- Como aplicar os conceitos envolvidos em um MHS a diferentes situações físicas.
- Como analisar os movimentos de um pêndulo simples.
- O que é um pêndulo físico, e como calcular as propriedades de seu movimento.
- O que determina quão rapidamente uma oscilação chega ao fim.
- Como uma força propulsora aplicada a um oscilador na frequência certa pode provocar uma resposta muito intensa, ou ressonância.

A vibração de um cristal de quartzo em um relógio, a oscilação de pêndulo de um relógio de carrilhão, as vibrações sonoras produzidas por um clarinete ou pelo tubo de um órgão e as oscilações produzidas pelos pistões no motor de um automóvel são exemplos de movimentos que se repetem indefinidamente. Esse tipo de movimento, chamado de **movimento periódico ou oscilação**, é o assunto deste capítulo. O entendimento do movimento periódico será essencial para os estudos que faremos sobre as ondas, o som, as correntes elétricas e a luz.

Um corpo que executa movimento periódico encontra-se sempre em uma posição de equilíbrio estável. Quando ele é deslocado dessa posição e libertado, surge uma força ou um torque que o faz retornar à sua posição de equilíbrio. Quando ele atinge esse ponto, entretanto, pelo fato de haver acumulado energia cinética, ele o ultrapassa, parando em algum ponto do outro lado e sendo novamente puxado para sua posição de equilíbrio. Imagine uma bola rolando para a frente e para trás no interior de um recipiente côncavo, ou um pêndulo que oscila de um lado para o outro passando por sua posição de equilíbrio na vertical.

Neste capítulo concentraremos nossa atenção em dois exemplos simples de sistemas que executam movimentos periódicos: o sistema massa-mola e o pêndulo. Também estudaremos por que as oscilações diminuem de intensidade com o tempo e por que algumas oscilações podem se superpor e construir deslocamentos cada vez maiores quando forças periódicas atuam sobre o sistema.

13.1 Causas da oscilação

Na Figura 13.1 vemos um dos sistemas mais simples que podem executar um movimento periódico. Um corpo de massa m está em repouso sobre um trilho horizontal sem atrito, tal como no caso de um trilho de ar linear, de modo que ele pode se mover apenas ao longo do eixo Ox. A mola presa ao corpo possui massa desprezível e pode ser comprimida ou esticada. A extremidade esquerda da mola é mantida fixa e sua extremidade direita está presa ao corpo. A força da mola é a única força horizontal que atua sobre o corpo, a força vertical normal sempre anula a força gravitacional.

Figura 13.1 Um sistema que pode ter movimento periódico.

É mais simples definir o sistema de coordenadas com a origem O na posição de equilíbrio para a qual a mola não está esticada nem comprimida. Então x fornece o componente x do vetor **deslocamento** do corpo a partir da posição de equilíbrio e também indica a variação de comprimento da mola. O componente x da aceleração a_x é dado por $a_x = F_x/m$.

A Figura 13.2 mostra diagramas do corpo livre para as três diferentes posições da mola. Quando o corpo é deslocado da posição de equilíbrio da mola, a força da mola tende a fazer o corpo voltar para a posição de equilíbrio. Chamamos essa força de **força restauradora**. Uma oscilação ocorre somente quando existe uma força restauradora que obriga o sistema a voltar para a sua posição de equilíbrio.

Vamos analisar como as oscilações ocorrem nesse sistema. Quando deslocamos o corpo para a direita até a posição $x = A$ e a seguir o libertamos, a força resultante e a aceleração são orientadas para a esquerda (Figura 13.2a). A velocidade aumenta até o corpo atingir a posição de equilíbrio O. Quando o corpo está no ponto O, a força resultante que atua sobre ele é igual a zero, mas devido ao seu movimento, ele *ultrapassa* a posição de equilíbrio. No outro lado da posição de equilíbrio, a velocidade do corpo está orientada para a esquerda, porém sua aceleração está orientada para a direita (Figura 13.2c); conseqüentemente, a velocidade diminui até o corpo parar. Mostraremos mais adiante que, no caso da mola ideal, o corpo para no ponto $x = -A$. A seguir o corpo acelera para a direita, ultrapassa novamente a posição de equilíbrio e pára no ponto $x = A$, pronto para repetir todo o processo. O corpo está oscilando! Caso não existisse atrito nem outra força capaz de remover a energia mecânica do sistema, esse movimento se repetiria eternamente; a força restauradora obrigaria sempre o corpo a voltar para a sua posição de equilíbrio e todas as vezes ele ultrapassaria essa posição.

Em cada caso, a força pode depender do deslocamento x de diferentes modos. Entretanto, as oscilações *sempre* ocorrem quando existe uma força *restauradora* que obriga o sistema a voltar para a sua posição de equilíbrio.

Período, frequência e frequência angular

A seguir definimos alguns termos que serão usados na discussão de todos os tipos de movimentos periódicos.

A **amplitude** do movimento, designada por A, é o módulo máximo do vetor deslocamento do corpo a partir

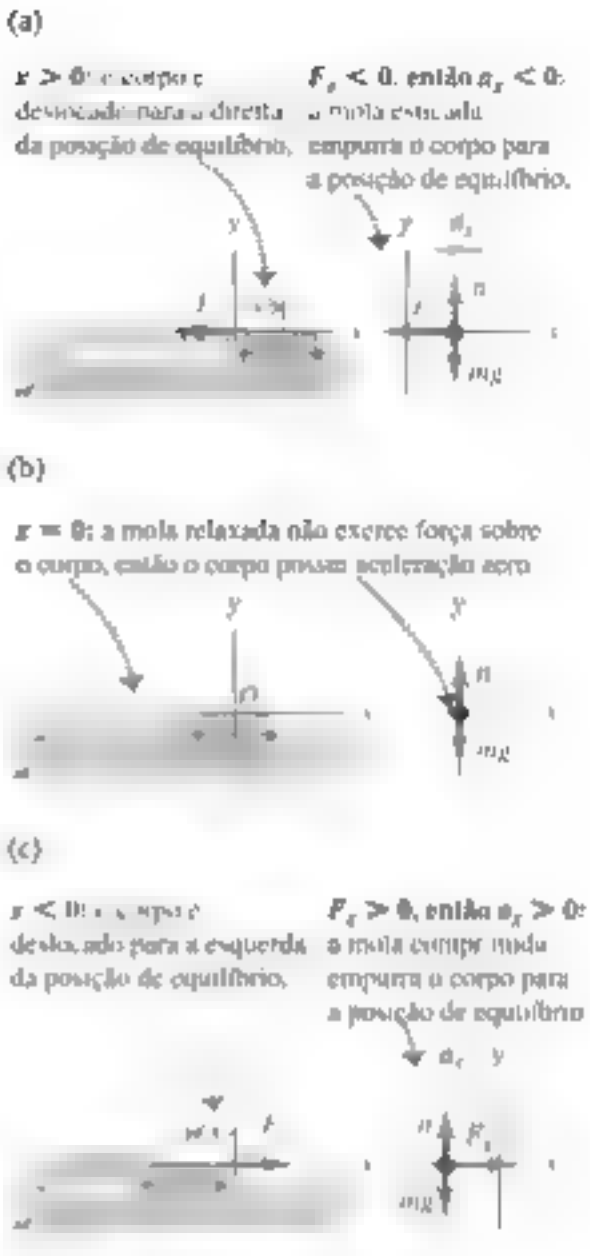


Figura 13.2 Exemplo de um movimento periódico. Quando o corpo é deslocado de sua posição de equilíbrio em $x = 0$, a mola exerce uma força restauradora que o leva de volta à posição de equilíbrio.

da posição de equilíbrio; isto é, o valor máximo de $|x|$. Ela é sempre positiva. Quando a mola da Figura 13.2 for ideal, a amplitude total do movimento será $2A$. A unidade SI de A é o metro. O **ciclo** é uma oscilação completa, digamos de A até $-A$ e retornando ao ponto A, ou de O até A, de volta a O, seguindo até $-A$ e retornando a O. Note que o movimento de uma extremidade a outra (digamos, de A até $-A$) constitui um hemiciclo e não um ciclo completo.

O **período**, T, é o tempo correspondente a um ciclo. Ele é sempre positivo. A unidade SI é o segundo, porém algumas vezes ele é expresso em "segundos por ciclo".

A **frequência**, f, é o número de ciclos na unidade de tempo. Ela é sempre positiva. A unidade SI de frequência é o hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Essa unidade foi assim designada em homenagem ao físico alemão Heinrich Hertz (1857–1894), um pioneiro nas investigações das ondas eletromagnéticas.

A **frequência angular**, ω, é 2π vezes a frequência:

$$\omega = 2\pi f$$

Em breve veremos porque ω é uma grandeza útil. Ela representa uma taxa de variação de uma grandeza angular (não necessariamente relacionada ao movimento de rotação) que é sempre medida em radianos, portanto ela possui unidades de rad/s. Uma vez que f é em ciclo/s, podemos interpretar o fator 2π como se tivesse unidade de rad/ciclo.

Pelas definições do período T e da frequência f, vemos que cada uma dessas grandezas é o inverso da outra:

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$

(relações entre frequência e período) (13.1)

Além disso, da definição de ω,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

(frequência angular) (13.2)

Exemplo 13.1

Um transdutor ultra-sônico (uma espécie de alto-falante), usado para diagnóstico médico, oscila com uma frequência igual a 6,7 MHz = $6{,}7 \times 10^6$ Hz. Quanto dura uma oscilação e qual é a frequência angular?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as variáveis procuradas são o período T e a frequência angular ω.

PREPARAR: temos a frequência f, portanto podemos achar as variáveis que desejamos usando as equações (13.1) e (13.2).

EXECUTAR: usando as equações (13.1) e (13.2), obtemos

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6{,}7 \times 10^6\ \text{Hz}} = 1{,}5 \times 10^{-7}\ \text{s} = 0{,}15\ \mu\text{s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(6{,}7 \times 10^6\ \text{Hz})$$
$$= (2\pi\ \text{rad/ciclo})(6{,}7 \times 10^6\ \text{ciclo/s})$$
$$= 4{,}2 \times 10^7\ \text{rad/s}$$

AVALIAR: trata-se de uma vibração muito rápida, com valores elevados de f e ω e um valor pequeno para T. Em uma vibração lenta, f e ω são pequenos, e T é elevado.

Teste sua compreensão da Seção 13.1 Um corpo como o mostrado na Figura 13.2 oscila para a frente e para trás. Para cada um dos seguintes valores da velocidade v_x e da aceleração a_x do corpo ao longo do eixo Ox, diga se o deslocamento x é positivo, negativo ou zero. (a) $v_x > 0$ e $a_x > 0$; (b) $v_x > 0$ e $a_x < 0$; (c) $v_x < 0$ e $a_x > 0$; (d) $v_x < 0$ e $a_x < 0$; (e) $v_x = 0$ e $a_x < 0$; (f) $v_x > 0$ e $a_x = 0$. ■

13.2 Movimento harmônico simples

O tipo mais simples de oscilação ocorre quando a força restauradora F_x *é diretamente proporcional* ao deslocamento x da posição de equilíbrio. Isso ocorre quando a mola das figuras 13.1 e 13.2 é ideal, ou seja, quando ela obedece à lei de Hooke. A constante de proporcionalidade k entre F_x e x é a constante da força ou constante k da mola. (Talvez você queira rever a lei de Hooke e a definição da constante da mola na Seção 6.3.) Nos dois lados da posição de equilíbrio, F_x e x possuem sempre sinais opostos. Na Seção 6.3 representamos a força que atua *sobre* a mola por $F_x = kx$. O componente x da força que a mola exerce *sobre o corpo* possui esse mesmo módulo, porém com sinal contrário, logo o componente x da força F_x que a mola exerce sobre o corpo é

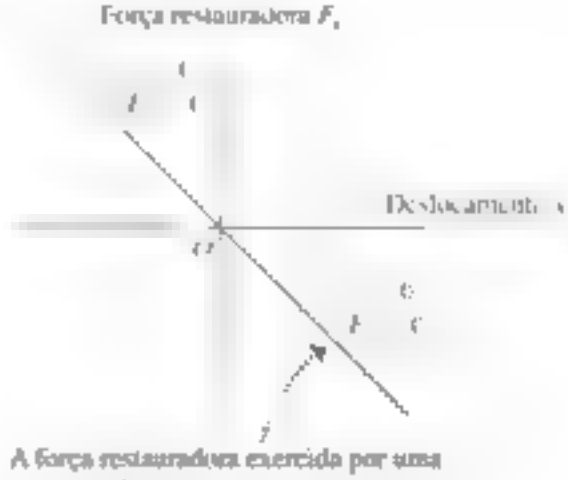
$$F_x = -kx \text{ (força restauradora exercida pela mola ideal)} \quad (13.3)$$

Essa relação fornece corretamente o módulo e o sinal da força, independentemente do valor de x ser positivo, negativo ou nulo. A constante da mola k é sempre positiva e suas unidades são N/m ou kg/s^2. Supondo que não exista atrito, a Equação (13.3) fornece a força *resultante* sobre o corpo.

Quando a força restauradora é diretamente proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio, conforme indicado na Equação (13.3), a oscilação denomina-se **movimento harmônico simples**, abreviado por **MHS**. A aceleração $a_x = d^2x/dt^2 = F_x/m$ de um corpo que executa um MHS é dada por

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \text{ (movimento harmônico simples)} \quad (13.4)$$

O sinal negativo indica que a aceleração possui sempre sentido contrário ao do deslocamento. Essa aceleração *não* é constante, portanto nem pense em usar as fórmulas deduzidas no Capítulo 2 (*Física I*) para o movimento com aceleração constante. Brevemente mostraremos como resolver essa equação para encontrar o deslocamento x em função do tempo. Um corpo que executa um movimento harmônico simples constitui um **oscilador harmônico**.



A força restauradora exercida por uma mola ideal é diretamente proporcional ao deslocamento (lei de Hooke: $F_x = -kx$) e o gráfico de F_x em função de x é uma linha reta.

Figura 13.3 Uma mola ideal exerce uma força restauradora que obedece à lei de Hooke, $F_x = -kx$. Uma oscilação com uma força restauradora desse tipo é chamada de movimento harmônico simples.

Figura 13.4 Em muitas oscilações reais, a lei de Hooke se aplica desde que o corpo não se afaste muito da posição de equilíbrio. Em tal caso, as oscilações de pequena amplitude podem ser consideradas aproximadamente como harmônicas simples.

Por que o movimento harmônico simples é tão importante? Não se esqueça de que nem todos os movimentos periódicos constituem um movimento harmônico simples; em movimentos periódicos em geral, a força restauradora depende do deslocamento de modo mais complicado do que o indicado na Equação (13.3). Contudo, em muitos sistemas a força restauradora é *aproximadamente* proporcional ao deslocamento no caso de ele ser suficientemente pequeno (Figura 13.4). Ou seja, no caso de uma amplitude suficientemente pequena, as oscilações do sistema constituem aproximadamente um movimento harmônico simples que pode ser descrito pela Equação (13.4). Logo, podemos notar que o MHS é um modelo simples para descrever diversos tipos de movimentos periódicos, tais como a vibração de um cristal de quartzo em um relógio, o movimento de um diapasão, a corrente elétrica em um circuito de corrente alternada e as vibrações dos átomos nas moléculas e nos sólidos.

Movimento circular e as equações do movimento harmônico simples

Para explorar as propriedades do movimento harmônico simples, devemos representar a distância x do corpo que oscila em função do tempo, $x(t)$. A segunda derivada dessa função, d^2x/dt^2, deve ser igual a $(-k/m)$ multiplicada pela própria função, conforme exigido pela Equação (13.4). Como já dissemos, as fórmulas deduzidas na Seção 2.4 não servem para este caso, porque a aceleração varia constantemente à medida que x varia. Em vez disso, deduziremos uma expressão para $x(t)$ usando uma impressionante semelhança entre o MHS e um outro movimento que já estudamos em detalhe.

A Figura 13.5a mostra a vista do topo de um disco horizontal de raio A com uma bola presa em sua periferia no ponto Q. O disco gira com velocidade angular ω constante (dada em rad/s), de modo que a bola gira com movimento circular uniforme. Um feixe de luz horizontal ilumina o disco que gira e projeta sua sombra sobre uma tela. A sombra do ponto P oscila para a frente e para trás enquanto a bola percorre a circunferência. Agora colocamos um corpo na extremidade de uma mola ideal, como indicado nas figuras 13.1 e 13.2, de modo que o corpo oscile paralelamente à direção do deslocamento da sombra. Mostraremos que o movimento desse corpo e o movimento da sombra são *idênticos* quando a amplitude do movimento do corpo é igual ao raio A do disco, e que a frequência angular $2\pi f$ do corpo oscilante é igual à velocidade angular ω do disco que gira. Ou seja, *o movimento harmônico simples é a projeção de um movimento circular uniforme sobre um diâmetro do círculo.*

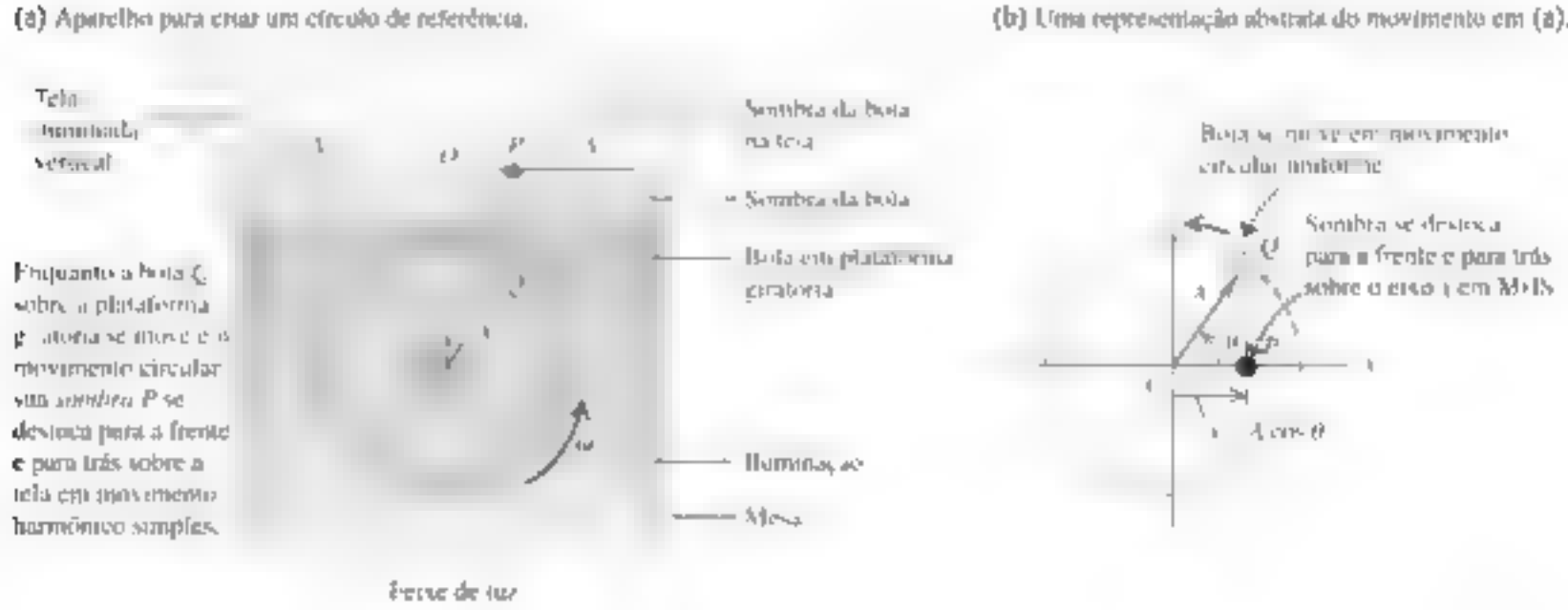

(a) Aparelho para criar um círculo de referência.
(b) Uma representação abstrata do movimento em (a).
Tela
Sombra da bola na tela
Sombra da bola
Bola em plataforma giratória
Enquanto a bola Q sobre a plataforma giratória se move em movimento circular uniforme, a sombra P se desloca para a frente e para trás sobre a tela em movimento harmônico simples.
Iluminação
Mesa
Feixe de luz
Bola se move em movimento circular uniforme
Sombra se desloca para a frente e para trás sobre o eixo x em MHS
A cos θ

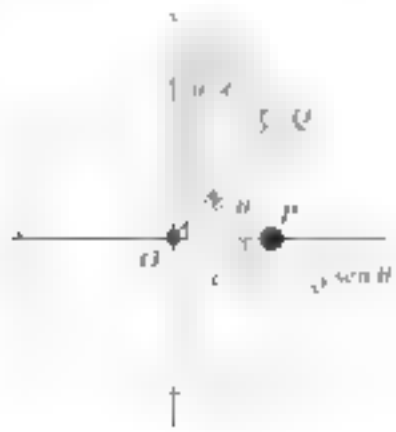
Figura 13.5 (a) Relação entre o movimento circular uniforme e o movimento harmônico simples. (b) A sombra da bola se move exatamente como um corpo oscilando em uma mola ideal.

Podemos verificar essa importante conclusão determinando a aceleração da sombra no ponto P e comparando o resultado com a aceleração de um corpo que executa um MHS, dada a Equação (13.4). O círculo, ao longo do qual a bola se move de modo que sua projeção se superpõe à do movimento oscilatório do corpo, denomina-se **círculo de referência**; chamaremos o ponto Q de *ponto de referência*. Consideramos o círculo de referência contido em um plano xy, com a origem O no centro do círculo (Figura 13.5b). No instante t, o vetor OQ que liga a origem ao ponto Q faz um ângulo θ com o sentido positivo do eixo Ox. À medida que o ponto Q percorre o círculo de referência com velocidade angular ω constante, o vetor OQ gira com a mesma velocidade angular. Esse vetor girante denomina-se **fasor**. (Esse termo era usado muito antes do termo "phaser" ter sido popularizado pelo seriado "Jornada nas Estrelas" como o nome de uma arma paralisante.) O método dos fasores é útil em diversas partes da física. Utilizaremos fasores ao estudarmos circuitos de corrente alternada no Capítulo 31 — *Física III* — e ao analisarmos a interferência da luz nos capítulos 35 e 36 — *Física IV*.)

O componente x do fasor no instante t nada mais é do que a coordenada x do ponto Q.

$$x = A\cos\theta \tag{13.5}$$

(a) Usando o círculo de referência para determinar a velocidade ao longo do eixo Ox do ponto P



(b) Usando o círculo de referência para determinar a aceleração ao longo do eixo Ox do ponto P

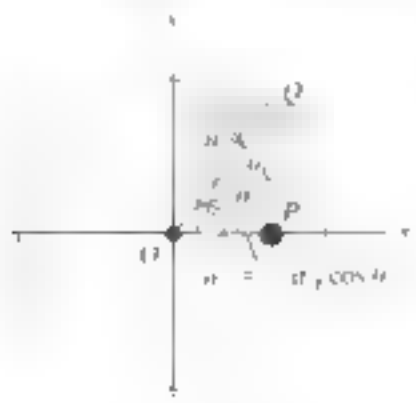


Figura 13.6 A (a) velocidade e (b) a aceleração da sombra da bola P (veja a Figura 13.5) são os componentes x respectivamente dos vetores velocidade e aceleração da bola Q

Essa relação também fornece a coordenada x da sombra P, que é a *projeção* do ponto Q sobre o eixo Ox. Portanto, a velocidade da sombra P ao longo do eixo Ox é igual ao componente x do vetor velocidade do ponto de referência Q (Figura 13.6a) e a aceleração da sombra P ao longo do eixo Ox é igual ao componente x do vetor aceleração do ponto de referência Q (Figura 13.6b). Visto que o ponto Q possui movimento circular uniforme, o vetor aceleração $\vec{a}_Q$ está sempre orientado para o ponto O. Além disso, o módulo de $\vec{a}_Q$ é constante e dado pelo quadrado da velocidade angular multiplicado pelo raio do círculo (ver a Seção 9.3):

$$a_Q = \omega^2 A \tag{13.6}$$

A Figura 13.6b mostra que o componente x de $\vec{a}_Q$ é dado por $a_x = -a_Q\cos\theta$. Combinando esse resultado com as equações (13.5) e (13.6), obtemos a aceleração do ponto P na forma

$$a_x = -a_Q\cos\theta = -\omega^2 A\cos\theta \quad \text{ou} \tag{13.7}$$

$$a = -\omega^2 x \tag{13.8}$$

A aceleração do ponto P é diretamente proporcional ao deslocamento x e possui sempre sentido contrário a ele. Essas são precisamente as características básicas do movimento harmônico simples.

A Equação (13.8) é *exatamente* igual à Equação (13.4), que fornece a aceleração de um movimento harmônico simples, desde que a velocidade angular ω do ponto de referência Q esteja relacionada à constante da mola k e à massa m do corpo que oscila por

$$\omega = \frac{k}{m} \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.9}$$

Temos usado o mesmo símbolo ω para a *velocidade* angular do ponto de referência Q e para a *frequência* angular do ponto oscilante P. Isso é feito porque essas grandezas são iguais! Se o ponto Q executa uma revolução completa no tempo T, então o ponto P realiza o ciclo completo da oscilação no mesmo intervalo de tempo; portanto, T é o período da oscilação. Durante o tempo T, o ponto Q se move 2π radianos, logo sua velocidade angular é $\omega = 2\pi/T$. Porém, esse resultado é exatamente igual à Equação (13.2), que fornece a frequência angular do ponto P, confirmando nossa afirmação acerca da interpretação de ω. Essa foi a razão pela qual introduzimos o conceito de frequência angular na Seção 13.1; essa é a grandeza que estabelece a conexão entre a oscilação e o movimento circular uniforme. Logo, podemos interpretar novamente a Equação (13.9) como uma relação para a frequência angular de um corpo de massa m que executa um movimento harmônico simples sobre o qual atua uma força restauradora com uma constante da mola k.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(movimento harmônico simples)} \quad (13.10)$$

Quando você inicia um corpo oscilando em MHS, não é você quem escolhe o valor de ω; ele é predeterminado pelos valores de k e de m. As unidades de k são N/m ou kg/s^2 logo k/m possui unidades de (kg/s^2)/kg = s^{-2}. Quando extraímos a raiz quadrada da Equação (13.10), obtemos s^{-1} ou, mais apropriadamente, rad/s, porque se trata de uma freqüência *angular* (lembre-se de que radiano não é uma unidade verdadeira).

De acordo com as equações (13.1) e (13.2), a frequência f e o período T são

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(movimento harmônico simples)} \quad (13.11)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(movimento harmônico simples)} \quad (13.12)$$

Com a Equação (13.12) notamos que para um corpo de massa m maior, com maior inércia, a aceleração é menor; ele se move mais lentamente e leva um tempo maior para completar um ciclo (Figura 13.7). Em contraste, quando a mola é mais dura (possuindo um valor elevado da constante da mola k), a força exercida é maior para a mesma deformação x, produzindo aceleração mais elevada, velocidade maior e um tempo T menor por ciclo.

ATENÇÃO Não confunda freqüência e freqüência angular Você poderá se atrapalhar caso não saiba a diferença entre a freqüência f e a freqüência angular $\omega = 2\pi f$. A freqüência informa o número de ciclos por segundo, enquanto a freqüência angular informa o número de radianos por segundo correspondente ao círculo de referência. Ao resolver um problema, verifique cuidadosamente se o objetivo é achar f ou ω.

Período e amplitude no MHS

As equações (13.11) e (13.12) mostram que o período e a freqüência do movimento harmônico simples são completamente determinados pela massa m e pela constante da mola k. *No movimento harmônico simples, o período e a freqüência não dependem da amplitude A.* Para dados valores de k e de m, o tempo de uma oscilação completa não depende do fato de a amplitude ser pequena ou grande. A Equação (13.3) mostra por que essa conclusão deveria ser esperada. Um valor maior de A implica também uma força restauradora maior, porque $|x|$ é maior. Isso faz aumentar a velocidade média ao longo de um ciclo completo, compensando a distância maior a ser percorrida e resultando no mesmo tempo total.

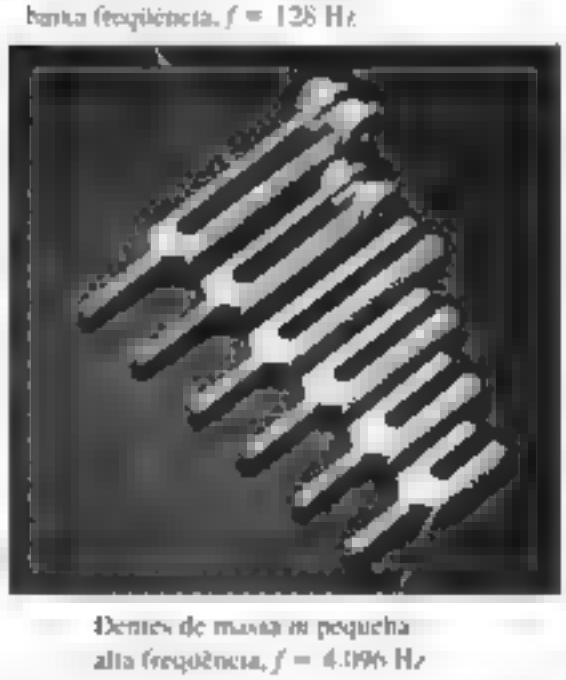


Figura 13.7 Quanto maior a massa m de cada dente de um diapasão, menor será a freqüência da oscilação: $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$.

As vibrações de um diapasão constituem aproximadamente um movimento harmônico simples, o que significa que sua frequência não depende de sua amplitude. Essa é a razão pela qual o diapasão é usado como padrão para identificar a altura de um som musical. Se não fosse por essa característica do movimento harmônico simples, seria impossível fazer os relógios mecânicos e eletrônicos que conhecemos funcionarem com precisão, ou tocar a maior parte dos instrumentos musicais de modo afinado. Quando você encontrar um corpo oscilando com um período que *dependa* da amplitude, a oscilação *não* corresponderá a um movimento harmônico simples.

Exemplo 13.2

FREQUÊNCIA, FREQUÊNCIA ANGULAR E PERÍODO NO MHS A extremidade esquerda de uma mola horizontal é mantida fixa. Ligamos um dinamômetro na extremidade livre da mola e puxamos para a direita (Figura 13.8a), verificamos que a força que estica a mola é proporcional ao deslocamento e que uma força de 6,0 N produz um deslocamento igual a 0,030 m. A seguir removemos o dinamômetro e amarramos a extremidade livre a um corpo de 0,50 kg, puxamos o corpo até uma distância de 0,020 m e o libertamos e observamos o MHS resultante (Figura 13.8b). a) Calcule a constante da mola. b) Calcule a freqüência, a freqüência angular e o período da oscilação.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como a força da mola (igual em módulo à força que estica a mola) é proporcional ao deslocamento, o movimento é harmônico simples.

PREPARAR: encontramos o valor da constante da mola k usando a lei de Hooke, Equação (13.3), e os valores de ω, f e T por meio das equações (13.10), (13.11) e (13.12), respectivamente.

EXECUTAR: a) Quando $x = 0{,}030$ m, a força que a mola exerce sobre o dinamômetro é $F = -6{,}0$ N. Usando a Equação (13.3),

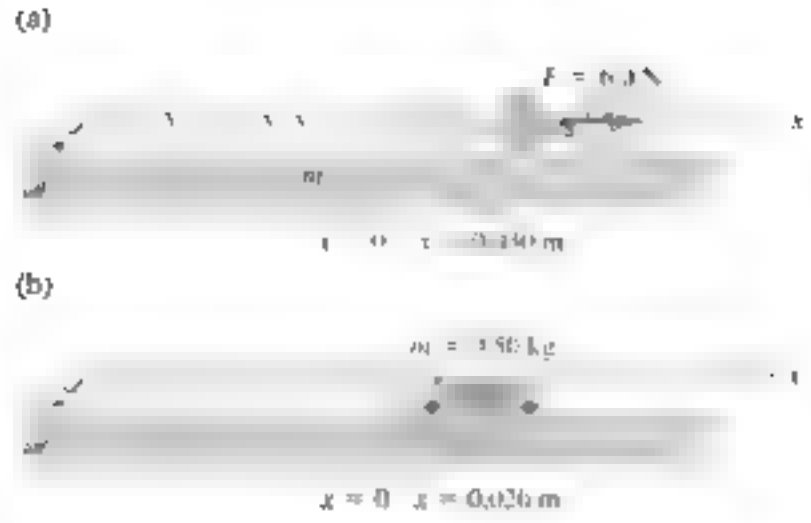
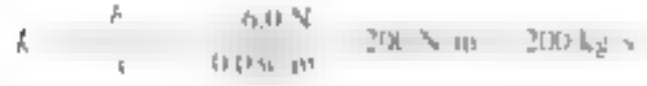


Figura 13.8 (a) A força exercida sobre a mola (indicada pelo vetor $\vec{F}$) possui um componente no eixo Ox igual a $F_x = 6{,}0$ N. A força exercida *pela* mola possui um componente no eixo Ox é igual a $F_x = -6{,}0$ N. (b) Um corpo é preso à mesma mola e pode oscilar livremente



b) Substituindo $m = 0{,}50$ kg na Equação (13.10), encontramos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\ \text{kg/s}^2}{0{,}50\ \text{kg}}} = 20\ \text{rad/s}$$

A freqüência f é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/ciclo}} = 3{,}2\ \text{ciclo/s} = 3{,}2\ \text{Hz}$$

O período T é o inverso da freqüência f,

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3{,}2\ \text{ciclo/s}} = 0{,}31\ \text{s}$$

O período é geralmente expresso em "segundos" em vez de "segundos por ciclo".

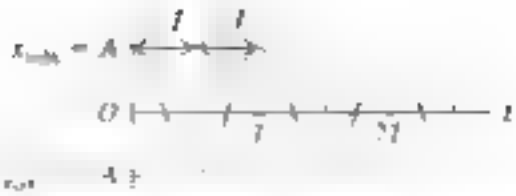


Figura 13.9 [illegible]

AVALIAR A amplitude da oscilação é igual a 0,020 m, que corresponde à deformação inicial da mola quando puxamos o corpo para a direita antes de liberá-lo. Não precisamos usar essa informação para achar a frequência, a freqüência angular e o período, porque em um MHS nenhuma dessas grandezas depende da amplitude

Deslocamento, velocidade e aceleração no MHS

Precisamos achar o deslocamento x em função do tempo para um oscilador harmônico. A Equação (13.4) para um corpo que descreve um movimento harmônico simples ao longo do eixo Ox é idêntica à Equação (13.8) para a coordenada x de um ponto de referência que descreve um movimento circular uniforme com uma velocidade angular constante dada por $\omega = \sqrt{k/m}$. Da Equação (13.5), vemos que $x = A\cos\theta$ descreve a coordenada x em ambas as situações. Se em $t = 0$ o fator OQ faz um ângulo ϕ com o sentido positivo do eixo Ox, então para qualquer outro instante posterior t esse ângulo é dado por $\theta = \omega t + \phi$. Substituindo na Equação (13.5), obtemos

$$x = A\cos(\omega t + \phi)\ \text{(deslocamento no MHS)} \qquad (13.13)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$. A Figura 13.9 mostra um gráfico da Equação (13.13) para o caso particular $\phi = 0$. O deslocamento x é uma função periódica do tempo, conforme seria de se esperar em um MHS. Mediante a relação $\cos\alpha = \text{sen}(\alpha + \pi/2)$, poderíamos também ter escrito a Equação (13.13) em termos de uma função senoidal em vez de usar o co-seno. *No movimento harmônico simples, o deslocamento é uma função do tempo senoidal periódica.* Existem muitas funções periódicas, contudo nenhuma delas é tão simples quanto uma função seno ou co-seno.

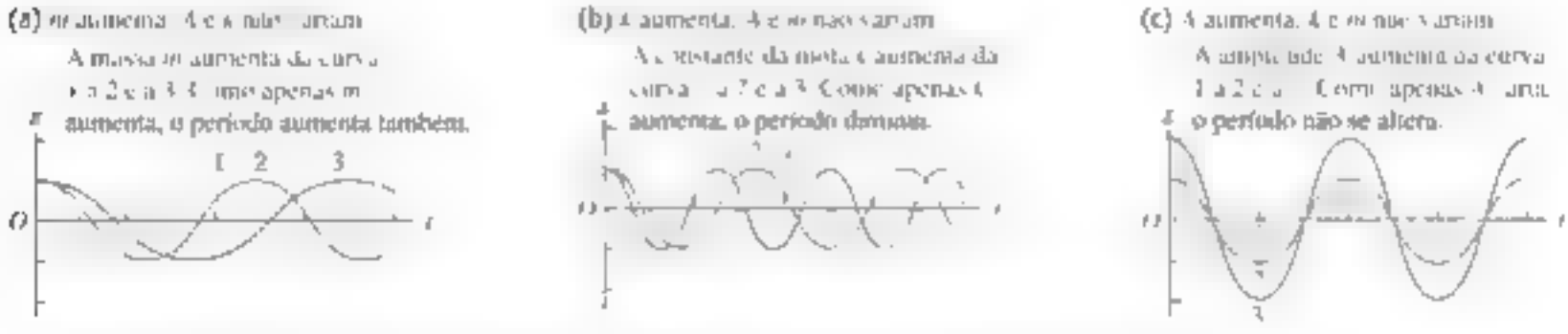

(a) ω aumenta, A e x não variam
A massa m aumenta da curva 1 para a 2 e a 3. Como apenas m aumenta, o período aumenta também.
(b) A aumenta, A e ω não variam
A constante da mola k aumenta da curva 1 para a 2 e a 3. Como apenas k aumenta, o período diminui.
(c) A aumenta, k e m não variam
A amplitude A aumenta da curva 1 para a 2 e a 3. Como apenas A aumenta, o período não se altera.

Figura 13.10 Variações em um movimento harmônico simples. Todos os casos indicados são para $\phi = 0$.

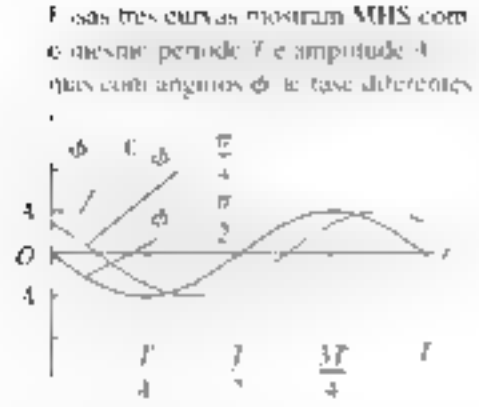


Figura 13.11 Variações do MHS: deslocamento em função do tempo para o mesmo oscilador harmônico com diferentes ângulos ϕ de fase.

O valor da função co-seno está sempre compreendido entre –1 e +1. Assim, na Equação (13.13), o valor de x está sempre entre $-A$ e $+A$, o que confirma que A é a amplitude do movimento. O período T corresponde ao tempo de um ciclo completo da oscilação. A função co-seno se repete todas as vezes que a quantidade entre parênteses na Equação (13.13) aumenta de 2π radianos. Logo, se começamos no instante $t = 0$, o tempo T necessário para completar um ciclo é dado por

$$\omega T = \sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \qquad \text{ou} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

que é exatamente a Equação (13.12). Fazendo-se variar m ou k, o período da oscilação varia, conforme indicado nas figuras 13.10a e 13.10b.

A constante ϕ indicada na Equação (13.13) denomina-se **ângulo de fase**. Ela nos informa em que ponto do ciclo o movimento se encontrava em $t = 0$ (equivalente a dizer em que ponto da circunferência estava o ponto Q em $t = 0$). Vamos designar por x_0 a posição em $t = 0$. Substituindo $t = 0$ e $x = x_0$ na Equação (13.13), obtemos

$$x_0 = A\cos\phi \tag{13.14}$$

Se $\phi = 0$, então $x_0 = A\cos 0 = A$, e o corpo começa em seu deslocamento positivo máximo. Se $\phi = \pi$, então $x_0 = A\cos\pi = -A$, e o corpo começa em seu deslocamento *negativo* máximo. Se $\phi = \pi/2$, então $x_0 = A\cos(\pi/2) = 0$, e o corpo está inicialmente na origem. A Figura 13.11 mostra o deslocamento x em função do tempo para diferentes ângulos de fase.

Achamos a velocidade v_x e a aceleração a_x em função do tempo para um movimento harmônico simples derivando a Equação (13.13) em relação ao tempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

(velocidade no MHS) (13.15)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

(aceleração no MHS) (13.16)

A velocidade v_x oscila entre os valores $v_{máx} = +\omega A$ e $-v_{máx} = -\omega A$, e a aceleração a_x oscila entre os valores $a_{máx} = +\omega^2 A$ e $-a_{máx} = -\omega^2 A$ (Figura 13.12). Comparando a Equação (13.16) com a Equação (13.13) e lembrando da Equação (13.9) em que $\omega^2 = k/m$, vemos que

$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$

que é exatamente a Equação (13.4) do movimento harmônico simples. Isso confirma a validade da Equação (13.13) para x em função do tempo.

Na realidade, já havíamos deduzido a Equação (13.16) de forma geométrica considerando o componente x do vetor aceleração do ponto de referência Q. Isso foi feito na Figura 13.6b e na Equação (13.7) (lembre-se de que $\theta = \omega t + \phi$). Do mesmo modo, poderíamos ter deduzido a Equação (13.15) tomando o componente x do vetor velocidade de Q, conforme indicado na Figura 13.6b. Deixaremos os detalhes para você resolver (ver o Problema 13.85).

Note que o gráfico senoidal do deslocamento em função do tempo (Figura 13.12a) está deslocado em um quarto de período em relação ao gráfico da velocidade em função do tempo (Figura 13.12b) e em meio período do gráfico da

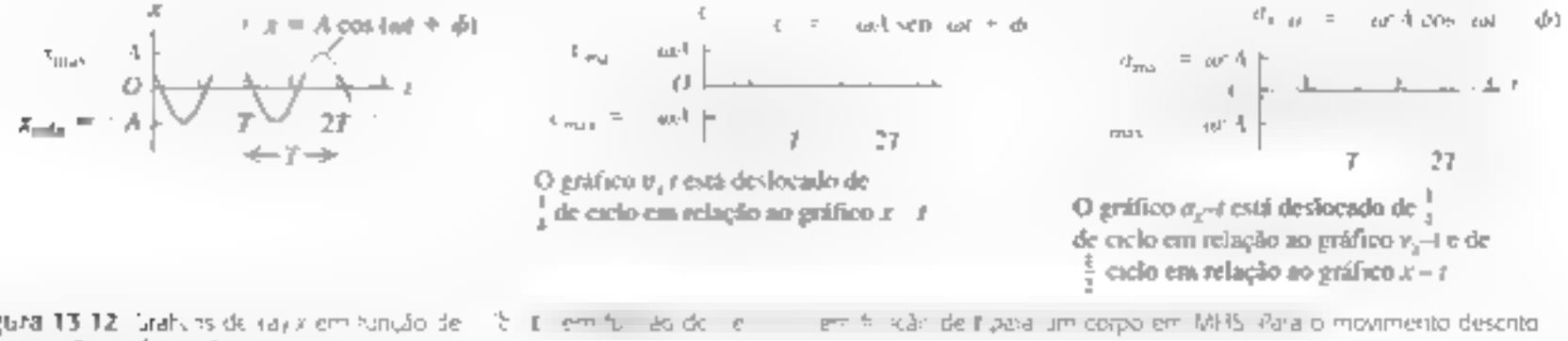

(a) Deslocamento x em função do tempo t
x = A cos(ωt + ϕ)
A
O
−A
T
2T
(b) Velocidade v_x em função do tempo t
O gráfico v_x–t está deslocado de 1/4 de ciclo em relação ao gráfico x – t
(c) Aceleração a_x em função do tempo t
O gráfico a_x–t está deslocado de 1/4 de ciclo em relação ao gráfico v_x–t e de 1/2 ciclo em relação ao gráfico x – t

Figura 13.12 Gráficos de (a) x em função de t, (b) v_x em função de t e (c) a_x em função de t para um corpo em MHS. Para o movimento descrito nestes gráficos, $\phi = \pi/3$.

aceleração em função do tempo (Figura 13.12c). A Figura 13.3 mostra por que isso acontece. Quando o corpo está passando pela posição de equilíbrio, de modo que seu deslocamento é igual a zero, sua velocidade será $v_{máx}$ ou $-v_{máx}$ (dependendo do sentido do movimento do corpo) e sua aceleração é igual a zero. Quando o corpo está no seu ponto de deslocamento máximo, $x = +A$, ou no seu ponto de deslocamento negativo máximo, $x = -A$, sua velocidade é nula, e o corpo fica momentaneamente em repouso. Nesses pontos, a força restauradora $F_x = -kx$ e a aceleração do corpo possuem os módulos máximos. Em $x = +A$, a aceleração é negativa e igual $-a_{máx}$. Em $x = -A$, a aceleração é positiva: $a_x = a_{máx}$.

Conhecendo-se a posição inicial x_0 e a velocidade inicial v_{0x} de um corpo oscilante, podemos determinar a amplitude A e a fase ϕ. Vejamos como fazer isso. A velocidade inicial v_{0x} é a velocidade no tempo $t = 0$; substituindo $t = t_0 = 0$ na Equação (13.15), temos

$$v_{0x} = -\omega A \operatorname{sen} \phi \qquad (13.17)$$

Para achar ϕ, divida a Equação (13.17) pela Equação (13.14). Essa divisão elimina A, e a seguir podemos explicitar ϕ.

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A \operatorname{sen} \phi}{A \cos \phi} = -\omega \operatorname{tg} \phi$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) \qquad \text{(ângulo de fase no MHS)} \quad (13.18)$$

Também é fácil achar A quando conhecemos x_0 e v_{0x}. Vamos esquematizar a dedução e você acrescentará os detalhes. Eleve ao quadrado a Equação (13.14); divida a Equação (13.17) por ω, eleve o resultado ao quadrado e some com o quadrado da Equação (13.14). O membro direito será igual a $A^2(\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi)$, que é igual a A^2. O resultado final é

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}} \qquad \text{(amplitude no MHS)} \quad (13.19)$$

Note que, quando o corpo apresenta tanto uma posição inicial x_0 quanto uma velocidade inicial v_{0x} diferente de zero, a amplitude A *não* é igual ao deslocamento inicial. Isso é razoável; se o corpo está na posição inicial positiva x_0 e você fornece a ele uma velocidade inicial v_{0x} positiva, ele deverá ir *além* do ponto x_0 antes de parar e retornar

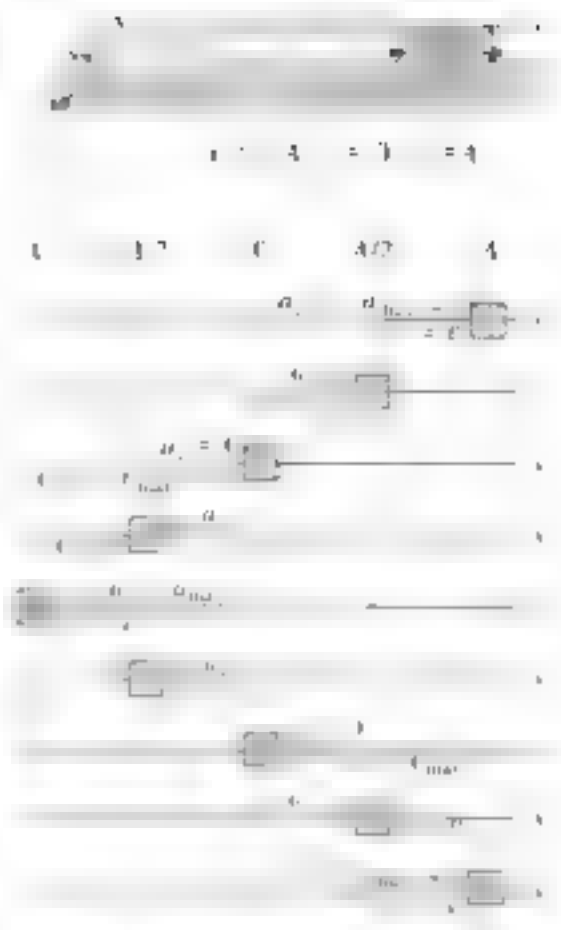


Figura 13.13 Como a velocidade v_x e a aceleração a_x ao longo do eixo Ox variam durante um ciclo de MHS.

tentar usar qualquer das equações desta seção. Como sempre, identifique as variáveis procuradas.

PREPARAR *o problema* seguindo estes passos.

1. Identifique as grandezas conhecidas e as grandezas ignoradas, e verifique quais são as variáveis que se deseja encontrar.
2. É útil distinguir entre dois tipos de grandezas. As *propriedades físicas básicas* do sistema incluem a massa m e a constante da mola k, assim como as grandezas derivadas a partir de m e k, como o período T, a frequência f e a frequência angular ω. As *propriedades físicas do movimento* descrevem como o sistema se comporta quando é colocado em movimento de certa maneira e incluem a amplitude A, a velocidade máxima $v_{máx}$ e o ângulo de fase ϕ, assim como os valores do deslocamento x, da velocidade v_x e da aceleração a_x em um dado instante.
3. Se necessário, defina um eixo Ox como na Figura 13.13, com a posição de equilíbrio em $x = 0$.

EXECUTAR *a solução* como segue.

1. Use as equações dadas nas seções 13.1 e 13.2 para encontrar as variáveis procuradas.
2. Se você precisar calcular o ângulo de fase, expresse-o em radianos. A grandeza ωt na Equação (13.13) está em radianos, então ϕ também precisa estar.
3. Se você precisar encontrar os valores do deslocamento x, da velocidade v_x e da aceleração a_x em diversos tempos, use as equações (13.13), (13.15) e (13.16), respectivamente. Se tanto a posição inicial x_0 quanto a velocidade inicial v_{0x} forem dadas, você pode calcular o ângulo de fase e a amplitude com as equações (13.18) e (13.19). Se o corpo apresentar um deslocamento inicial positivo x_0, mas uma velocidade inicial nula ($v_{0x} = 0$), então a amplitude é $A = x_0$ e o ângulo de fase é $\phi = 0$. Se o corpo tiver uma posição inicial nula ($x_0 = 0$) e uma velocidade inicial v_{0x} positiva, então a amplitude é dada por $A = v_{0x}/\omega$, e o ângulo de fase é $\phi = -\pi/2$.

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES I
DESCREVENDO O MOVIMENTO

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* Um sistema em oscilação está em movimento harmônico simples (MHS) apenas se a força restauradora for diretamente proporcional ao deslocamento. Certifique-se de ser esse o caso do problema em questão antes de

AVALIAR *sua resposta*. Confira os seus resultados para ter certeza de que são coerentes. Por exemplo, suponha que você tenha usado a posição inicial e a velocidade para encontrar expressões gerais para x e v_x no tempo t. Se você substituir o valor de t fazendo $t = 0$ nessas expressões, você deve retornar aos valores corretos de x_0 e v_{0x}.

Exemplo 13.3

DESCREVENDO UM MHS

Vamos retornar à mola horizontal discutida no Exemplo 13.2. A constante da mola é $k = 200$ N/m, e a mola está ligada a um corpo de massa $m = 0{,}50$ kg. Desta vez, forneceremos ao corpo um deslocamento inicial de +0,015 m e uma velocidade inicial de +0,40 m/s. a) Calcule o período, a amplitude e o ângulo de fase do movimento. b) Escreva equações para o deslocamento, a velocidade e a aceleração em função do tempo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR como no Exemplo 13.2, as oscilações são um MHS e podemos usar as expressões deduzidas nesta seção.

PREPARAR o problema fornece os valores de k, m, x_0 e v_{0x}. Com esses valores, podemos calcular as variáveis procuradas T, A e ϕ, e as expressões para x, v_x e a_x em função do tempo.

EXECUTAR: a) O período é exatamente igual ao obtido no Exemplo 13.2, $T = 0{,}31$ s. Em um movimento harmônico simples o período não depende da amplitude, somente dos valores de k e de m. No Exemplo 13.2, descobrimos que $\omega = 20$ rad/s. Logo, conforme a Equação (13.19),

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}} = \sqrt{(0{,}015\ \text{m})^2 + \frac{(0{,}40\ \text{m/s})^2}{(20\ \text{rad/s})^2}} = 0{,}025\ \text{m}$$

Para achar o ângulo de fase ϕ, usamos a Equação (13.18):

$$\phi = \text{arctg}\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) = \text{arctg}\left(-\frac{0{,}40\ \text{m/s}}{(20\ \text{rad/s})(0{,}015\ \text{m})}\right) = -53° = -0{,}93\ \text{rad}$$

b) O deslocamento, a velocidade e a aceleração em qualquer instante são dados pelas equações (13.13), (13.15) e (13.16), respectivamente. Substituindo os valores, obtemos

$$x = (0{,}025\ \text{m})\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0{,}93\ \text{rad}]$$
$$v_x = (0{,}50\ \text{m/s})\,\text{sen}[(20\ \text{rad/s})t - 0{,}93\ \text{rad}]$$
$$a_x = -(10\ \text{m/s}^2)\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0{,}93\ \text{rad}]$$

A velocidade varia senoidalmente entre −0,50 m/s e +0,50 m/s, e a aceleração varia senoidalmente entre −10 m/s² e +10 m/s².

AVALIAR é possível verificar os resultados de x e v_x em função do tempo fazendo $t = 0$ e calculando o resultado. Você deve obter $x = x_0 = 0{,}015$ m e $v_x = v_{0x} = 0{,}40$ m/s. Confere?

Teste sua compreensão da Seção 13.2 Um corpo está preso a uma mola, como mostra a Figura 13.13. Se o corpo é deslocado para $x = 10{,}0$ m e liberado a partir do repouso no tempo $t = 0$, ele irá oscilar com amplitude $A = 0{,}10$ m e ângulo de fase $\phi = 0$. (a) Suponha agora que em $t = 0$ o corpo esteja em $x = 0{,}10$ m e movendo-se para a direita, conforme a Figura 13.13. Nessas condições, a amplitude é maior, menor ou igual, se comparada ao valor anterior de 0,10 m? E o ângulo de fase é maior do que zero, menor do que zero ou igual a zero? (b) Suponha, desta vez, que em $t = 0$ o corpo esteja em $x = 0{,}10$ m e movendo-se para a esquerda, conforme a Figura 13.13. Nessas condições, a amplitude é maior, menor ou igual, se comparada ao valor anterior de 0,10 m? E o ângulo de fase é maior do que zero, menor do que zero ou igual a zero? ■

13.3 Energia no movimento harmônico simples

Podemos aprender ainda mais sobre o movimento harmônico simples levando em conta aspectos relacionados à energia. Observe novamente o corpo oscilando na extremidade da mola nas figuras 13.2 e 13.13. Já dissemos que a força da mola é a única força horizontal que atua sobre o corpo. A força que a mola ideal exerce sobre um corpo é uma força conservativa, e as forças verticais não realizam trabalho, de modo que a energia mecânica total do sistema é *conservada*. Vamos também supor que a massa da mola seja desprezível.

A energia cinética do corpo é dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, e a energia potencial da mola é $U = \frac{1}{2}kx^2$, tal como na Seção 7.2. (Seria útil fazer uma revisão dessa seção.) Não existe nenhuma força dissipativa realizando trabalho, logo a energia mecânica total $E = K + U$ é conservada:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \qquad (13.20)$$

A energia mecânica total E é também relacionada diretamente com a amplitude A do movimento. Quando o corpo atinge o ponto $x = A$, seu deslocamento máximo a partir do ponto de equilíbrio, ele para momentaneamente e depois retorna ao seu ponto de equilíbrio. Ou seja, quando $x = A$ (ou $x = -A$), $v_x = 0$. Nesse ponto a energia é inteiramente potencial, e $E = \frac{1}{2}kA^2$. Como E é constante, ela permanece sempre igual a $\frac{1}{2}kA^2$ em qualquer outro ponto. Combinando essa expressão com a Equação (13.20), obtemos

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante}$$

(energia mecânica total no MHS) (13.21)

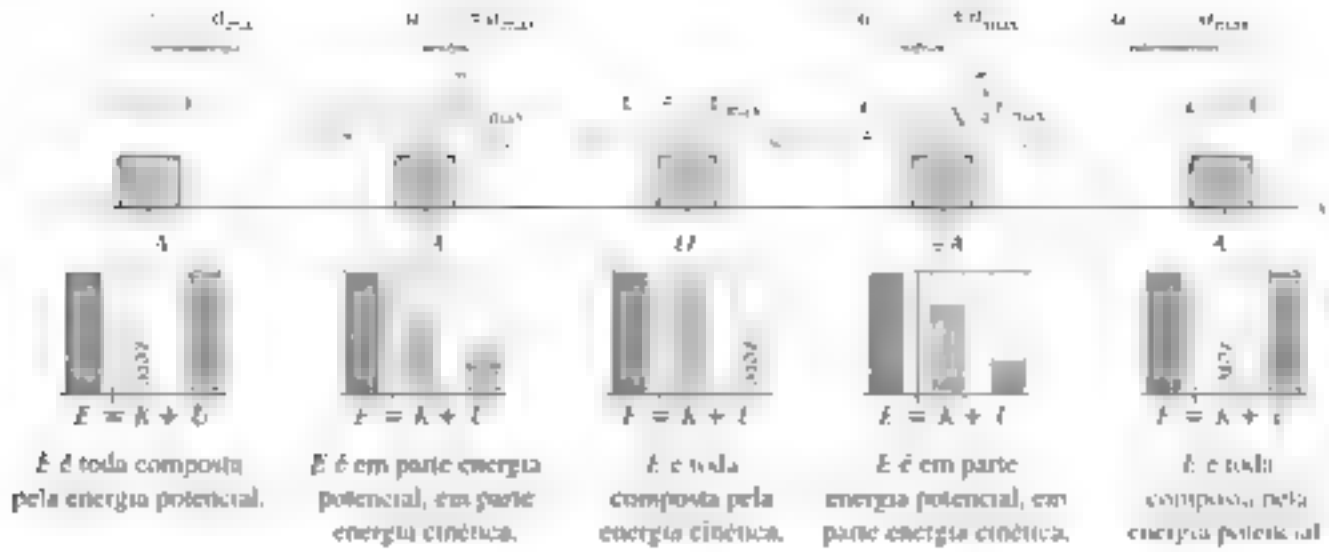

E é toda composta pela energia potencial.
E é em parte energia potencial, em parte energia cinética.
E é toda composta pela energia cinética.
E é em parte energia potencial, em parte energia cinética.
E é toda composta pela energia potencial

Figura 13.14 [illegible] em posições com intervalos espaciais iguais entre si não estão colocadas em intervalos iguais no tempo.

Podemos verificar essa equação substituindo x e v_x, fornecidos pelas equações (13.13) e (13.15), e usando a relação $\omega^2 = k/m$ da Equação (13.11):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}m[-\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)]^2 + \frac{1}{2}k[A\cos(\omega t + \phi)]^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

(Lembre que $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.) Portanto, as nossas expressões para o deslocamento e para a velocidade no movimento harmônico simples são consistentes com a conservação da energia, como era de se esperar.

Podemos usar a Equação (13.21) para explicitar a velocidade v_x do corpo em função do deslocamento x:

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (13.22)$$

O sinal ± significa que, em um dado ponto x, o corpo pode estar se deslocando em qualquer um dos dois sentidos. Por exemplo, quando $x = \pm A/2$, temos

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - \left(\pm\frac{A}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{k}{m}}A$$

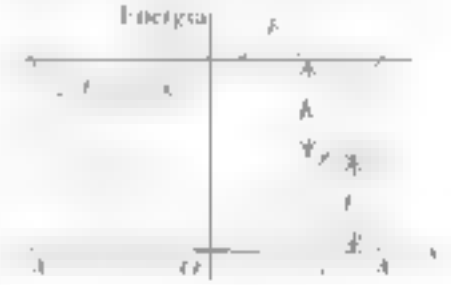
A Equação (13.22) também mostra que a velocidade *máxima* $v_{máx}$ ocorre em $x = 0$. Usando a Equação (13.10), $\omega = \sqrt{k/m}$, verificamos que

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A \qquad (13.25)$$

Esse resultado concorda com a Equação (13.15), a qual indica que v_x oscila entre $-\omega A$ e $+\omega A$.

(a) A energia potencial U e a energia mecânica total E de um corpo em MHS em função do deslocamento x.

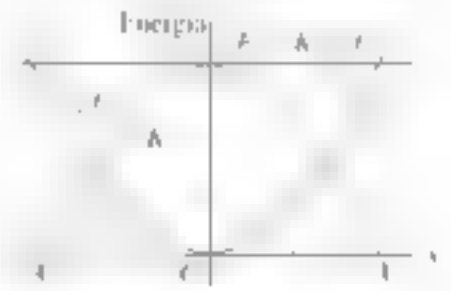
A energia mecânica total E é constante



(b) O mesmo gráfico do item (a), mostrando também a energia cinética K.

Em $x = \pm A$ a energia é toda potencial; a energia cinética é nula.

Em $x = 0$ a energia é toda cinética, a energia potencial é nula.



Nesses pontos a energia é parte cinética e parte potencial.

Figura 13.15 Energia cinética K, energia potencial U e energia mecânica total E em função da posição no MHS. Em cada ponto x a soma dos valores de K e de U é sempre igual ao valor constante E. Você consegue demonstrar que a energia é em parte cinética e em parte potencial em $x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}A$?

Interpretando *E*, *K* e *U* em MHS

A Figura 13.14 mostra as energias E, K e U para os pontos $x = 0$, $x = \pm A/2$ e $x = \pm A$. A Figura 13.15 é uma representação gráfica da Equação (13.21); o eixo vertical indica a energia (cinética, potencial e total) e a posição x é indicada no eixo horizontal. A curva parabólica mostrada na Figura 13.15a representa a energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. A linha horizontal representa a energia mecânica total E que permanece constante e não varia com a posição x. Essa linha corta a curva da energia potencial nos pontos $x = -A$ e $x = A$, nos quais a energia é totalmente potencial, a energia cinética é nula e o corpo entra momentaneamente em repouso antes de inverter o sentido. Enquanto o corpo oscila entre $-A$ e A, a energia é continuamente transformada de potencial em cinética e vice-versa.

A Figura 13.15a mostra a conexão entre a amplitude A e a correspondente energia mecânica total $E = \frac{1}{2}kA^2$. Se tentássemos fazer x maior do que A (ou menor do que $-A$), U seria maior do que E, e K seria negativa. Porém, K nunca pode ser negativa, logo x não pode ser maior do que A nem menor do que $-A$.

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES II: ENERGIA A equação para a energia, Equação (13.21), fornece uma relação alternativa útil entre a velocidade e a posição, especialmente quando grandezas energéticas são também solicitadas. Caso o problema envolva uma relação entre a velocidade, a posição e a aceleração sem fazer referência ao tempo, em geral é mais fácil usar a Equação (13.4) (segunda lei de Newton) ou a Equação (13.21) (conservação da energia) do que usar as relações gerais de x, v_x e a_x em função do tempo [dadas, respectivamente, pelas equações (13.13), (13.15) e (13.16)]. Como a equação da energia envolve x^2 e v_x^2, ela não lhe diz qual é o sinal de x nem de v_x; você terá de achar o sinal para cada situação. Por exemplo, se o corpo for deslocado da sua posição de equilíbrio para o ponto de seu deslocamento positivo máximo, então x é positivo e v_x também é positiva.

Exemplo 13.3

VELOCIDADE, ACELERAÇÃO E ENERGIA EM UM MHS

No oscilador discutido no Exemplo 13.2, $k = 200$ N/m, $m = 0,50$ kg e o corpo que oscila é solto a partir do repouso no ponto $x = 0,020$ m. a) Ache a velocidade máxima e a velocidade mínima atingidas pelo corpo que oscila. b) Ache a aceleração máxima. c) Calcule a velocidade e a aceleração quando o corpo está na metade da distância entre o ponto de equilíbrio e seu afastamento máximo. d) Ache a energia mecânica total, a energia potencial e a energia cinética nesse ponto.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o problema trata do movimento em diversas *posições*, não em *tempos* específicos. Esse é um indício de que você pode usar as relações de energia vistas nesta seção para encontrar as variáveis pedidas.

PREPARAR: a Figura 13.13 mostra a escolha do eixo Ox. O deslocamento máximo a partir da posição de equilíbrio é $A = 0,020$ m. Para qualquer posição x, usamos as equações (13.12) e (13.4) para achar a velocidade v_x e a aceleração a_x, respectivamente. Dadas a velocidade e a posição, usamos a Equação (13.21) para encontrar o valor das energias K, U e E.

EXECUTAR a) velocidade v_x em função do deslocamento x é dada pela Equação (13.23):

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

A velocidade máxima ocorre no ponto em que o corpo está se deslocando da esquerda para a direita, passando por sua posição de equilíbrio, onde $x = 0$:

$$v_x = v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0,50\ \text{kg}}}(0,020\ \text{m}) = 0,40\ \text{m/s}$$

A velocidade mínima (ou seja, a mais negativa) ocorre quando o corpo está se deslocando da direita para a esquerda e passa pelo ponto em que $x = 0$; seu valor é $-v_{máx} = -0,40$ m/s.

b) Pela Equação (13.4),

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

A aceleração máxima (mais positiva) ocorre no ponto correspondente ao maior valor negativo de x, ou seja, para $x = -A$, logo

$$a_{máx} = -\frac{k}{m}(-A) = -\frac{200\ \text{N/m}}{0,50\ \text{kg}}(-0,020\ \text{m}) = 8,0\ \text{m/s}^2$$

A aceleração mínima (ou seja, a mais negativa) é igual a $-8,0$ m/s^2 e ocorre no ponto $x = +A = +0,020$ m.

c) Em um ponto na metade da distância entre o ponto de equilíbrio e o afastamento máximo, $x = A/2 = 0,010$ m. Pela Equação (13.22),

$$v_x = -\sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0,50\ \text{kg}}}\sqrt{(0,020\ \text{m})^2 - (0,010\ \text{m})^2} = -0,35\ \text{m/s}$$

Escolhemos a raiz quadrada negativa porque o corpo está se deslocando de $x = A$ até o ponto $x = 0$. Pela Equação (13.4),

$$a_x = -\frac{200\ \text{N/m}}{0,50\ \text{kg}}(0,010\ \text{m}) = -4,0\ \text{m/s}^2$$

Nesse ponto, a velocidade e a aceleração possuem o mesmo sinal; logo a velocidade está crescendo. As condições nos pontos $x = 0$, $x = \pm A/2$ e $x = \pm A$ são indicadas na Figura 13.14.

d) A energia total possui o mesmo valor para todos os pontos durante o movimento:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0,020\ \text{m})^2 = 0,040\ \text{J}$$

A energia potencial é

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0{,}010\ \text{m})^2 = 0{,}010\ \text{J}$$

e a energia cinética é

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}(0{,}50\ \text{kg})(-0{,}35\ \text{m/s})^2 = 0{,}030\ \text{J}$$

AVALIAR nesse ponto $x = A/2$, a energia E é composta por $\frac{1}{4}$ de energia potencial e por $\frac{3}{4}$ de energia cinética. Você pode verificar isso observando a Figura 13.15b.

Exemplo 13.9

ENERGIA E MOMENTO LINEAR NO MHS

Um bloco de massa M preso a uma mola de constante k descreve um movimento harmônico simples horizontal com uma amplitude de A_1. No instante em que o bloco passa pela posição de equilíbrio, um pedaço de massa de vidraceiro, de massa m, cai verticalmente de uma pequena altura sobre o bloco e gruda nele. a) Calcule a nova amplitude e o período. b) Repita a parte (a) supondo que a massa caia sobre o bloco no momento em que ele está na extremidade de sua trajetória.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR o problema envolve o movimento em uma dada posição, e não em dado instante, portanto podemos usar o método da energia. Antes de a massa cair sobre o bloco, a energia mecânica da mola e do bloco oscilantes era constante. Quando a massa gruda no bloco, a colisão é completamente inelástica (ver a Seção 8.3): existe conservação do componente x do momento linear, porém a energia cinética diminui. Depois que a colisão termina, a energia mecânica permanece constante em um novo valor.

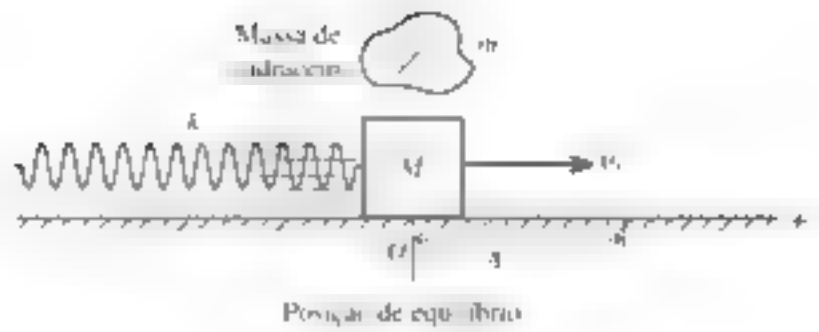
PREPARAR a Figura 13.16 mostra nossos esboços. Em cada parte, consideramos o que acontece antes, durante e depois da colisão. Encontramos a amplitude A_2 depois da colisão a partir da energia final do sistema, e encontramos o período T_2 após a colisão usando a relação entre período e massa.

EXECUTAR a) Antes da colisão, a energia mecânica total da mola e do bloco é dada por $E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2$. Como o bloco está na posição de equilíbrio, $U = 0$, a energia é puramente cinética (Figura 13.16a). Designando por v_1 a velocidade do bloco na posição de equilíbrio, obtemos

$$E = \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \quad \text{então} \quad v_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}A_1$$

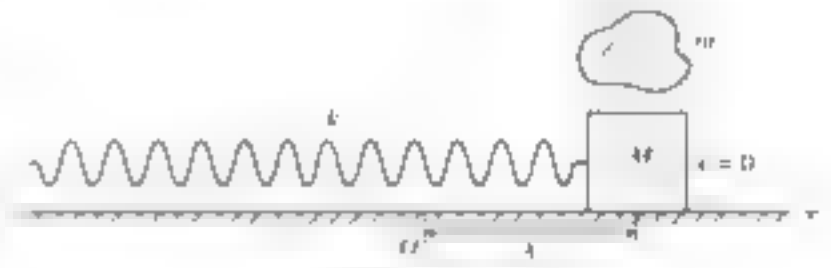
Durante a colisão existe conservação do componente x do momento linear do sistema massa e bloco. (Por quê?) Imediatamente antes da colisão, esse momento linear é dado pela soma de Mv_1 (para o bloco) e zero (para a massa). Imediatamente depois da colisão, o bloco e a massa se movem juntos com velocidade v_2, e o momento linear desse conjunto é dado por $(M + m)v_2$. Pela lei da conservação do momento linear, obtemos

(a)



Posição de equilíbrio

(b)



Posição de equilíbrio

Figura 13.16 [illegible]

$$Mv_1 + 0 = (M + m)v_2 \quad \text{então} \quad v_2 = \frac{M}{M + m}v_1$$

A colisão dura um intervalo de tempo muito pequeno, de modo que imediatamente depois da colisão o bloco e a massa se encontram ainda na posição de equilíbrio. A energia ainda é puramente cinética, porém é *menor* do que a energia cinética antes da colisão:

$$E_2 = \frac{1}{2}(M + m)v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{M + m}v_1^2 = \frac{M}{M + m}\frac{1}{2}Mv_1^2$$
$$= \left(\frac{M}{M + m}\right)E_1$$

Como E_2 é igual a $\frac{1}{2}kA_2^2$, onde A_2 é a amplitude depois da colisão, temos

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \left(\frac{M}{M + m}\right)\frac{1}{2}kA_1^2$$
$$A_2 = A_1\sqrt{\frac{M}{M + m}}$$

Quanto maior for o valor de m da massa de vidraceiro, menor será a amplitude final.

O cálculo do período da oscilação depois da colisão é fácil. Usando a Equação (13.12), obtemos

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M + m}{k}}$$

b) Quando a massa de vidraceiro cai sobre o bloco, ele está momentaneamente em repouso (Figura 13.16b). O componente x do momento linear é zero tanto antes quanto depois da colisão.

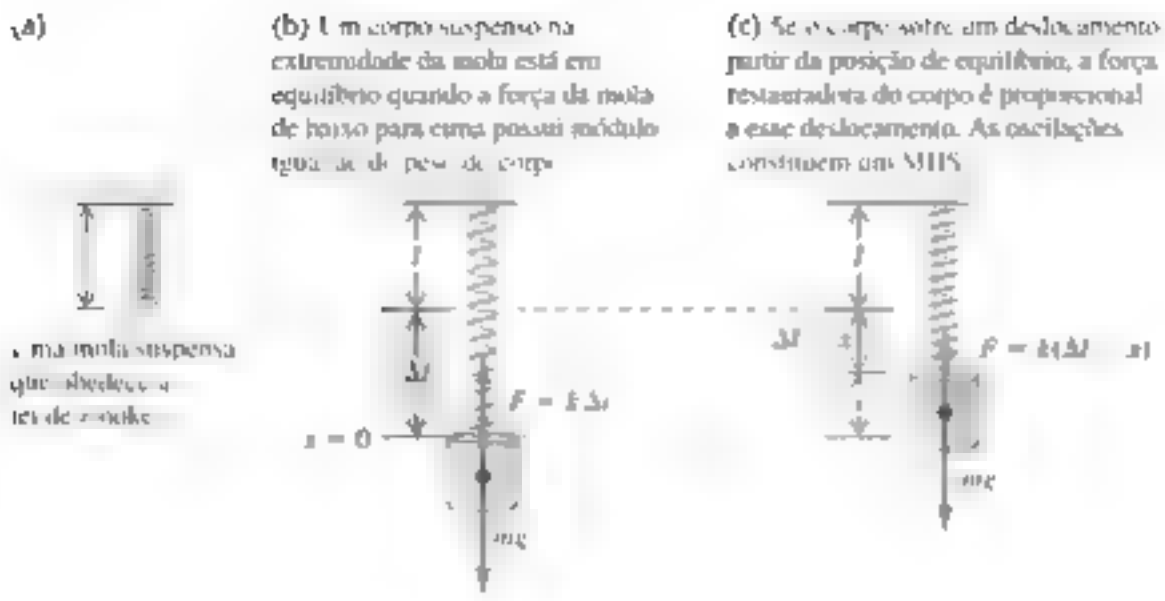

(a)
(b) Um corpo suspenso na extremidade da mola está em equilíbrio quando a força da mola de baixo para cima possui módulo igual ao peso do corpo
(c) Se o corpo sofre um deslocamento a partir da posição de equilíbrio, a força restauradora do corpo é proporcional a esse deslocamento. As oscilações constituem um MHS
Uma mola suspensa que obedece à lei de Hooke
l
Δl
$F = k\Delta l$
$x = 0$
mg
l
Δl
x
$F = k(\Delta l - x)$
mg

Figura 13.17 Um corpo suspenso na extremidade de uma mola.

O bloco possuía energia cinética zero imediatamente antes da colisão; a massa e o bloco possuem energia cinética zero imediatamente depois da colisão. A energia toda é composta de energia potencial armazenada na mola, portanto o acréscimo da massa de vidraceiro não exerce *nenhum efeito* sobre a energia mecânica. Ou seja,

$$E = E \quad \frac{1}{2}kA$$

e a amplitude não se altera após a colisão ($A_2 = A_1$). O período, entretanto, continua variando quando a massa é grudada no bloco; o seu valor não depende do modo pelo qual a massa é adicionada ao sistema, depende apenas do valor da massa total. Logo, T_2 é igual ao obtido na parte (a), $T_2 = 2\pi\sqrt{(M + m)/k}$.

AVALIAR Por que a energia é perdida na parte (a) mas não na parte (b)? A diferença é que, na parte (a), a massa de vidraceiro desliza contra o bloco em movimento durante a colisão, e a energia é dissipada por atrito cinético.

Teste sua compreensão da Seção 13.3 a) Para dobrar a energia total em um sistema massa-mola que oscila em MHS, de que fator deve a amplitude aumentar? (i) 4; (ii) 2; (iii) $\sqrt{2} = 1.414$; (iv) $\sqrt[4]{2} = 1.189$. b) De que fator irá variar a frequência devido a esse aumento na amplitude? (i) 4; (ii) 2; (iii) $\sqrt{2} = 1.414$; (iv) $\sqrt[4]{2} = 1.189$; (v) não se altera. ▼

13.4 Aplicações do movimento harmônico simples

Até o momento, analisamos muitos exemplos de uma *única* situação em que ocorre o movimento harmônico simples (MHS): o caso da mola horizontal ideal ligada a um corpo. Porém, o MHS pode ocorrer em qualquer sistema no qual exista uma força restauradora diretamente proporcional ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio, como na Equação (13.3), $F_x = -kx$. A força restauradora pode surgir de diferentes modos em situações variadas, então a constante k dessa força deve ser achada mediante o conhecimento da força resultante que atua sobre o sistema. Depois dessa determinação, torna-se fácil achar a frequência angular ω, a frequência f e o período T: basta substituir o valor obtido para k nas equações (13.10), (13.11) e (13.12). Vamos usar esse procedimento para examinar diversos exemplos de movimento harmônico simples.

MHS na direção vertical

Suponha que penduremos um corpo de massa m em uma mola suspensa verticalmente de constante k (Figura 13.17a). As oscilações agora ocorrem na direção vertical; elas ainda constituem um MHS? Na Figura 13.17b o corpo está suspenso na mola em equilíbrio. Nessa posição, a mola está esticada de um valor Δl suficiente para que a força vertical da mola sobre o corpo $k\,\Delta l$ equilibre o peso do corpo mg:

$$k\,\Delta l = mg$$

Considere $x = 0$ a posição de equilíbrio e oriente o sentido positivo do eixo Ox de baixo para cima. Quando o corpo está a uma distância x *acima* da posição de equilíbrio (Figura 13.17c), a deformação da mola é $\Delta l - x$. Logo, a força de baixo para cima exercida pela mola sobre o corpo é $k(\Delta l - x)$, e o componente x da força total resultante sobre o corpo é

$$F_x = k(\Delta l - x) + (-mg) = -kx$$

Um corpo é colocado sobre a mola. Ele está em equilíbrio quando a força de baixo para cima exercida pela mola comprimida for igual ao peso do corpo.

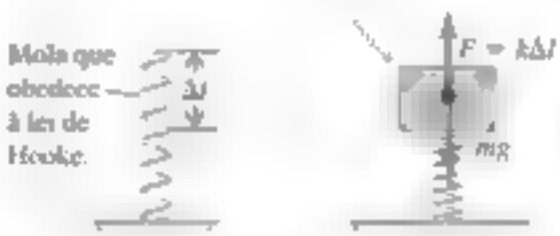


Figura 13.18 Quando o peso mg comprime a mola até uma distância Δl, a constante da mola é dada por $k = mg/\Delta l$ e a frequência angular do MHS vertical é dada por $\omega = \sqrt{k/m}$ — a mesma que o corpo apresentaria se estivesse suspenso na mola (veja a Figura 13.17).

ou seja, uma força resultante orientada de cima para baixo de módulo igual a kx. Analogamente, quando o corpo está *abaixo* da posição de equilíbrio, existe uma força resultante orientada de baixo para cima de módulo igual a kx. Em qualquer dos casos, existe uma força restauradora de módulo igual a kx. Quando o corpo se move verticalmente, ele oscila em MHS com a mesma frequência angular que teria caso estivesse oscilando na horizontal, $\omega = \sqrt{k/m}$. Portanto, o MHS vertical é essencialmente análogo ao MHS horizontal. A única diferença real é que a posição de equilíbrio (ponto $x = 0$) não corresponde mais ao ponto em que a mola não está deformada. O raciocínio anterior também vale quando um corpo com peso mg é colocado verticalmente sobre uma mola (Figura 13.18) e a comprime até uma distância Δl.

Exemplo 13.5

MHS VERTICAL EM UM CARRO VELHO

Os amortecedores de um carro velho de 1000 kg estão completamente gastos. Quando uma pessoa de 980 N sobe lentamente no centro de gravidade do carro, ele se abaixa 2,8 cm. Quando essa pessoa está dentro do carro durante uma colisão com um obstáculo, o carro oscila verticalmente com MHS. Considerando o carro e a pessoa uma única massa apoiada sobre uma única mola, calcule o período e a frequência da oscilação.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a situação é semelhante à mostrada na Figura 13.18.

PREPARAR: a compressão da mola quando o peso adicional é acrescentado nos mostra a constante da mola, que podemos usar para achar o período e a frequência (as variáveis procuradas).

EXECUTAR: quando a força aumenta de 980 N, a mola sofre uma compressão adicional de 0,028 m e a coordenada x do carro varia em −0,028 m. Portanto, a constante da mola efetiva (ou seja, o efeito da suspensão toda) é

$$k = \frac{F_x}{x} = -\frac{980\ \text{N}}{-0{,}028\ \text{m}} = 3{,}5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2$$

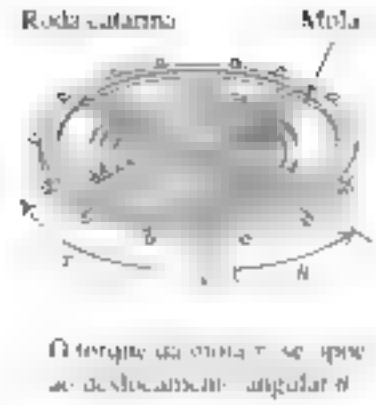
A massa da pessoa é $m/g = (980\ \text{N})/(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 100$ kg. A massa *total* que oscila é $m = 1000\ \text{kg} + 100\ \text{kg} = 1100$ kg. O período T é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1100\ \text{kg}}{3{,}5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2}}$$

e a frequência é

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}11\ \text{s}} = 0{,}90\ \text{Hz}$$

AVALIAR: uma oscilação persistente com um período de cerca de um segundo não é nada agradável. O propósito dos amortecedores é fazer com que tais oscilações sejam reduzidas (veja a Seção 13.7).



O torque da mola τ_z se opõe ao deslocamento angular θ.

Figura 13.19 A roda catarina de um relógio mecânico. A mola helicoidal exerce um torque restaurador proporcional ao deslocamento angular θ a partir da posição de equilíbrio. Logo, o movimento é um MHS.

MHS angular

A Figura 13.19 mostra a roda catarina de um relógio mecânico. A roda possui um momento de inércia I em torno de seu eixo. Uma mola helicoidal (chamada de *mola cabelo*) exerce um torque restaurador τ_z proporcional ao deslocamento angular θ a partir da posição de equilíbrio. Escrevemos $\tau_z = -\kappa\theta$, onde κ (letra grega "capa") é uma constante denominada *constante de torção*. Usando o análogo rotacional da segunda lei de Newton para um corpo rígido, $\Sigma\tau_z = I\alpha_z = Id^2\theta/dt^2$, a equação do movimento é

$$-\kappa\theta = I\alpha \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

Essa equação possui forma exatamente igual à da Equação (13.4), que fornece a aceleração de um movimento harmônico simples, se substituirmos x por θ e k/m por κ/I. Logo, trata-se da forma *angular* do movimento harmônico simples. A frequência angular ω e a frequência f são dadas, respectivamente, pelas equações (13.10) e (13.11), fazendo-se as mesmas substituições mencionadas.

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad e \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

(MHS angular) (13.24)

O movimento é descrito pela função

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \phi)$$

onde Θ desempenha o papel de uma amplitude angular.

É vantajoso que a oscilação de uma roda catarina *seja* um movimento harmônico simples. Caso não fosse, a frequência dependeria da amplitude, e o relógio poderia adiantar ou atrasar quando a mola se desgastasse.

*Vibrações das moléculas

O estudo que faremos a seguir sobre as vibrações das moléculas usa o teorema binomial. Caso você não esteja familiarizado com esse teorema, consulte a seção adequada em seu livro de matemática.

Quando dois átomos estão separados por uma distância da ordem de alguns diâmetros atômicos, eles exercem entre si uma força de atração. Porém, quando eles estão suficientemente próximos, de modo que haja superposição entre suas respectivas nuvens eletrônicas, as forças entre os átomos passam a ser repulsivas. Entre essas duas situações extremas, pode existir uma posição de equilíbrio, na qual os dois átomos constituem uma *molécula*. Quando esses átomos são ligeiramente deslocados das suas posições de equilíbrio, eles começam a oscilar. Vamos verificar se essas oscilações podem constituir um movimento harmônico simples.

Como exemplo, consideraremos um tipo de força entre átomos conhecida como *interação de van der Waals*. No momento, nosso objetivo específico é estudar oscilações, por isso não forneceremos detalhes acerca do processo dessas interações. Suponha que o centro de massa de um dos átomos seja a origem e que o centro do outro átomo esteja a uma distância r (Figura 13.20a); a distância de equilíbrio entre os centros é dada por $r = R_0$. A experiência mostra que a interação de van der Waals pode ser descrita pela seguinte função de energia potencial

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right] \qquad (13.25)$$

onde U_0 é uma constante com unidade de joule. Quando a distância entre os dois átomos for muito grande, $U = 0$; quando a separação entre os dois átomos for igual à distância de equilíbrio $r = R_0$, $U = -U_0$. A força sobre o segundo átomo é obtida pela derivada negativa da Equação (13.25),

$$F = -\frac{dU}{dr} = -U_0\left[\frac{-2R_0^{12}}{r^{13}} - \frac{2(6R^6)}{r^7}\right]$$

$$= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right] \qquad (13.26)$$

As figuras 13.20b e 13.20c indicam, respectivamente, a energia potencial e a força em função da distância. A força é positiva para $r < R_0$ e negativa para $r > R_0$, logo, ela é uma força *restauradora*.

Para estudar a força F_r na Equação (13.26), vamos definir uma variável x para descrever o deslocamento a partir do equilíbrio:

$$x = r - R_0, \text{ logo } r = R_0 + x$$

Em termos de x, a força F_r na Equação (13.26) é dada por

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0 + x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0 + x}\right)^{7}\right]$$

$$= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{(1 + x/R_0)^{13}} - \frac{1}{(1 + x/R_0)^{7}}\right] \qquad (13.27)$$

Essa força não se parece em nada com a lei de Hooke, $F_x = -kx$, de modo que poderíamos ser induzidos a pensar que as oscilações moleculares não constituem um MHS. Porém, vamos restringir nosso estudo a oscilações com *pequenas amplitudes*, de modo que o módulo do deslocamento x seja pequeno em comparação com R_0 e o módulo da razão x/R_0 seja muito menor do que 1. Podemos então simplificar a Equação (13.27) usando o *teorema binomial*:

$$(1 + u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3 + \cdots \qquad (13.28)$$

Quando $|u|$ for muito menor do que 1, cada termo sucessivo da Equação (13.28) é muito menor do que o termo precedente, e podemos aproximar com segurança $(1 + u)^n$ usando apenas os dois primeiros termos do desen-

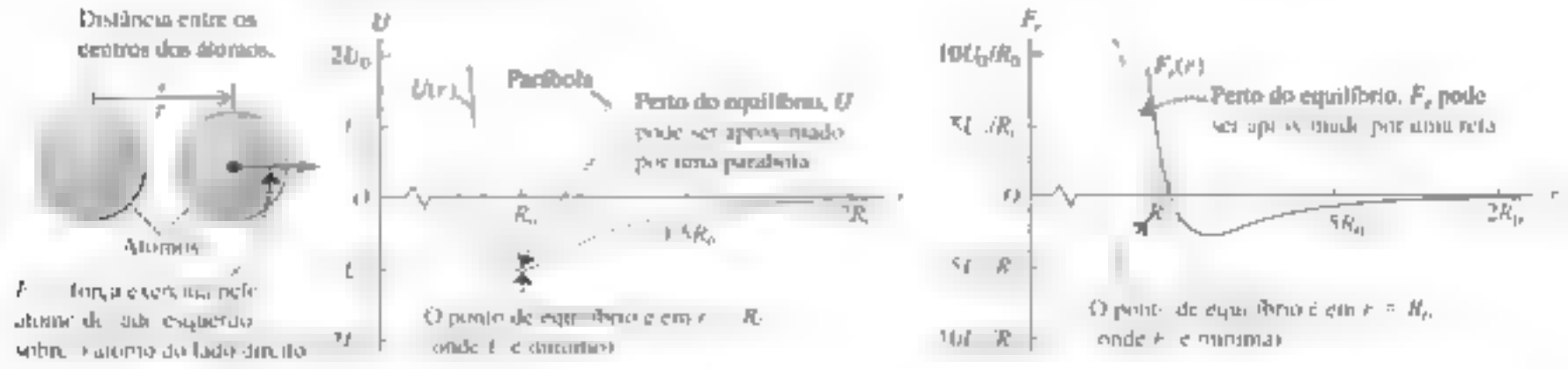

(a) Sistema de dois átomos.
(b) Energia potencial U do sistema de dois átomos em função de r
(c) A força F_r em função de r
Distância entre os centros dos átomos.
Átomos
Parábola
Perto do equilíbrio, U pode ser aproximado por uma parábola
Perto do equilíbrio, F_r pode ser aproximada por uma reta
O ponto de equilíbrio é em r = R_0, onde U é mínima.
O ponto de equilíbrio é em r = R_0, onde F_r é nula.

Figura 13.20 (a) Dois átomos com os centros separados por uma distância r. (b) Energia potencial U da interação de van der Waals em função de r. (c) A força F_r sobre o átomo do lado direito em função de r.

volvimento. Na Equação (13.27), substituindo x por x/R_0 e fazendo n igual a –13 ou –7, obtemos

$$\frac{1}{(1+x/R_0)^{13}} = (1+x/R_0)^{-13} \approx 1 + (-13)\frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{(1+x/R_0)^{7}} = (1+x/R_0)^{-7} \approx 1 + (-7)\frac{x}{R_0}$$

$$F = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1 + (-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1 + (-7)\frac{x}{R_0}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x \qquad (13.29)$$

Essa é precisamente a lei de Hooke, com a constante da força dada por $k = 72U_0/R_0^2$. (Note que k apresenta as unidades corretas J/m^2 ou N/m.) Logo, as oscilações das moléculas agadas pela interação de van der Waals podem constituir um movimento harmônico simples, desde que a amplitude seja pequena em comparação a R_0, de modo que seja válida a aproximação $(x/R_0) << 1$ usada na dedução da Equação (13.29).

Podemos também mostrar que a energia potencial U na Equação (13.25) pode ser escrita como $U = \frac{1}{2}kx^2 + C$, onde $C = -U_0$ e k é novamente igual a $72U_0/R_0^2$. Quando se adiciona uma constante, a energia potencial não se altera fisicamente, portanto o sistema constituído por duas massas é essencialmente semelhante ao sistema da massa ligada a uma mola horizontal, cuja energia potencial é dada por $U = \frac{1}{2}kx^2$. Deixamos a demonstração a seu encargo, como exercício. (Ver Exercício 13.39.)

Exemplo 13.9

VIBRAÇÃO MOLECULAR

Dois átomos de argônio podem formar uma molécula fracamente ligada, Ar_2, que é mantida unida pela interação de van der Waals com $U_0 = 1{,}68 \times 10^{-21}$ J e $R_0 = 3{,}82 \times 10^{-10}$ m. Calcule a freqüência das pequenas oscilações dos átomos em torno da posição de equilíbrio.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: esta é a mesma situação mostrada na Figura 13.20.

PREPARAR: como as oscilações são pequenas, podemos usar a Equação (13.11) para obter a freqüência do MHS. A constante da mola é dada pela Equação (13.29).

EXECUTAR: a constante da mola é

$$k = \frac{72U_0}{R_0^2} = \frac{72(1{,}68 \times 10^{-21}\ \text{J})}{(3{,}82 \times 10^{-10}\ \text{m})^2} = 0{,}829\ \text{J/m}^2 = 0{,}829\ \text{N/m}$$

Ela é comparável à constante da força de uma mola frouxa, tal como as molas usadas em brinquedos do tipo "mola maluca".

Pela tabela periódica dos elementos (Apêndice D), a massa atômica média do argônio é

$$(39{,}948\ \text{u})(1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg/1 u}) = 6{,}63 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

Quando um dos átomos de argônio está fixo e o outro oscila, a freqüência das oscilações é

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}829\ \text{N/m}}{6{,}63 \times 10^{-26}\ \text{kg}}} = 5{,}63 \times 10^{11}\ \text{Hz}$$

A massa que oscila é muito pequena, portanto mesmo uma mola frouxa pode produzir oscilações muito rápidas.

AVALIAR: nossa resposta para f não é muito correta. Quando não existe nenhuma força externa atuando sobre a molécula, o centro de massa da molécula (localizado na metade da distância entre os dois átomos) não acelera. Para garantir isso, *os dois* átomos oscilam com a mesma amplitude em sentidos opostos. Podemos dar conta dessa questão substituindo m por $m/2$ na equação de f. (Veja o Problema 13.86.) Isso faz f aumentar de um fator $\sqrt{2}$. Logo, $f = \sqrt{2}(5{,}63 \times 10^{11}\ \text{Hz}) = 7{,}96 \times 10^{11}\ \text{Hz}$. Uma complicação adicional ocorre porque, na escala atômica, para descrever oscilações e outros movimentos, devemos usar a *mecânica quântica*, e não a mecânica newtoniana. Felizmente, a freqüência possui o mesmo valor na mecânica quântica.

Teste sua compreensão da Seção 13.4 Um bloco suspenso em uma mola ideal oscila para cima e para baixo com um período igual a 10 s sobre a Terra. Se você levar o bloco e a mola para Marte, onde a aceleração da gravidade é apenas 40% da aceleração da gravidade na Terra, qual será o novo período da oscilação? (i) 10 s; (ii) mais de 10 s; (iii) menos de 10 s. ■

13.5 O pêndulo simples

Um **pêndulo simples** é um modelo idealizado constituído por um corpo puntiforme suspenso por um fio inextensível de massa desprezível. Quando o corpo puntiforme é puxado lateralmente a partir da sua posição de equilíbrio e a seguir libertado, ele oscila em torno da posição de equilíbrio. Algumas situações familiares, como uma bola de demolição presa ao cabo de um guindaste ou uma criança sentada em um balanço (Figura 13.21a), podem ser consideradas pêndulos simples.

A trajetória do corpo puntiforme (algumas vezes chamado de peso) não é uma linha reta, mas um arco de circunferência de raio L igual ao comprimento do fio (Figura 13.21b). Usaremos como coordenada a distância x medida ao longo do arco. Para que a oscilação seja um movimento harmônico simples é necessário que a força restauradora seja diretamente proporcional à distância x ou a θ (porque $x = L\theta$). Será que isso está correto?

Na Figura 13.21b, representamos a força sobre o peso em termos do componente radial e do componente tangencial. A força restauradora F é o componente tangencial da força resultante:

$$F_x = -mg\,\text{sen}\,\theta \qquad (13.30)$$

Figura 13.21 A dinâmica de um pêndulo simples.

A força restauradora é fornecida pela gravidade. A tensão T atua meramente para fazer o peso puntiforme se deslocar ao longo de um arco. A força restauradora *não* é proporcional a θ, mas sim a sen θ; logo, o movimento não é harmônico simples. Contudo, quando o ângulo θ é pequeno, sen θ é aproximadamente igual ao ângulo θ em radianos (Figura 13.22). Por exemplo, quando $\theta = 0{,}1$ rad (aproximadamente igual a 6°), sen $\theta = 0{,}0998$, uma diferença de apenas 0,2%. Com essa aproximação, podemos escrever a Equação (13.30) na forma

$$F_\theta \approx -mg\theta = -m\frac{x}{L} \quad \text{ou}$$

$$F_\theta \approx -\frac{mg}{L}x \qquad (13.31)$$

A força restauradora é então proporcional à coordenada para *pequenos deslocamentos*, e a constante da força é dada por $k = mg/L$. Pela Equação (13.10), a frequência angular ω de um pêndulo simples com amplitude pequena é dada por

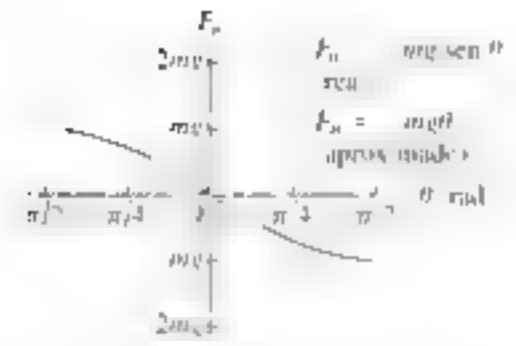


Figura 13.22 Em deslocamentos angulares pequenos θ, a força restauradora $F_\theta = -mg \operatorname{sen}\theta$ sobre um pêndulo simples é aproximadamente igual a $-mg\theta$, isto é, é aproximadamente proporcional ao deslocamento θ. Assim, para ângulos pequenos, as oscilações são movimentos harmônicos simples.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(pêndulo simples, amplitude pequena)} \quad (13.32)$$

A frequência e o período correspondentes são dados por

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(pêndulo simples, amplitude pequena)} \quad (13.33)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(pêndulo simples, amplitude pequena)} \quad (13.34)$$

Note que as relações anteriores não envolvem a *massa* da partícula. Isso ocorre porque a força restauradora, que é um componente do peso da partícula, é proporcional a m. Logo, a massa é cancelada porque aparece em *ambos* os membros da equação $\Sigma F = ma$. (Esse raciocínio físico é o mesmo usado para mostrar que todos os corpos caem com a mesma aceleração no vácuo.) Em pequenas oscilações, o período de um pêndulo simples para um dado valor de g é determinado exclusivamente pelo seu comprimento.

A dependência de L e g indicada nas equações (13.32), (13.33) e (13.34) é exatamente o que era esperado. Um pêndulo comprido possui um período maior do que um pêndulo curto. Quando g aumenta, a força restauradora torna-se maior, fazendo aumentar a frequência e diminuir o período. Enfatizamos, mais uma vez, que o movimento do pêndulo simples é *aproximadamente* harmônico simples. Quando a amplitude não é pequena, o desvio do comportamento harmônico simples pode ser significativo. Porém, como estabelecer o limite para "pequeno"? O período pode ser desenvolvido em uma série infinita; quando o deslocamento angular máximo é Θ, o período T é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\Theta}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\operatorname{sen}^4\frac{\Theta}{2} + \cdots\right) \quad (13.35)$$

Podemos calcular o período com a precisão desejada se tomarmos na série o número de termos necessários. Convidamos você a mostrar que quando $\theta = 15°$ (para cada lado da direção vertical central), o período real é cerca de 0,5% maior do que o período aproximado indicado pela Equação (13.34).

A utilidade de um pêndulo para medir o tempo depende do fato de o período ser *aproximadamente* independente da amplitude, desde que a amplitude seja pequena. Portanto, quando um relógio de pêndulo envelhece e a amplitude das oscilações diminui um pouco, o relógio continua a medir o tempo de modo aproximadamente correto.

Exemplo

UM PÊNDULO SIMPLES Calcule a freqüência e o período de um pêndulo simples de 1000 m de comprimento em um local onde $g = 9{,}800\ m/s^2$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como se trata de um pêndulo simples, podemos usar as idéias discutidas nesta seção.

PREPARAR usaremos a Equação (13.34) para calcular o período T do pêndulo a partir de seu comprimento, e a Equação (13.1) para achar a freqüência f a partir de T.

EXECUTAR pelas equações (13.34) e (13.1)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1000\ m}{9\,800\ m/s^2}} = 2{,}007\ s$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}007\ s} = 0{,}4983\ Hz$$

AVALIAR o período é quase exatamente igual a 2 s. De fato, quando o sistema métrico foi estabelecido, o segundo foi definido como a metade do período de um pêndulo de 1 m. Essa não foi uma boa escolha para um padrão de tempo, contudo, porque o valor de g varia de um local para outro. Na Seção 1.3, discutimos padrões mais modernos para o tempo.

Teste sua compreensão da Seção 13.5 Quando um corpo que oscila preso a uma mola horizontal passa por sua posição de equilíbrio, sua aceleração é igual a zero (ver Figura 13.2b). Quando o peso de um pêndulo simples oscilando passa pela posição de equilíbrio, sua aceleração é igual a zero? ♦

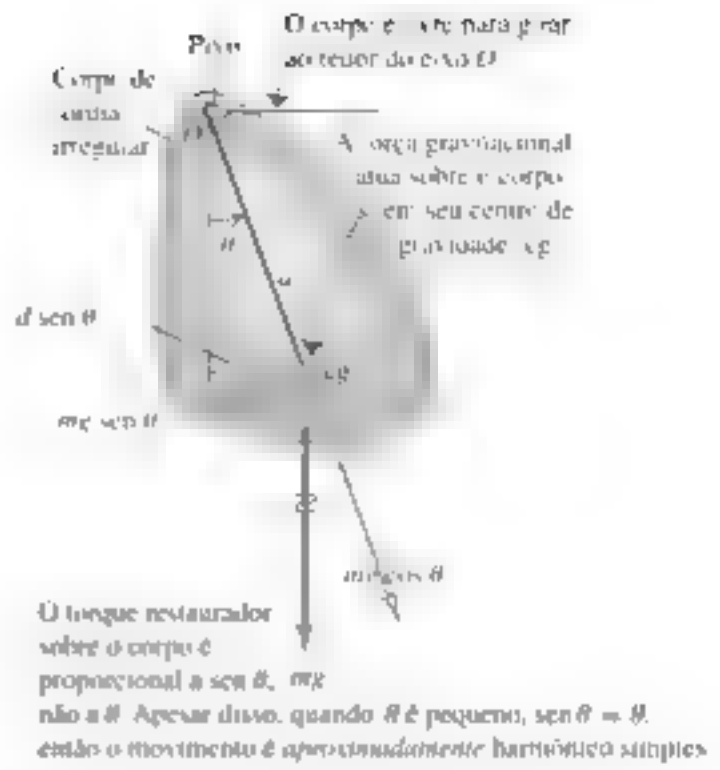

Pivô
O corpo é livre para girar ao redor do eixo O
Corpo de forma irregular
A força gravitacional atua sobre o corpo em seu centro de gravidade cg
d
θ
d sen θ
cg
mg sen θ
mg
O torque restaurador sobre o corpo é proporcional a sen θ, mg não a θ. Apesar disso, quando θ é pequeno, sen θ ≈ θ, então o movimento é aproximadamente harmônico simples.

Figura 13.23 Dinâmica de um pêndulo físico.

13.6 O pêndulo físico

Um **pêndulo físico** é qualquer pêndulo *real*, que usa um corpo com volume finito, em contraste com o modelo idealizado do pêndulo *simples*, que usa um corpo cuja massa está concentrada em um único ponto. Para oscilações pequenas, analisar o movimento de um pêndulo físico é quase tão fácil quanto analisar o movimento de um pêndulo simples. A Figura 13.23 mostra um corpo de forma irregular suspenso por um pivô e girando sem atrito ao redor de um eixo que passa pelo ponto O. Na posição de equilíbrio, o centro de gravidade está diretamente abaixo do pivô; na posição indicada na figura, o corpo está deslocado de um ângulo θ, que nós usaremos como a coordenada do sistema. A distância entre o ponto O e o centro de gravidade é d; o momento de inércia do corpo em torno do eixo de rotação passando pelo ponto O é I e a massa total é igual a m. Quando o corpo é deslocado conforme indicado, o peso mg produz um torque restaurador

$$\tau_z = -(mg)(d\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{13.36}$$

O sinal negativo mostra que o torque restaurador possui sentido anti-horário quando o deslocamento possui sentido horário, e vice-versa.

Quando o corpo é liberado, ele oscila em torno da posição de equilíbrio. O movimento não é harmônico simples, porque o torque restaurador não é proporcional a θ, mas sim a sen θ. Contudo, quando o ângulo θ é pequeno, podemos novamente aproximar sen θ por θ em radianos, como fizemos ao analisar o pêndulo simples. Dessa forma, o movimento *é aproximadamente* harmônico simples. Com essa aproximação,

$$\tau = -(mgd)\theta$$

A equação do movimento é $\sum\tau = I\alpha_z$, logo

$$-(mgd)\theta = I\alpha_z = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta \tag{13.37}$$

Comparando esse resultado com a Equação (13.4), vemos que o termo (k/m) do sistema massa-mola é análogo ao termo (mgd/I). Portanto, a frequência angular é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{(pêndulo físico, amplitude pequena)} \qquad (13.38)$$

A frequência f é $\frac{1}{2\pi}$ desse valor, e o período T é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \text{(pêndulo físico, amplitude pequena)} \qquad (13.39)$$

A Equação (13.39) é a base para a determinação do momento de inércia de um corpo com forma complicada. Inicialmente, localizamos o centro de gravidade do corpo efetuando testes de equilíbrio. A seguir, o corpo é suspenso de modo que possa girar livremente em torno de um eixo, e medimos o período T das oscilações com amplitude pequena. Usando-se a Equação (13.39), o momento de inércia I em torno desse eixo pode ser calculado a partir de T, da massa m e da distância d entre o eixo e o centro de gravidade (ver o Exercício 13.49). Pesquisadores de biomecânica usam esse método para calcular o momento de inércia das pernas de animais. Essa informação é importante para analisar como um animal caminha, conforme veremos no segundo dos dois exemplos apresentados a seguir.

Exemplo 13.8

PÊNDULO FÍSICO CONTRA PÊNDULO SIMPLES

Suponha que o corpo da Figura 13.23 seja uma barra uniforme de comprimento L suspensa em uma de suas extremidades. Calcule o período de seu movimento.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a variável que queremos encontrar é o período da oscilação de uma barra que age como um pêndulo físico. Para resolver esse problema, precisamos saber o momento de inércia da barra.

PREPARAR: verificamos a Tabela 9.2 (Seção 9.4) para achar o momento de inércia da barra e depois substituímos esse valor na Equação (13.39) para calcular o período da oscilação.

EXECUTAR: de acordo com a Tabela 9.2, o momento de inércia de uma barra uniforme em relação a um eixo passando em sua extremidade é $I = \frac{1}{3}ML^2$. A distância entre o pivô e o centro de gravidade é $d = L/2$. Pela Equação (13.39),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2}{MgL/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

AVALIAR: caso a barra seja uma régua de um metro ($L = 1,0$ m) e $g = 9,80$ m/s^2, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(1,0\text{ m})}{3(9,80\text{ m/s}^2)}} = 1,64\text{ s}$$

Esse período é $\sqrt{2/3} = 0,816$ menor do que o período do pêndulo simples de mesmo comprimento calculado no Exemplo 13.8 (Seção 13.6). A distância entre o cg da barra e o pivô é a metade da distância entre o cg do pêndulo simples e o pivô, o que significa que o torque possui a metade do valor. Esse fator sozinho seria suficiente para dar à barra um período $\sqrt{2}$ vezes maior do que o do pêndulo simples. Mas o momento de inércia da barra em torno de uma de suas extremidades, $I = \frac{1}{3}ML^2$, é um terço do momento de inércia do pêndulo simples, fator que, sozinho, faria com que o período da barra passasse a ser $\sqrt{1/3}$ do pêndulo simples. O momento de inércia é o fator mais importante neste caso, e é por essa razão que a barra possui um período mais curto do que o pêndulo simples.

Exemplo 13.9

TYRANNOSAURUS REX E O PÊNDULO FÍSICO

Todos os animais que caminham, inclusive os homens, possuem um ritmo natural da caminhada, ou seja, um número de passos por minuto mais confortável do que um ritmo mais lento ou veloz. Suponha que esse ritmo natural seja igual ao período da perna, encarada como um pêndulo em forma de barra com um pivô na junta do quadril. a) Como o ritmo de uma caminhada natural depende do comprimento L da perna, medido desde o quadril até o pé? b) Evidências de fósseis mostram que o *Tyrannosaurus rex*, um dinossauro com duas pernas que viveu há 65 milhões de anos no final do período cretáceo, tinha pernas de comprimento $L = 3,1$ m e uma passada (distância entre uma pegada e a pegada seguinte do mesmo pé) $S = 4,0$ m (Figura 13.24). Estime a velocidade da caminhada do *Tyrannosaurus rex*.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as variáveis procuradas são (a) a relação entre o ritmo de caminhada e o comprimento da perna e (b) a velocidade de caminhada do *T. rex*.

PREPARAR: vamos considerar a perna um pêndulo físico, com um período de oscilação dado como no Exemplo 13.9. Quanto mais curto o período, mais rápido é o ritmo de caminhada. Podemos encontrar a velocidade de caminhada a partir do período e do comprimento da passada.

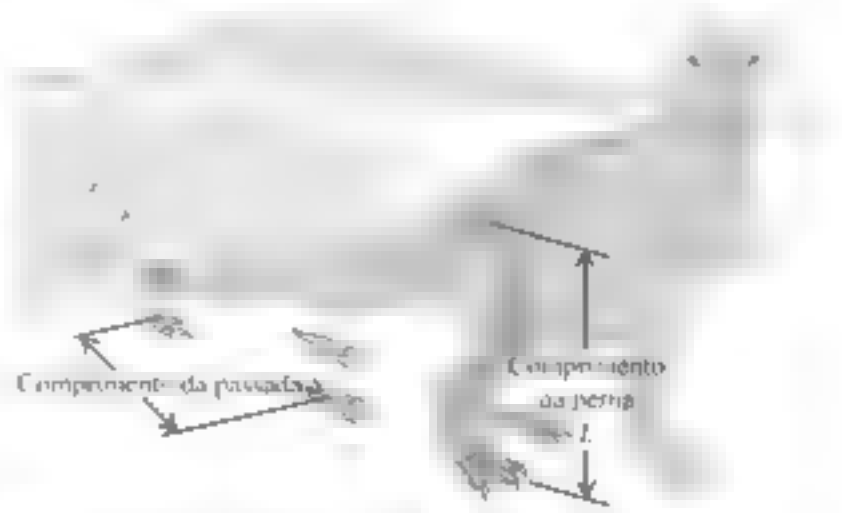


Figura 13.24 A velocidade da caminhada do *Tyrannosaurus rex* pode ser estimada a partir do comprimento de sua perna L e do comprimento de sua passada S.

EXECUTAR a) Conforme o Exemplo 13.9, o período de oscilação da perna é $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$ proporcional a $\sqrt{L}$. Cada período (uma oscilação completa da perna) corresponde a *dois* passos, então o ritmo da caminhada em passos por unidade de tempo é precisamente igual ao dobro da frequência $f = 1/T$. Portanto, o ritmo da caminhada é proporcional a $1/\sqrt{L}$. Os animais de pernas curtas (valores pequenos de L), tais como ratos e cachorrinhos *chihuahuas*, têm um ritmo veloz de caminhada, o homem, a girafa e outros animais com pernas longas (valores grandes de L) caminham em ritmo mais lento.

b) De acordo com nosso modelo para o ritmo natural da caminhada, o tempo de uma passada na caminhada do *Tyrannosaurus rex* é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2 \times 4{,}0\ \text{m}}{3 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 2{,}9\ \text{s}$$

A distância percorrida nesse intervalo de tempo é a passada S, de modo que a velocidade da caminhada é

$$v = \frac{S}{T} = \frac{4{,}0\ \text{m}}{2{,}9\ \text{s}} = 1{,}4\ \text{m/s} = 5{,}0\ \text{km/h}$$

Esse valor é aproximadamente igual ao da velocidade da caminhada típica de um homem!

AVALIAR Nossa estimativa deve estar ligeiramente errada porque uma barra não é um modelo muito bom para uma perna. As pernas de muitos animais, incluindo o homem e o *Tyrannosaurus rex*, [illegible], a quantidade de massa entre o joelho e o quadril é muito maior do que entre o joelho e o pé. Logo, o centro de gravidade está a uma distância menor do que $L/2$ a partir do quadril; uma estimativa razoável pode ser $L/4$. O momento de inércia é *consideravelmente* menor do que $ML^2/3$, provavelmente em torno de $ML^2/15$. Experimente essas estimativas seguindo o Exemplo 13.9; você obterá um período mais curto para as oscilações e um fator ainda maior para a velocidade da caminhada do *Tyrannosaurus rex*.

Teste sua compreensão da Seção 13.6 O centro de gravidade de um pêndulo simples de massa m e comprimento L está localizado na posição do peso do pêndulo, a uma distância L do ponto de suspensão. O centro de gravidade de uma barra uniforme com a mesma massa m e comprimento $2L$ em torno de uma extremidade está também a uma distância L do ponto de suspensão. Em relação ao período do pêndulo simples, o período dessa barra uniforme é (i) maior; (ii) menor; (iii) igual. ∎

13.7 Oscilações amortecidas

Os sistemas oscilantes ideais que foram discutidos até o momento não possuíam atrito. Nesses sistemas as forças são conservativas, a energia mecânica total é constante e, quando o sistema começa a oscilar, ele continua oscilando eternamente sem nenhuma diminuição da amplitude.

Os sistemas reais sempre possuem alguma força não conservativa, contudo, e a amplitude das oscilações vai diminuindo com o tempo, a menos que seja fornecida alguma energia para suprir a dissipação da energia mecânica. Um relógio de pêndulo mecânico continua a oscilar porque a energia potencial acumulada em uma mola ou em sistema de pesos suspensos é usada para suprir a dissipação da energia mecânica no pivô e nas engrenagens. Porém, a mola acaba se desgastando, ou os pesos acabam atingindo o final de seus percursos. Então não existe mais energia disponível, e a amplitude das oscilações diminui até o pêndulo parar.

Figura 13.25 Um sino balançando por si só acaba parando de oscilar devido a forças amortecedoras (resistência do ar e atrito no ponto de suspensão).

A diminuição da amplitude provocada por uma força dissipativa denomina-se **amortecimento** e o movimento correspondente denomina-se **oscilação amortecida**. O caso mais simples a ser examinado em detalhe é um oscilador harmônico simples com uma força de atrito amortecedora diretamente proporcional à *velocidade* do corpo que oscila. Esse comportamento ocorre no escoamento de um fluido viscoso, tal como em um amortecedor ou no caso do atrito entre superfícies lubrificadas com óleo. Nesse caso, existe uma força de atrito adicional que atua sobre o corpo, dada por $F_x = -bv_x$, onde $v_x = dx/dt$ é a velocidade e b é uma constante que descreve a intensidade da força de amortecimento. O sinal negativo indica que a força possui sempre um sentido contrário ao da velocidade. Portanto, a força *resultante* sobre o corpo é dada por

$$\sum F_x = -kx - bv_x \tag{13.40}$$

e a segunda lei de Newton para o sistema é

$$-kx - bv_x = ma_x, \quad \text{ou} \quad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{13.41}$$

A Equação (13.41) é uma equação diferencial para x; a única diferença entre ela e a Equação (13.4) que fornece a aceleração no MHS é que ela possui um termo adicional $-bdx/dt$. Essa equação pode ser resolvida facilmente pela teoria das equações diferenciais, porém não daremos os detalhes dessa solução aqui. Quando a força de amortecimento é relativamente pequena, o movimento é descrito por

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \phi)$$

(oscilador com amortecimento pequeno) (13.42)

A frequência angular ω' é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

(oscilador com amortecimento pequeno) (13.43)

Podemos verificar que a Equação (13.42) é uma solução da Equação (13.41) calculando a primeira e a segunda derivadas de x, substituindo o resultado na Equação (13.41) e conferindo se o membro esquerdo é igual ao membro direito. Esse procedimento é muito simples, porem trabalhoso.

O movimento descrito pela Equação (13.42) difere do caso sem amortecimento de dois modos. Primeiro, a amplitude $Ae^{-(b/2m)t}$ não é constante e diminui com o tempo por causa do fator decrescente $e^{-(b/2m)t}$. A Figura 13.26 é um gráfico da Equação (13.42) para um ângulo de fase $\phi = 0$; ela mostra que, quanto maior for o valor de b, mais rapidamente diminuirá a amplitude.

Segundo, a frequência angular ω', dada pela Equação (13.43), não é mais igual a $\omega = \sqrt{k/m}$, e sim ligeiramente menor. Ela tende a zero quando b é tão grande que

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad b = 2\sqrt{km} \tag{13.44}$$

Quando a Equação (13.44) é satisfeita, ocorre o chamado **amortecimento crítico**. O sistema não oscila mais e, ao ser deslocado e liberado, retorna para sua posição de equilíbrio sem oscilar.

A condição b maior do que $2\sqrt{km}$ corresponde ao **superamortecimento**. Novamente o sistema não oscila, porém retorna para sua posição de equilíbrio mais lentamente do que no caso do amortecimento crítico. Para o caso do superamortecimento, as soluções da Equação (13.41) possuem a seguinte forma:

$$x = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$$

onde C_1 e C_2 são constantes que dependem das condições iniciais, e a_1 e a_2 são constantes determinadas por m, k e b.

Para b menor do que o valor crítico, quando a Equação (13.42) é satisfeita, a condição denomina-se **subamortecimento**. O sistema oscila com uma amplitude que diminui continuamente.

Em um diapasão vibrando ou na corda de um violão, geralmente deseja-se o menor amortecimento possível. Em contraste, o amortecimento tem um efeito benéfico no sistema de suspensão de um automóvel. As forças de amortecimento de um carro dependem da velocidade e impedem que ele oscile eternamente ao passar por alguma saliência em seu caminho (Figura 13.27). Para o maior conforto do passageiro, o sistema deve ser criticamente amortecido ou ligeiramente subamortecido. Amortecimento demais é contraproducente: se a suspensão estiver superamortecida e o carro passar por outra saliência logo após a primeira, as molas da suspensão ainda estarão comprimidas devido ao primeiro solavanco e não conseguirão absorver completamente o impacto.

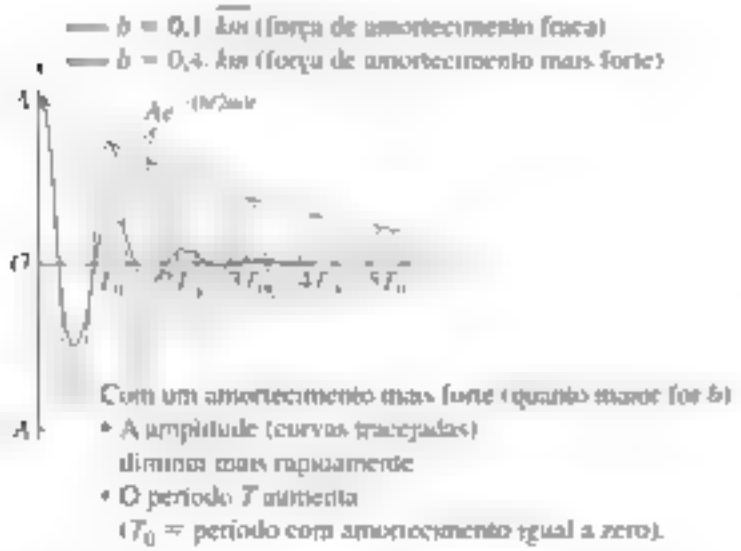


Figura 13.26 Gráfico do deslocamento em função do tempo de um oscilador com leve amortecimento (ver Figura 13.42) e com um ângulo de fase $\phi = 0$. As curvas mostram dois valores da constante de amortecimento b.

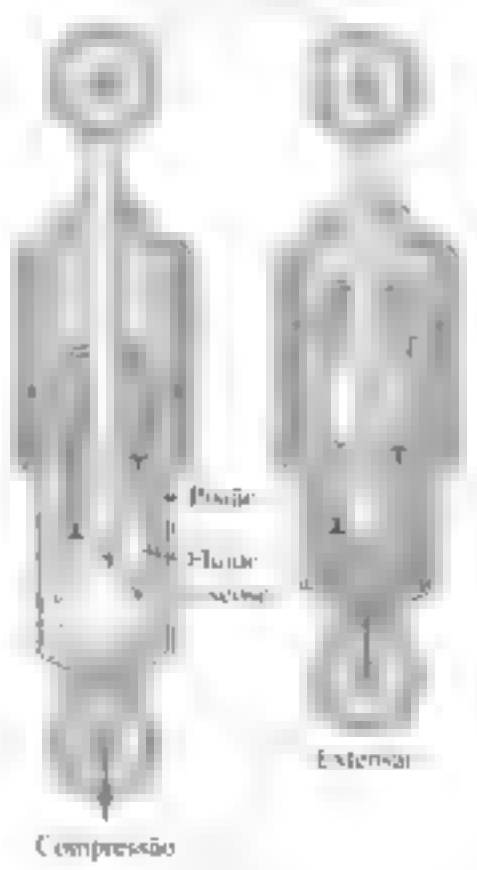

O cilindro superior, preso ao chassi do carro, permanece quase parado.
Pistão
Fluido
Extensão
Compressão
O cilindro inferior, preso ao eixo da roda, move-se para cima e para baixo.

Figura 13.27 Amortecedor de um carro. O fluido viscoso produz uma força de amortecimento que depende da velocidade relativa entre as duas extremidades da unidade.

Energia em oscilações amortecidas

Nas oscilações amortecidas, a força do amortecimento não é conservativa: a energia mecânica do sistema não é constante e diminui continuamente, tendendo a zero depois de um tempo longo. A fim de deduzir uma expressão para a taxa de variação da energia, inicialmente escrevemos uma expressão para a energia mecânica total E em qualquer instante:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

A derivada da equação anterior em relação ao tempo é dada por

$$\frac{dE}{dt} = mv_x\frac{dv_x}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$$

Porém, $dv_x/dt = a_x$ e logo $dx/dt = v_x$, então

$$\frac{dE}{dt} = v_x(ma_x + kx)$$

Pela Equação (13.41), $ma_x + kx = -bdx/dt = -bv_x$, logo

$$\frac{dE}{dt} = v_x(-bv_x) = -bv_x^2$$

(oscilações amortecidas) (13.45)

O membro direito da Equação (13.45) é sempre negativo, independentemente de v_x ser positivo ou negativo. Isso mostra que, quando o corpo se move, a energia diminui continuamente, embora com uma taxa não uniforme. O termo $-bv_x^2 = (-bv_x)\,v_x$ (força vezes velocidade) é a taxa com a qual a força do amortecimento realiza trabalho (negativo) sobre o sistema (ou seja, é a *potência* do amortecimento). Ela é igual à taxa de variação da energia mecânica total do sistema.

Um comportamento semelhante ocorre em circuitos elétricos contendo indutores, capacitores e resistores. Existe uma freqüência natural da oscilação, e a resistência desempenha o papel da constante de amortecimento b. Em tais circuitos é desejável a minimização do amortecimento, mas o amortecimento não pode ser eliminado completamente. Nos capítulos 31 e 32 estudaremos esses circuitos em detalhe.

Teste sua compreensão da Seção 13.7 Um avião está voando em linha reta a uma altitude constante. Se uma rajada de vento soprar e erguer o nariz do avião, o nariz oscilará para cima e para baixo até que o avião volte à sua posição original. Essas oscilações são (i) não amortecidas, (ii) subamortecidas, (iii) criticamente amortecidas ou (iv) superamortecidas? ●

13.8 Oscilações forçadas e ressonância

Quando um oscilador amortecido é deixado livre, suas oscilações tendem a parar. Porém, podemos manter constante a amplitude das oscilações aplicando uma força que varia periodicamente, com dado período e uma freqüência fixa. Como exemplo, considere seu primo Tobias oscilando no balanço de um *playground*. Você pode manter constante a amplitude das oscilações se fornecer a ele um pequeno empurrão ao final de cada ciclo. Essa força adicional é chamada de **força propulsora**.

Oscilações amortecidas com uma força propulsora periódica

Quando aplicamos uma força propulsora variando periodicamente com uma frequência angular ω_d a um oscilador harmônico amortecido, o movimento resultante é uma **oscilação forçada** ou uma *oscilação com força propulsora*. Trata-se de um movimento diferente do ocorrido quando simplesmente deslocamos o sistema da sua posição de equilíbrio e o deixamos livre; nesse caso, o sistema oscila com uma **freqüência angular natural** ω' determinada por m, k e b, como na Equação (13.43). Contudo, no caso de uma oscilação forçada, a freqüência angular da oscilação da massa é igual à freqüência angular da força propulsora ω_d. Essa freqüência *não* é igual à freqüência angular ω' com a qual o sistema oscilaria caso não estivesse submetido à ação da força. Quando você segura as cordas do balanço de Tobias, pode forçá-lo a oscilar com qualquer freqüência que desejar.

Suponha que você force o oscilador a vibrar com uma frequência angular ω_d *igual* à freqüência angular ω com a qual ele oscilaria sem a ação de nenhuma força. O que ocorreria? O oscilador teria uma tendência natural a oscilar com uma freqüência angular $\omega = \omega'$, então é de se esperar que a amplitude da oscilação seja maior do que a amplitude existente quando as freqüências são muito diferentes. Uma análise detalhada e dados experimentais mostram que isso é exatamente o que ocorre. O caso mais simples a ser analisado é o de uma força que varia *senoidalmente*, com a forma $F(t) = F_{máx}\cos\omega_d t$. Quando variamos a freqüência angular ω_d da força propulsora, a amplitude da oscilação forçada resultante varia de modo interessante (Figura 13.28). Quando existe um amortecimento muito pequeno (b pequeno), a amplitude tende a crescer fortemente até atingir um pico agudo, quando a freqüência angular ω_d da força propulsora torna-se igual à freqüência angular natural ω'. Quando o amortecimento é aumentado (b maior), o pico se torna mais largo, a amplitude se torna menor e se desloca para freqüências menores.

Podemos deduzir uma expressão que mostra como a amplitude A da oscilação forçada depende da freqüência angular de uma força propulsora senoidal, que possui um

valor máximo $F_{máx}$. Isso exige a solução de equações diferenciais que você ainda não está preparado para resolver, porém o resultado obtido é

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}}$$

(amplitude de um oscilador forçado) (15.46)

Quando $k - m\omega_d^2 = 0$ (o primeiro termo sob o sinal da raiz quadrada for igual a zero), o valor de A torna-se máximo para $\omega_d = \sqrt{k/m}$. A altura da curva nesse ponto é proporcional a $1/b$; quanto menor for o amortecimento, mais elevado se torna o pico. No caso extremo de baixas frequências, quando $\omega_d = 0$, obtemos $A = F_{máx}/k$. Esse resultado era de se esperar, porque ele corresponde a uma força *constante* $F_{máx}$ e a um deslocamento constante $A = F_{máx}/k$.

A ressonância e suas conseqüências

A **ressonância** é o fenômeno que ocorre quando existe um pico de amplitude provocado por uma força cuja frequência está próxima da frequência da oscilação natural do sistema. A física está repleta de exemplos de ressonância; um desses exemplos é criar oscilações com grande amplitude empurrando uma criança em um balanço com uma frequência igual à frequência da oscilação natural do balanço. As fortes vibrações que ocorrem em um carro quando o motor gira em determinadas rotações, ou quando a velocidade das rodas atinge determinados valores, são exemplos familiares de ressonâncias. Um alto-falante barato geralmente produz um ruído desagradável quando uma nota musical coincide com a frequência da oscilação natural da caixa ou do cone do alto-falante. No Capítulo 16 estudaremos outros exemplos de ressonância que envolvem som. Circuitos elétricos também apresentam ressonância, como veremos no Capítulo 31: os circuitos de sintonia do rádio ou da televisão respondem fortemente a ondas que possuam uma frequência próxima da frequência de ressonância do respectivo circuito, e esse fato é usado para selecionar uma emissora e rejeitar as outras.

A ressonância de um sistema mecânico pode ser destrutiva. Uma tropa de soldados, em certa ocasião, destruiu uma ponte porque a atravessou em passo de marcha: a frequência da marcha era próxima da frequência da vibração natural da ponte, e o crescimento das amplitudes da oscilação resultante foi suficiente para quebrá-la. Desde que ocorreu esse desastre, os soldados são orientados a não marcharem de modo cadenciado ao atravessar uma ponte. Há alguns anos, as vibrações do motor de um avião atingiram uma frequência próxima da frequência de ressonância das asas do avião. As oscilações se somaram e as asas se partiram.

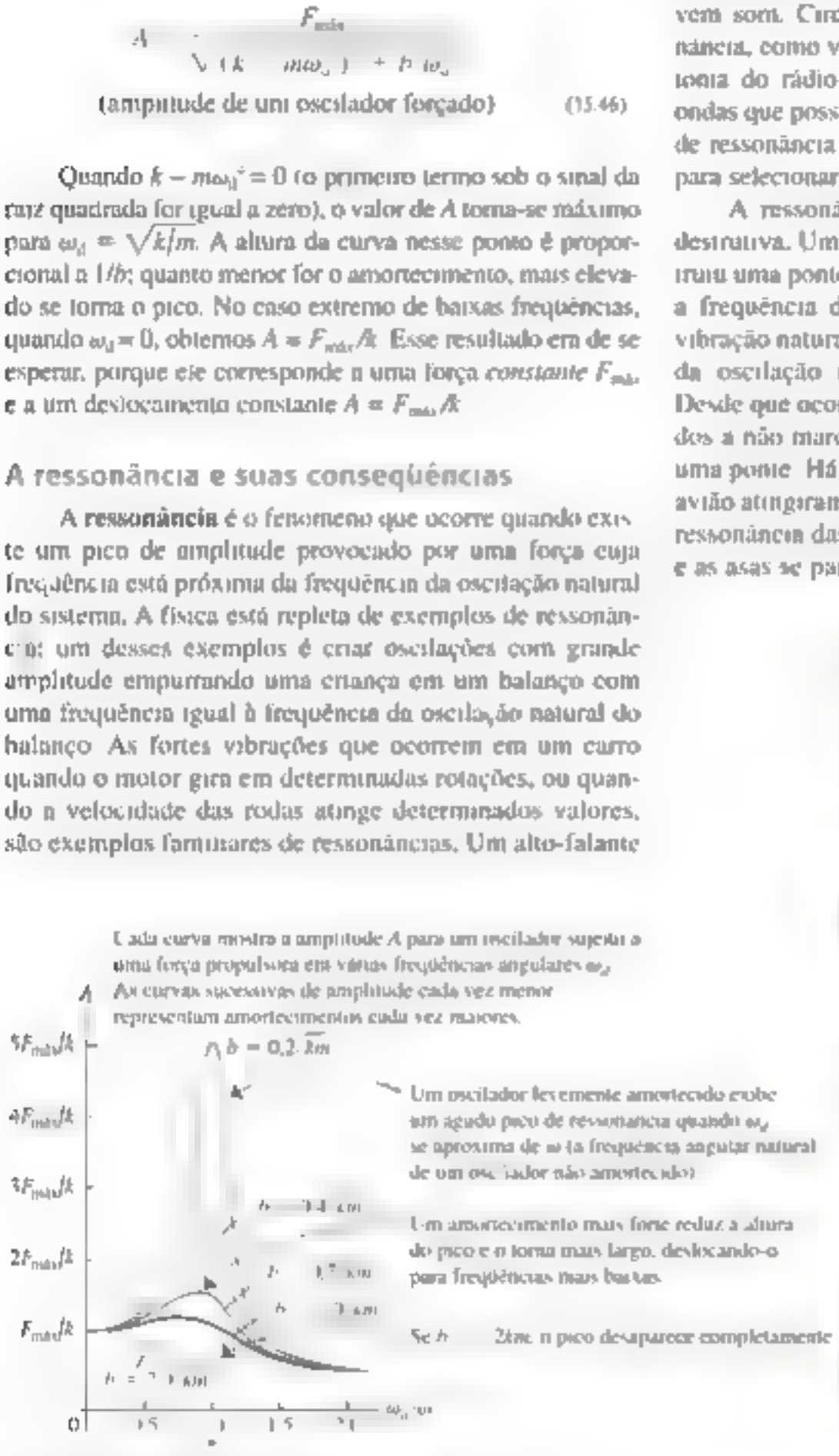

A
$3F_{máx}/k$
$2F_{máx}/k$
$F_{máx}/k$
0
Cada curva mostra a amplitude A para um oscilador sujeito a uma força propulsora em várias frequências angulares ω_d. As curvas sucessivas de amplitude cada vez menor representam amortecimentos cada vez maiores.
Um oscilador levemente amortecido exibe um agudo pico de ressonância quando ω_d se aproxima de ω (a frequência angular natural de um oscilador não amortecido).
Um amortecimento mais forte reduz a altura do pico e o torna mais largo, deslocando-o para frequências mais baixas.
A frequência angular da força propulsora ω_d é igual à frequência angular natural ω de um oscilador não amortecido.

Figura 13.28 Gráfico da amplitude A da oscilação forçada de um oscilador harmônico amortecido em função da frequência angular ω_d da força propulsora. Cada curva tem uma constante de amortecimento b diferente. O eixo horizontal mostra a frequência angular ω_d e a frequência angular $\omega = \sqrt{k/m}$ da oscilação natural não amortecida. Cada curva apresenta um valor diferente da constante de amortecimento b.

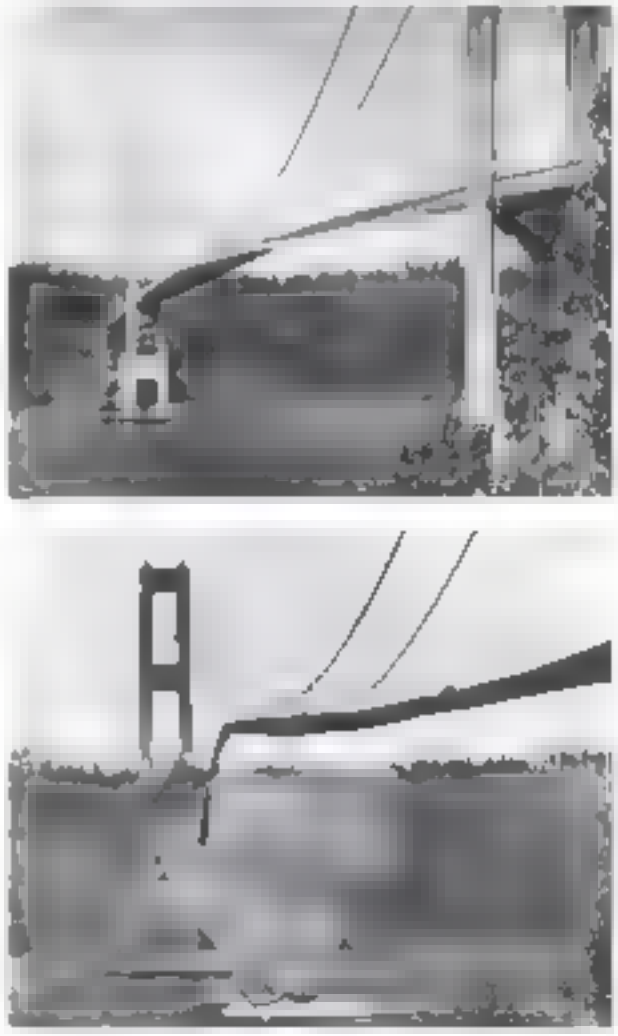


Figura 13.29 A ponte *Tacoma Narrows* foi destruída quatro meses e seis dias depois da sua inauguração. O vão principal, com 853,44 m de comprimento e 11,89 m de largura, contava com vigas protetoras de aço de 2,44 m de altura dos dois lados. A amplitude máxima das vibrações de torção foi de 35° e a frequência de ressonância foi de aproximadamente 0,2 Hz.

Quase todo mundo provavelmente já assistiu ao filme do colapso da ponte pênsil *Tacoma Narrows*, ocorrido em 1940 (Figura 13.29). Esse acontecimento geralmente é citado como um exemplo de ressonância provocada pelo vento, porém existem dúvidas sobre a adequação dessa denominação. O vento não precisa variar *periodicamente* com uma freqüência próxima da frequência natural da ponte. O ar que passava pela ponte era turbulento e produzia vórtices de ar com uma frequência regular que dependia da velocidade do vento. É possível que essa freqüência tenha atingido um valor próximo da frequência de ressonância da ponte. Entretanto, o desastre pode ter sido causado por uma vibração mais sutil denominada *oscilação auto-excitada*, na qual as forças aerodinâmicas produzidas pelo vento *estacionário* soprando na ponte tendiam a deslocá-la para além da posição de equilíbrio em momentos em que ela já estava se afastando da posição de equilíbrio. Isso seria como se houvesse uma força de amortecimento dada pelo termo $-bv$, na Equação (13.40), porém com um sinal contrário ao dessa equação. Em vez de drenar a energia mecânica para fora do sistema, essa força contrária ao amortecimento bombeava energia para dentro do sistema, fazendo as oscilações crescerem até atingir uma amplitude destrutiva. Nesse caso, a equação diferencial aproximada seria dada pela Equação (13.41) com o sinal do termo b invertido, e a solução dessa equação seria dada pela Equação (13.42) com o sinal *positivo* no expoente. Você percebe como isso pode ser problemático? Para prevenir tais desastres, os engenheiros aprenderam a fazer cálculos aerodinâmicos e de estrutura para estabilizar uma ponte pênsil.

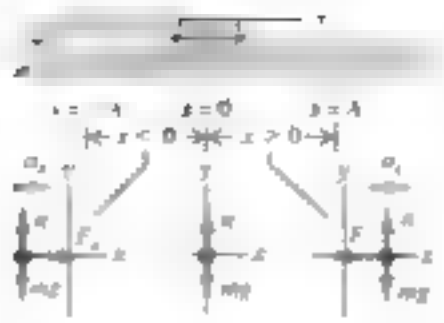
Teste sua compreensão da Seção 13.8 Quando submetido a uma força propulsora com uma freqüência próxima à sua freqüência natural, um oscilador com amortecimento muito fraco apresenta uma resposta muito maior do que o mesmo oscilador com amortecimento mais forte. Quando submetido a uma força propulsora com uma freqüência muito maior ou muito menor do que sua freqüência natural, qual oscilador apresentará uma resposta maior: (i) aquele com amortecimento muito fraco ou (ii) aquele com amortecimento mais forte? ∎

Resumo

Movimento periódico: O movimento periódico é aquele que se repete em um ciclo definido. Ele ocorre quando o corpo possui uma posição de equilíbrio estável e uma força restauradora que atua sobre o corpo quando ele é deslocado da sua posição de equilíbrio. O período T é o tempo necessário para completar um ciclo. A frequência f é o número de ciclos por unidade de tempo. A frequência angular ω é 2π vezes a frequência. (Veja o Exemplo 13.1.)

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \tag{13.1}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{13.2}$$



Movimento harmônico simples. Quando a força resultante for uma força restauradora F_x diretamente proporcional ao deslocamento x, o movimento denomina-se movimento harmônico simples (MHS). Em muitos casos, essa condição é satisfeita se o deslocamento a partir do equilíbrio for pequeno. A frequência angular, a frequência e o período em MHS não dependem da amplitude, apenas da massa m e da constante da mola k. O deslocamento, a velocidade e a aceleração em MHS são funções senoidais do tempo; a amplitude A e o ângulo de fase ϕ da oscilação são determinados pela posição inicial e velocidade do corpo. (Veja os exemplos 13.2, 13.3, 13.6 e 13.7.)

$$F = -kx \tag{13.3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.10}$$

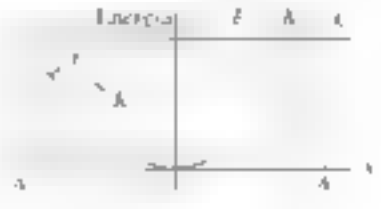
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.11}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13.12}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{13.13}$$

Energia no movimento harmônico simples. A energia se conserva no MHS. A energia total pode ser expressa em termos da constante da mola k e da amplitude A. (Veja os exemplos 13.4 e 13.5.)

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \tag{13.21}$$



Movimento harmônico simples angular No movimento harmônico angular, a freqüência e a freqüência angular são relacionadas ao momento de inércia I e à constante de torção k.

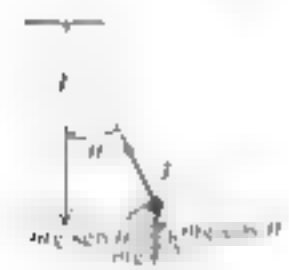
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad \text{e} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{13.24}$$

Pêndulo simples Um pêndulo simples é constituído por uma massa pontual m presa à extremidade de um fio sem massa de comprimento L. Seu movimento é aproximadamente harmônico simples para amplitudes suficientemente pequenas, portanto a freqüência angular, a freqüência e o período dependem apenas de g e L, não da massa ou da amplitude. (Veja o Exemplo 13.8.)

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{13.32}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{13.33}$$

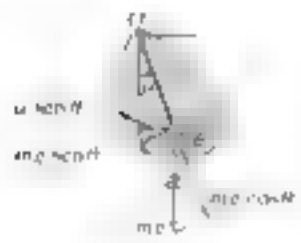
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \tag{13.34}$$



Pêndulo físico Um pêndulo físico é qualquer corpo suspenso em um eixo de rotação. A freqüência angular, a freqüência e o período, para oscilações de pequena amplitude, são independentes da amplitude; dependem somente da massa m, da distância d do eixo de rotação ao centro de gravidade e do momento de inércia I em torno do eixo de rotação. (Veja os exemplos 13.9 e 13.10.)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{13.38}$$

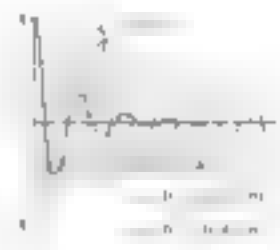
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{13.39}$$



Oscilações amortecidas Quando uma força amortecedora proporcional à velocidade $F_x = -bv_x$ atua em um oscilador harmônico, o movimento denomina-se oscilação amortecida. Se $b < 2\sqrt{km}$ $\omega' = \sqrt{k/m}$ (subamortecimento), o sistema oscila com uma amplitude cada vez menor e uma freqüência angular ω' menor do que seria sem o amortecimento. Se $b = 2\sqrt{km}$ $\omega' = \sqrt{k/m}$ (amortecimento crítico) ou se $b > 2\sqrt{km}$ $\omega' = \sqrt{k/m}$ (superamortecimento), então o sistema ao ser deslocado retorna ao equilíbrio sem oscilar.

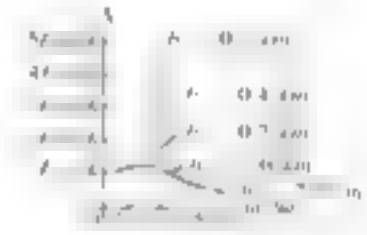
$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos\omega' t \tag{13.42}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{13.43}$$



Oscilações forçadas e ressonância Quando uma força propulsora que varia senoidalmente atua sobre um oscilador harmônico amortecido, o movimento resultante denomina-se oscilação forçada. A amplitude é dada em função da freqüência angular ω_d da força propulsora, e atinge um pico quando a freqüência da força propulsora possui um valor próximo da freqüência da oscilação natural do sistema. Esse fenômeno denomina-se ressonância.

$$A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{m^2(\omega_d^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \tag{13.46}$$



Principais termos

amortecimento, 56
amortecimento crítico, 57
amplitude, 37
ângulo de fase, 43
ciclo, 37
círculo de referência, 40
deslocamento, 37
fasor, 40
força propulsora, 58
força restauradora, 37
freqüência angular natural, 58
freqüência angular, 37
freqüência, 37
movimento harmônico simples (MHS), 38
movimento periódico (oscilação), 36

oscilação amortecida, 56
oscilação forçada, 58
oscilador harmônico, 39
pêndulo físico, 54
pêndulo simples, 52
período, 37
ressonância, 59
subamortecimento, 57
superamortecimento, 57

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Nenhuma das respostas. O relógio continuaria marcando o tempo corretamente. Se a massa de sua haste for pequena a ponto de poder ser desprezada, então o pêndulo é um pêndulo simples e seu período é independente da massa [veja a Equação (13.34)]. Se a massa do pêndulo for incluída, o pêndulo é um pêndulo físico. Dobrar sua massa m faz com que seu momento de inércia I também seja dobrado, logo a razão I/m permanece inalterada e o período $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$ [Equação (13.39)] não se altera.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

13.1 **Respostas: (a)** $x < 0$, **(b)** $x > 0$, **(c)** $x < 0$, **(d)** $x > 0$, **(e)** $x = 0$, **(f)** $x > 0$. A Figura 13.2 mostra que o componente resultante ao eixo Ox da força F_x e da aceleração a_x são ambos positivos quando $x < 0$ (logo, o corpo é deslocado para a esquerda e a mola é comprimida); quando $x > 0$, F_x e a_x são ambas negativas (assim o corpo é deslocado para a direita, e a mola é esticada). Portanto, x e a_x sempre apresentam sinais *opostos*. Isso é verdade quer o objeto esteja se movendo para a direita ($v_x > 0$), quer para a esquerda ($v_x < 0$), ou mesmo se não estiver se movendo ($v_x = 0$), já que a força exercida pela mola depende apenas do fato de ela estar comprimida ou esticada, e de que comprimento. Isso explica as respostas de (a) até (e). Se a aceleração for nula como em (f), a força resultante também deve ser nula e, assim, a mola não deve estar comprimida nem esticada: logo, $x = 0$.

13.2 **Respostas: (a)** $A > 0{,}10$ **m,** $\phi < 0$**; (b)** $A > 0{,}10$ **m,** $\phi > 0$**.** Em ambas as situações, a velocidade inicial v_{0x} no eixo Ox em $t = 0$ não é nula. Portanto, pela Equação (13.19), a amplitude $A = \sqrt{x_0^2 + (v_{0x}^2/\omega^2)}$ é maior do que a coordenada inicial no eixo Ox $x_0 = 0{,}10$ m. Pela Equação (13.18), o ângulo de fase é dado por $\phi = \arctg(-v_{0x}/\omega x_0)$, sendo positivo se a grandeza $-v_{0x}/\omega x_0$ (o argumento da função arco tangente) for positivo, e negativo se $-v_{0x}/\omega x_0$ for negativo. Na parte (a) x_0 e v_{0x} são ambos positivos, portanto $-v_{0x}/\omega x_0 < 0$ e $\phi < 0$. Na parte (b), x_0 é positivo e v_{0x} é negativo, portanto $-v_{0x}/\omega x_0 > 0$ e $\phi > 0$.

13.3 **Respostas: (a) (iii), (b) (v).** Para aumentar a energia total $E = \frac{1}{2}kA^2$ de um fator 2, a amplitude A deve ser aumentada de um fator $\sqrt{2}$. Como se trata de um MHS, a variação da amplitude não exerce nenhum efeito sobre a freqüência.

13.4 **Resposta: (i).** O período de oscilação de um corpo de massa m suspenso em uma mola de força constante k é dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, a mesma expressão que usamos para um corpo preso a uma mola horizontal. Nem m nem k variam quando o aparelho é levado a Marte; portanto o período não se altera. A única diferença é que, na posição de equilíbrio, a mola irá se esticar de um comprimento menor em Marte do que na Terra, devido à gravidade menor.

13.5 **Resposta: não.** Assim como ocorre com um objeto oscilando em uma mola, na posição de equilíbrio a *velocidade* do peso do pêndulo não varia momentaneamente (isso ocorre quando a velocidade é máxima, portanto sua derivada é zero nesse momento). Entretanto, a *direção* do movimento varia, porque o peso do pêndulo executa uma trajetória circular. Assim, o peso deve ter um componente da aceleração perpendicular ao deslocamento e orientado para o centro do círculo (ver Seção 3.4). Para produzir essa aceleração na posição de equilíbrio quando a mola está na vertical, a força de tensão para cima nessa posição deve ser maior do que o peso do pêndulo. Isso produz uma força resultante para cima sobre o peso do pêndulo e uma aceleração para cima na direção do centro da trajetória circular.

13.6 **Resposta: (i).** O período de um pêndulo físico é dado pela Equação (13.39), $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$. A distância $d = L$ do pivô ao centro de gravidade é a mesma para a barra e para o pêndulo simples, assim como a massa m. Isso significa que, para qualquer ângulo de deslocamento, o mesmo torque restaurador age tanto sobre a barra quanto sobre o pêndulo simples. Entretanto, a barra possui um momento de inércia maior: $I_{barra} = \frac{1}{12}m(2L)^2 = \frac{1}{3}mL^2$ e $I_{pendulo} = mL^2$ (toda a massa do pêndulo está a uma distância L do pivô). Logo, a barra possui um período maior.

13.7 **Resposta: (ii).** As oscilações são subamortecidas com uma amplitude decrescente em cada ciclo de oscilação, como mostrado na Figura 13.26. Se as oscilações não fossem amortecidas, elas continuariam indefinidamente com a mesma amplitude. Se elas fossem amortecidas criticamente ou superamortecidas, o nariz não oscilaria para cima e para baixo, e sim retornaria suavemente à posição de equilíbrio original, sem ultrapassá-la.

13.8 **Resposta: (i).** A Figura 13.28 mostra que a curva da amplitude em função da freqüência angular da força propulsora é ascendente em *todas* as freqüências à medida que a constante de amortecimento b diminui. Logo, para valores fixos de k e m, o oscilador com o menor amortecimento (menor valor de b) apresentará a maior resposta diante de qualquer freqüência da força propulsora.

Questões para discussão

Q13.1 Um objeto está se movendo na extremidade de uma mola com um MHS de amplitude A. Se a amplitude for dobrada, o que acontece com a distância total que o objeto percorre em um período? O que acontece com o período? O que acontece com a velocidade máxima do objeto? Discuta como essas respostas estão relacionadas.

Q13.2 Forneça diversos exemplos da vida cotidiana de movimentos que possam ser aproximadamente considerados harmônicos simples. Em que aspectos eles diferem do MHS?

Q13.3 Um diapasão ou um dispositivo semelhante usado para afinar um instrumento musical executa um movimento harmônico simples? Por que essa questão é essencial para os músicos?

Q13.4 Uma caixa contendo uma pedrinha é presa a uma mola ideal horizontal e está oscilando em uma mesa de ar sem atrito. Quando a caixa atinge a sua distância máxima do ponto de equilíbrio, a pedrinha é subitamente içada na vertical sem que a caixa seja movida. Diga quais das seguintes grandezas aumentarão, diminuirão ou permanecerão inalteradas no movimento subseqüente da caixa: (a) freqüência; (b) período; (c) amplitude; (d) a energia cinética máxima da caixa; (e) a velocidade máxima da caixa. Justifique cada resposta.

Q13.5 Se uma certa mola uniforme fosse cortada em duas partes iguais, qual seria a constante da mola de cada metade? Justifique sua resposta. Usando-se a mesma massa na extremidade, qual seria a diferença entre a frequência do MHS da metade da mola e a frequência da mola inteira?

Q13.6 A análise do MHS feita neste capítulo não levou em consideração a massa da mola. Como a massa da mola altera as características do movimento?

Q13.7 Dois corpos idênticos sobre um trilho de ar estão ligados por uma mola ideal. A oscilação desse sistema constitui um MHS? Explique. Como esse período pode ser comparado com o de um único corpo preso a uma mola cuja outra extremidade está presa a um objeto fixo? Explique.

Q13.8 Você é capturado por marcianos, levado para a nave deles e posto para dormir. Você acorda algum tempo depois e se vê trancado em uma sala pequena, sem janelas. Tudo o que os marcianos lhe deixaram é seu relógio digital de pulso, o anel da sua escola e a sua velha corrente de prata. Explique como você pode verificar se ainda está na Terra ou foi levado para Marte.

Q13.9 O sistema indicado na Figura 13.17 é montado em um elevador. O que acontece com o período do movimento (aumenta, diminui ou permanece constante) se o elevador (a) está subindo com aceleração igual a 5,0 m/s², (b) está subindo com velocidade constante de 5,0 m/s, e (c) está descendo com aceleração igual a 5,0 m/s²? Justifique suas respostas.

Q13.10 Se um pêndulo possui um período de 2,5 s na Terra, qual seria o seu período em uma estação espacial em órbita ao redor da Terra? Se uma massa suspensa em uma mola vertical possui um período de 5,0 s na Terra, qual seria o seu período na estação espacial? Justifique todas as suas respostas.

Q13.11 Um pêndulo simples é montado em um elevador. O que acontece com o período do movimento (aumenta, diminui ou permanece constante) se o elevador (a) está subindo com aceleração igual a 5,0 m/s², (b) está subindo com velocidade constante de 5,0 m/s, (c) está descendo com aceleração igual a 5,0 m/s² e (d) está descendo com aceleração igual a 9,8 m/s²? Justifique suas respostas.

Q13.12 Explique o que você deve fazer com o comprimento de um pêndulo simples para: a) dobrar sua frequência, b) dobrar seu período, c) dobrar sua frequência angular.

Q13.13 Se um relógio de pêndulo for transportado ao topo de uma montanha, ele se atrasará ou adiantará, supondo que mostrasse a hora certa na base da montanha? Justifique sua resposta.

Q13.14 Quando a amplitude de um pêndulo simples aumenta, seu período aumenta ou diminui? Forneça um argumento qualitativo, não se baseie na Equação (13.35). Seu argumento também será válido para um pêndulo físico?

Q13.15 Por que um cão com pernas curtas (como o da raça *dachshund*) caminha com passos mais velozes do que um cão com pernas altas (como o cão dinamarquês)?

Q13.16 Em que ponto do movimento de um pêndulo simples a tensão no fio atinge o valor máximo? E o valor mínimo? Em cada caso, explique o raciocínio usado na resposta.

Q13.17 Um padrão de tempo pode ser baseado no período de um certo pêndulo-padrão? Quais seriam as vantagens e as desvantagens desse padrão em relação ao padrão atual de tempo discutido na Seção 1.3?

Q13.18 Em um pêndulo simples, distingа claramente entre ω (a velocidade angular) e α (a frequência angular). Qual é constante e qual é variável?

Q13.19 Um corpo é preso a uma mola fixa ideal e oscila sobre um trilho de ar horizontal, sem atrito. Uma moeda está em cima do corpo e oscila com ele. Em que pontos do movimento a força de atrito sobre a moeda é maior? Em que ponto é menor? Justifique suas respostas.

Q13.20 Ao projetar uma estrutura em uma região propensa à ocorrência de terremotos, qual deve ser a relação entre a frequência da estrutura e a frequência típica de um terremoto? Por quê? A estrutura deve possuir um amortecimento grande ou pequeno?

Exercícios

Seção 13.1 Causas da oscilação

13.1 A corda de um piano emite um *lá* médio vibrando com uma frequência fundamental igual a 220 Hz. a) Calcule o período e a frequência angular. b) Calcule a frequência angular de uma soprano emitindo um *lá* uma oitava acima, que é igual a duas vezes a frequência da corda do piano.

13.2 Se um objeto sobre uma superfície horizontal, sem atrito, é preso a uma mola, deslocado e depois liberado, ele irá oscilar. Se ele for deslocado 0,120 m da sua posição de equilíbrio e liberado com velocidade inicial igual a zero, depois de 0,800 s verifica-se que o seu deslocamento é de 0,120 m no lado oposto e que ele ultrapassou uma vez a posição de equilíbrio durante esse intervalo. Ache (a) a amplitude, (b) o período, (c) a frequência.

13.3 A extremidade de um diapasão executa 440 vibrações completas em 0,500 s. Calcule a frequência angular e o período do movimento.

13.4 O deslocamento de um objeto oscilando em função do tempo é mostrado na Figura 13.30. Quais são (a) a frequência; (b) a amplitude; (c) o período; (d) a frequência angular desse movimento?

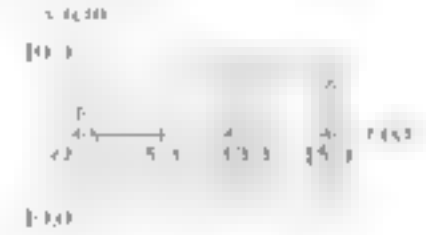


Figura 13.30 Exercício 13.4

Seção 13.2 Movimento harmônico simples

13.5 A peça de uma máquina está se movendo em MHS com uma frequência igual a 5,0 Hz e amplitude igual a 1,80 cm. Quanto tempo leva para a peça ir de $x = 0$ até $x = -1,80$ cm?

13.6 Em um laboratório de física, você liga um planador de um trilho de ar com 0,200 kg à extremidade de uma mola ideal com massa desprezível e inicia a oscilação. O tempo decorrido entre o instante em que o cavaleiro ultrapassa a posição de equilíbrio e a segunda vez que ele ultrapassa esse ponto é igual a 2,60 s. Calcule o valor da constante da mola.

13.7 Quando um corpo de massa desconhecida é ligado a uma mola ideal cuja constante é igual a 120 N/m, verifica-se que ele oscila com uma frequência igual a 6,0 Hz. Ache a) o período, b) a frequência angular, c) a massa do corpo.

13.8 Quando uma massa de 0,750 kg oscila em uma mola ideal, a frequência é igual a 1,33 Hz. Qual será a frequência se 0,220 kg forem adicionados à massa original, e (b) subtraídos à massa original? Tente resolver este problema *sem* achar a constante da mola.

13.9 Um oscilador harmônico possui massa de 0,500 kg e uma mola ideal cuja constante é igual a 140 N/m. Ache a) o período, b) a frequência, c) a frequência angular das oscilações.

13.10 **Arrancada.** A corda de um violão vibra com uma freqüência igual a 440 Hz. Um ponto em seu centro se move com MHS com amplitude igual a 3,0 mm e um ângulo de fase igual a zero. a) Escreva uma equação para a posição do centro da corda em função do tempo. b) Quais são os valores máximos dos módulos da velocidade e da aceleração do centro da corda? c) A derivada da aceleração em relação ao tempo pode ser chamada de *'arrancada'*. Escreva uma equação para a arrancada do centro da corda em função do tempo e calcule o valor máximo do módulo da arrancada.

13.11 Um bloco de 2,0 kg sem atrito está preso a uma mola ideal cuja constante é igual a 300 N/m. Em $t = 0$ a mola não está comprimida nem esticada, e o bloco se move no sentido negativo com 12,0 m/s. Ache a) a amplitude, b) o ângulo de fase. c) Escreva uma equação para a posição em função do tempo.

13.12 Repita o Exercício 13.11, porém suponha que em $t = 0$ o bloco possua velocidade – 4,0 m/s e deslocamento igual a +0,200 m.

13.13 A ponta da agulha de uma máquina de costura se move com MHS ao longo de um eixo Ox com uma freqüência igual a 2,5 Hz. Em $t = 0$ os componentes da posição e da velocidade são, respectivamente, +1,1 cm e –15 cm/s. a) Ache o componente da aceleração da agulha para $t = 0$. b) Escreva equações para os componentes da posição, da velocidade e da aceleração do ponto considerado em função do tempo.

13.14 Um objeto executa um movimento harmônico simples com período de 1200 s e amplitude igual a 0,600 m. Em $t = 0$ o objeto está em $x = 0$. Qual é a distância entre o objeto e a posição de equilíbrio quando $t = 0,480$ s?

13.15 **Pesando astronautas.** Este processo tem sido realmente usado para "pesar" astronautas no espaço. Uma cadeira de 42,5 kg é presa a uma mola e deixada oscilar livremente. Quando vazia, a cadeira leva 1,30 s para completar uma vibração. Mas com uma astronauta sentada nela, sem apoiar os pés no chão, a cadeira leva 2,54 s para completar um ciclo. Qual é a massa da astronauta?

13.16 Um objeto de 0,400 kg em MHS possui uma aceleração $a = -2,70$ m/s^2 quando $x = 0,300$ m. Qual é a duração de uma oscilação?

13.17 Sobre um trilho de ar sem atrito, horizontal, um corpo oscila na extremidade de uma mola ideal de constante 2,50 N/cm. O gráfico da Figura 13.31 mostra a aceleração do corpo em função do tempo. Encontre (a) a massa do corpo; (b) o deslocamento máximo do corpo a partir do ponto de equilíbrio; (c) a força máxima que a mola exerce sobre o corpo.

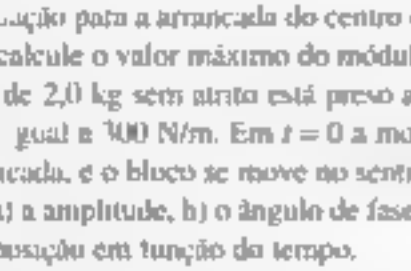


Figura 13.31 Exercício 13.17

13.18 Uma massa de 0,500 kg oscilando em uma mola tem a velocidade em função do tempo dada por $v_x(t) = (3,60 \text{ cm/s}) \operatorname{sen}[(4,71 \text{ s}^{-1})t - \pi/2]$. Qual é (a) o período; (b) a amplitude; (c) a aceleração máxima da massa; (d) a constante da mola?

13.19 Uma massa de 1,50 kg oscilando em uma mola tem o deslocamento em função do tempo dado pela equação

$$x(t) = (7,40 \text{ cm}) \cos[(4,16 \text{ s}^{-1})t - 2,42]$$

Encontre (a) o tempo de uma vibração completa; (b) a constante da mola; (c) a velocidade máxima da massa; (d) a força máxima sobre a massa; (e) a posição, velocidade e aceleração da massa em $t = 1,00$ s; (f) a força sobre a massa nesse instante.

13.20 Um objeto executa um movimento harmônico simples com período de 0,300 s e amplitude igual a 6,0 cm. Em $t = 0$ o objeto está instantaneamente em repouso em $x = 6,0$ cm. Calcule o tempo que o objeto leva para ir de $x = 6,0$ cm até $x = -1,50$ cm.

Seção 13.3 Energia no movimento harmônico simples

13.21 Um diapasão projetado para medir 392 Hz possui a extremidade dos dois ramos do garfo vibrando com uma amplitude de 0,600 mm. a) Qual é a velocidade máxima da extremidade de um ramo? b) Uma mosca (*Musca domestica*) de massa igual a 0,0270 g está pousada na extremidade de um dos ramos. À medida que o ramo vibra, qual é a energia cinética máxima da mosca? Suponha que a massa da mosca possua efeito desprezível sobre a frequência da oscilação.

13.22 Um oscilador harmônico possui frequência ω e amplitude A. a) Quais são os valores dos módulos da posição e da velocidade quando a energia potencial elástica for igual à energia cinética? (Suponha que $U = 0$ no equilíbrio.) b) Quantas vezes isso ocorre em cada ciclo? Qual é o intervalo de tempo entre duas ocorrências consecutivas? c) No momento em que o deslocamento é igual a $A/2$, qual é a fração da energia total do sistema referente à energia cinética e a qual fração corresponde à energia potencial?

13.23 Um corpo de 0,500 kg, ligado à extremidade de uma mola ideal de constante $k = 450$ N/m, executa um movimento harmônico simples com amplitude igual a 0,040 m. Calcule: a) a velocidade máxima do cavaleiro; b) a velocidade do cavaleiro quando ele está no ponto $x = -0,015$ m; c) o módulo da aceleração máxima do cavaleiro; d) a aceleração do cavaleiro quando ele está no ponto $x = -0,015$ m; e) a energia mecânica total do cavaleiro quando ele está em qualquer ponto.

13.24 Uma animadora de torcida faz seu pompom oscilar em MHS com uma amplitude 18,0 cm e freqüência igual a 0,850 Hz. Ache: a) o módulo da velocidade e da aceleração máximas; b) o módulo da velocidade e da aceleração quando a coordenada do pompom é $x = +9,0$ cm; c) o tempo necessário para ele se deslocar da posição de equilíbrio até o ponto $x = 12,0$ cm a partir do equilíbrio. d) Quais das grandezas solicitadas nas partes (a), (b) e (c) podem ser obtidas usando-se o método da energia da Seção 13.3 e quais não podem? Explique.

13.25 Para a situação descrita na parte (a) do Exemplo 13.5, qual deveria ser o valor m da porção de massa de vidraceiro para que a amplitude depois da colisão seja igual à metade da amplitude original? Para esse valor de m, qual é a fração da energia mecânica original convertida em calor?

13.26 Um brinquedo de 0,150 kg executa um movimento harmônico simples na extremidade de uma mola horizontal com uma constante $k = 300$ N/m. Quando o objeto está a uma distância de 0,012 m da posição de equilíbrio, verifica-se que ele possui uma velocidade igual a 0,300 m/s. Quais são a) a energia mecânica total do objeto quando ele está em qualquer ponto; b) a amplitude do movimento; c) a velocidade máxima atingida pelo objeto durante o movimento?

13.27 Você observa um objeto movendo-se em MHS. Quando o objeto é deslocado até 0,600 m à direita de sua posição de equilíbrio, sua velocidade é igual a 2,20 m/s para a direita, e sua aceleração é igual a 8,40 m/s^2 para a esquerda. A que distância máxima

desse ponto irá o objeto se mover antes de parar momentaneamente e depois recomeçar a se mover para a esquerda?

13.28 Em uma mesa horizontal, sem atrito, uma caixa com o lado superior aberto de massa igual a 5,20 kg é suspensa em uma mola ideal horizontal de constante igual a 375 N/m. Dentro da caixa há uma pedra de 3,44 kg. O sistema está oscilando com uma amplitude de 7,50 cm. Quando a caixa alcança sua velocidade máxima, a pedra é subitamente apanhada na vertical da caixa sem tocar nela. Encontre (a) o período e (b) a amplitude do movimento resultante da caixa. (c) Sem fazer nenhum cálculo, diga se o novo período é maior ou menor do que o inicial. Como você sabe disso?

13.29 Dentro de um veículo de testes da Nasa, uma bola de 3,50 kg é puxada por uma mola horizontal ideal fixa a uma mesa livre de atrito. A constante da mola é 225 N/m. O veículo tem uma aceleração constante igual a 5,0 m/s^2, e a bola não está oscilando. De repente, quando a velocidade do veículo chegou a 45,0 m/s, seus motores são desligados, o que elimina a sua aceleração, mas não a sua velocidade. Calcule (a) a amplitude e (b) a frequência das oscilações resultantes da bola. (c) Qual será a velocidade máxima da bola em relação ao veículo?

Seção 13.4 Aplicações do movimento harmônico simples

13.30 Um orgulhoso pescador de águas marinhas profundas pendura um peixe de 65,0 kg na extremidade de uma mola ideal de massa desprezível. O peixe estica a mola de 0,120 m. a) Qual é a constante da mola? Se o peixe for puxado para baixo e liberado, b) qual é o período da oscilação do peixe? (c) Que velocidade máxima ele alcançará?

13.31 Um corpo de 175 g sobre um trilho de ar horizontal, sem atrito, é preso a uma mola fixa ideal de constante 155 N/m. No instante em que você efetua medições sobre o corpo, ele está se movendo a 0,875 m/s e está a 3,0 cm de seu ponto de equilíbrio. Use a *conservação da energia* para calcular (a) a amplitude do movimento e (b) a velocidade máxima do corpo. (c) Qual é a frequência angular das oscilações?

13.32 Um gato com massa igual a 4,0 kg está preso por arreios a uma mola ideal de massa desprezível e oscila verticalmente em MHS. A amplitude do movimento é 0,050 m. No ponto mais alto do movimento, a mola está na posição natural, ou seja, não está esticada. Calcule a energia potencial elástica da mola (considerando-a igual a zero quando ela não está esticada), a energia cinética do gato, a energia potencial gravitacional do sistema em relação ao ponto mais baixo do movimento e a soma dessas três energias quando o gato está a) no ponto mais alto do movimento; b) no ponto mais baixo; c) no ponto de equilíbrio.

13.33 Uma bola de 1,50 kg e outra de 2,0 kg são coladas uma na outra, a mais leve embaixo da mais pesada. A bola de cima é presa a uma mola vertical ideal de constante 165 N/m, e o sistema está vibrando verticalmente com uma amplitude de 15,0 cm. A cola usada para juntar as bolas é velha e fraca, e cede de repente, quando as bolas estão na posição mais baixa de seu movimento. (a) Por que é mais provável que a cola ceda no ponto mais baixo e não em qualquer outro ponto do movimento? (b) Calcule a amplitude e a frequência das vibrações depois que a bola de baixo houver se soltado.

13.34 Um disco de metal sólido, uniforme, de massa igual a 6,50 kg e diâmetro igual a 24,0 cm está suspenso em um plano horizontal, sustentado em seu centro por um fio de metal na vertical. Você descobre que é preciso uma força horizontal de 4,23 N tangente à borda do disco para girá-lo de 3,34° torcendo, assim, o fio de metal. A seguir você remove essa força e liberta o disco a partir do repouso. (a) Qual é a constante de torção do fio de metal? (b) Qual é a frequência e o período das oscilações de torção do disco? (c) Escreva a equação do movimento para θ (*t*) do disco.

13.35 Um relógio dá quatro tiques a cada segundo; cada tique corresponde à metade do período. A roda catarina do relógio consiste em uma fina camada circular com raio de 0,55 cm conectada ao conjunto da roda por meio de raios com massas desprezíveis. A massa total da roda é igual a 0,90 g. a) Qual é o momento de inércia da roda em torno do eixo central? b) Qual é a constante de torção da mola capilar?

13.36 Um disco metálico fino de massa igual a 2,0 × 10^{-3} kg e raio igual a 2,20 cm está suspenso em seu centro por uma longa fibra (Figura 13.32). O disco, depois de torcido e libertado, oscila com um período igual a 1,0 s. Calcule a constante de torção da fibra.

Figura 13.32 Exercício 13.36

13.37 Você deseja determinar o momento de inércia de certa parte complicada de uma máquina em relação a um eixo passando em seu centro de massa. Você suspende o objeto por um fio ao longo desse eixo. A constante de torção do fio é igual a 0,450 N · m/rad. Você torce ligeiramente o objeto no redor desse eixo e o liberta, cronometrando 125 oscilações em 265 s. Qual é o momento de inércia?

13.38 A roda catarina de um relógio vibra com uma amplitude angular θ, uma frequência angular ω e um ângulo de fase $\phi = 0$. a) Determine uma expressão para a velocidade angular $d\theta/dt$ e para a aceleração angular $d^2\theta/dt^2$ em função do tempo. b) Determine a velocidade angular e a aceleração angular quando seu deslocamento angular for igual a θ; e quando seu deslocamento angular for igual a $\theta/2$ e θ estiver diminuindo. (*Sugestão*: Faça um gráfico de θ em função de *t*.)

*13.39 Para a interação de van der Waals com uma função de energia potencial dada pela Equação (13.25), mostre que, quando o módulo do deslocamento *x* a partir do equilíbrio ($r = R_0$) for pequeno, a energia potencial pode ser aproximadamente escrita como $U \approx \frac{1}{2}kx^2 - U_0$. [*Sugestão*: Na Equação (13.25), faça $r = R_0 + x$ e $u = x/R_0$. A seguir, aproxime $(1 + u)^n$ pelos *três* primeiros termos do desenvolvimento do teorema binomial na Equação (13.28).] Como se compara o valor de *k* dessa equação com a constante da força da Equação (13.29) para a força?

*13.40 Quando deslocados da posição de equilíbrio, os dois átomos da molécula de H_2 são submetidos a uma força restauradora $F_x = -kx$ com $k = 580$ N/m. Calcule a freqüência da oscilação da molécula de H_2. [*Sugestão*: A massa do átomo de hidrogênio é igual a 1,008 unidade de massa atômica, ou 1 u (ver Apêndice E). Como no Exemplo 13.7 da Seção 13.4, use *m*/2 em vez de *m* na expressão de *f*.]

Seção 13.5 O pêndulo simples

13.41 Você puxa lateralmente um pêndulo simples de 0,240 m de comprimento até um ângulo de 3,50° e solta-o a seguir. a) Quanto tempo leva o peso do pêndulo para atingir a velocidade mais ele-

vada? b) Quanto tempo levaria se o pêndulo simples fosse solto em um ângulo de 1,75° em vez de 3,50°?

13.42 Um alpinista de 85,0 kg planeja saltar, a partir do repouso, de uma saliência de um rochedo usando uma corda leve de 6,50 m de comprimento. Ele segura uma das extremidades da corda, e a outra extremidade é amarrada em uma parede de rocha mais acima. Como a saliência onde ele está não fica muito distante da parede de rocha, a corda forma um ângulo pequeno com a vertical. No ponto mais baixo de seu oscilar, o alpinista planeja largar a corda e cair de uma altura não muito elevada até o chão. (a) Quanto tempo depois de saltar segurando a corda o alpinista chegará pela primeira vez ao seu ponto mais baixo? (b) Se ele perder a primeira oportunidade de soltar a corda, quanto tempo após o início de sua oscilação o alpinista chegará ao seu ponto mais baixo pela segunda vez?

13.43 Um prédio em São Francisco (EUA) tem enfeites luminosos que consistem em pequenos bulbos de 2,35 kg com quebra-luzes pendendo do teto na extremidade de cordas leves e finas de 1,50 m de comprimento. Se um terremoto de fraca intensidade ocorrer, quantas oscilações por segundo farão esses enfeites?

13.44 **Um pêndulo em Marte.** Um pêndulo simples possui na Terra um período igual a 1,60 s. Qual é o período na superfície de Marte onde $g = 3{,}71\ m/s^2$?

13.45 Uma maçã pesa 1,0 N. Quando você a suspende na extremidade de uma mola longa de massa desprezível e constante igual a 1,50 N/m, ela oscila para cima e para baixo com um MHS. Quando você interrompe a oscilação e deixa a maçã oscilar lateralmente em um ângulo pequeno, a frequência do pêndulo simples é igual à metade da frequência da oscilação vertical. (Como o ângulo é pequeno, a oscilação lateral não produz variação do comprimento da mola.) Determine o comprimento da mola quando ela não está esticada (sem a maçã).

13.46 Uma pequena esfera de massa m está presa a uma barra de comprimento L com um pivô em sua extremidade superior, formando um pêndulo simples. O pêndulo é puxado lateralmente até um ângulo Θ com a vertical e a seguir é liberado a partir do repouso. a) Desenhe um diagrama mostrando o pêndulo logo após o instante em que ele é liberado. No diagrama, desenhe vetores representando as *forças* que atuam sobre a esfera e a *aceleração* da esfera. A precisão é importante! Nesse ponto, qual é a aceleração linear da esfera? b) Repita a parte (a) para o instante em que o pêndulo forma um ângulo $\Theta/2$ com a vertical. c) Repita a parte (a) para o instante em que o pêndulo está na direção vertical. Nesse ponto, qual é a velocidade linear da esfera?

13.47 Depois de pousar em um planeta desconhecido, uma exploradora do espaço construiu um pêndulo simples de 50,0 cm de comprimento. Ela verifica que o pêndulo simples executa 100 oscilações completas em 136 s. Qual é o valor de g nesse planeta?

13.48 Um pêndulo simples, de 2,0 m de comprimento, oscila em um ângulo máximo de 30,0° com a vertical. Calcule o seu período (a) supondo uma amplitude pequena e (b) usando os três primeiros termos da Equação (13.35). (c) Qual das respostas às partes (a) e (b) é mais precisa? A resposta menos precisa está errada em que porcentagem em relação à resposta mais precisa?

Seção 13.6 O pêndulo físico

13.49 Uma barra de conexão de 1,80 kg de um motor de automóvel é suspensa por um eixo horizontal mediante um pivô em forma de cunha como indicado na Figura 13.33. O centro de gravidade da barra determinado por equilíbrio está a uma distância de 0,200 m do pivô. Quando ela executa oscilações com amplitudes pequenas, a barra faz 100 oscilações completas em 120 s. Calcule o momento de inércia da barra em relação a um eixo passando pelo pivô.

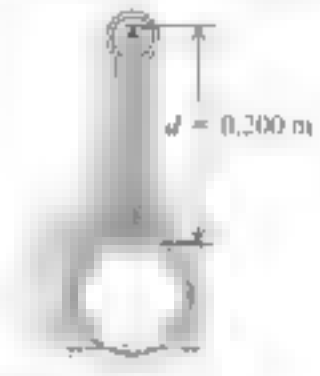


Figura 13.33 Exercício 13.49

13.50 Desejamos suspender um aro fino usando um prego e fazer o aro executar uma oscilação completa com ângulo pequeno a cada 2,0 s. Qual deve ser o valor do raio do aro?

13.51 Mostre que a expressão do período de um pêndulo físico se reduz ao caso do pêndulo simples quando o pêndulo físico for constituído de uma partícula de massa m presa na extremidade de um fio sem massa de comprimento L.

13.52 Um macaco mecânico de 1,80 kg é suspenso por um pivô localizado a uma distância de 0,250 m de seu centro de massa e começa a oscilar como um pêndulo físico. O período da oscilação com ângulo pequeno é igual a 0,940 s. a) Qual é o momento de inércia do macaco em relação a um eixo passando pelo pivô? b) Quando ele é deslocado 0,400 rad da sua posição de equilíbrio, qual é sua velocidade angular quando ele passa pela posição de equilíbrio?

13.53 Dois pêndulos possuem as mesmas dimensões (comprimento L) e massa total (m). O pêndulo A é uma esfera bem pequena oscilando na extremidade de uma barra uniforme de massa desprezível. No pêndulo B, metade da massa pertence à bola e a outra metade à barra uniforme. Encontre o período de cada pêndulo para oscilações pequenas. Qual dos dois pêndulos leva mais tempo para completar uma oscilação?

13.54 Um enfeite de Natal com forma de esfera oca de massa $M = 0{,}015$ kg e raio $R = 0{,}050$ m é pendurado em um ramo da árvore por um pequeno fio preso à superfície da esfera. Se o ornamento é deslocado de um ângulo pequeno e solto a seguir, ele oscila como um pêndulo físico com atrito desprezível. Calcule seu período. (*Sugestão:* Use o teorema dos eixos paralelos para encontrar o momento de inércia da esfera ao redor do pivô situado no ramo da árvore.)

13.55 Cada um dos dois pêndulos mostrados na Figura 13.34 consiste em uma sólida esfera uniforme de massa M sustentado por uma corda de massa desprezível, porém a esfera do pêndulo A é muito pequena, enquanto a esfera do pêndulo B é bem maior. Calcule o período de cada pêndulo para deslocamentos pequenos. Qual das esferas leva mais tempo para completar uma oscilação?

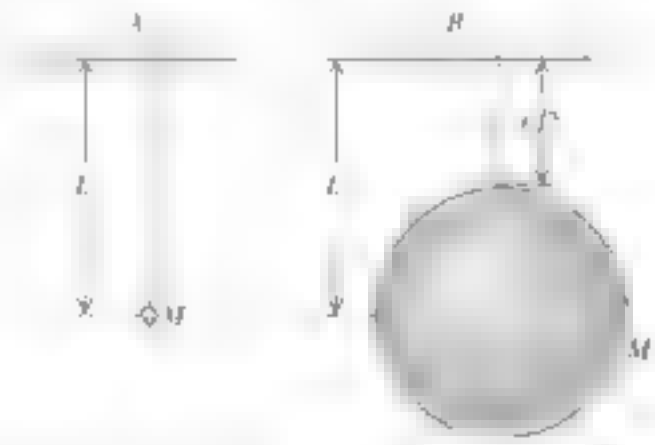


Figura 13.34 Exercício 13.55

Seção 13.7 Oscilações amortecidas

13.56 Uma massa de 2,20 kg oscila em uma mola de constante igual a 250,0 N/m com um período de 0,615 s. (a) Esse sistema é amortecido ou não? Como você sabe disso? Se for amortecido, encontre a constante de amortecimento b. (b) Esse sistema é não amortecido, subamortecido, criticamente amortecido ou superamortecido? Como você sabe que é assim?

13.57 Uma força de amortecimento $F_x = -bv_x$ atua sobre um rato infeliz de 0,300 kg que se move preso na extremidade de uma mola cuja constante é $k = 2,50$ N/m. a) Se a constante b tem um valor igual a 0,900 kg/s, qual é a frequência da oscilação do rato? b) Para qual valor da constante b o movimento é criticamente amortecido?

13.58 Um ovo de 50,0 g fervido durante muito tempo está preso na extremidade de uma mola cuja constante é $k = 25,0$ N/m. Seu deslocamento inicial é igual a 0,300 m. Uma força de amortecimento $F_x = -bv_x$ atua sobre o ovo e a amplitude do movimento diminui para 0,100 m em 5,0 s. Calcule o módulo da constante de amortecimento b.

13.59 O movimento de um oscilador com subamortecimento é descrito pela Equação (13.42). Considere o ângulo de fase ϕ igual a zero. a) De acordo com esta equação, qual é o valor de x em $t = 0$? b) Qual é o módulo, a direção e o sentido da velocidade em $t = 0$? O que esse resultado informa sobre a inclinação do gráfico de x em função de t nas vizinhanças de $t = 0$? c) Obtenha uma expressão para a aceleração a_x para $t = 0$. Para que valores ou intervalo de valores da constante de amortecimento b (em termos de k e de m) é a aceleração para $t = 0$ negativa, nula e positiva? Discuta cada caso em termos do gráfico de x em função de t nas vizinhanças de $t = 0$.

Seção 13.8 Oscilações forçadas e ressonância

13.60 Uma força propulsora variando senoidalmente é aplicada a um oscilador harmônico amortecido de massa m e constante da mola k. Se a constante de amortecimento possui valor b_1, a amplitude é A_1 quando a frequência angular da força propulsora é igual a $\sqrt{k/m}$. Em termos de A_1, qual é a amplitude para a mesma frequência angular da força propulsora e a mesma amplitude da força propulsora F_{max} quando a constante de amortecimento for a) $3b_1$? b) $b_1/2$?

13.61 Uma força propulsora variando senoidalmente é aplicada a um oscilador harmônico amortecido. a) Quais são as unidades da constante de amortecimento b? b) Mostre que a grandeza $\sqrt{km}$ possui as mesmas dimensões de b. c) Em termos de F_{max} e de k, qual é a amplitude para $\omega_d = \sqrt{k/m}$ quando i) $b = 0,2\sqrt{km}$ e ii) $b = 0,4\sqrt{km}$? Compare seus resultados com a Figura 13.28.

13.62 Um dispositivo experimental e sua estrutura de suporte para instalação a bordo da *International Space Station* (Estação Espacial Internacional) deve funcionar como um sistema massa-mola com subamortecimento com massa de 108 kg e constante da mola igual a $2,1 \times 10^6$ N/m. Uma exigência da Nasa é que não ocorra ressonância das oscilações forçadas em nenhuma frequência menor do que 35 Hz. O dispositivo experimental satisfaz essa exigência?

Problemas

13.63 **MHS no motor de um carro.** O movimento do pistão no interior do motor de um carro (Figura 13.35) é aproximadamente um MHS. a) Sabendo que o percurso (o dobro da amplitude) é igual a 0,100 m e que o motor gira com 3500 rev/min, calcule a aceleração do pistão no ponto final do percurso. b) Sabendo que a massa do pistão é igual a 0,450 kg, qual é a força resultante exercida sobre ele nesse ponto? c) Calcule a velocidade e a energia cinética do pistão no ponto médio do percurso. d) Qual é a potência média necessária para acelerar o pistão do repouso até a velocidade calculada no item (c)? e) Se o motor girar a 7000 rev/min, quais serão as respostas das partes (b), (c) e (d)?

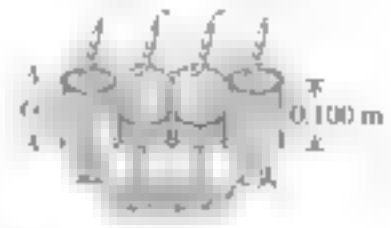


Figura 13.35 Problema 13.63.

13.64 Ao entrarem em um carro, quatro passageiros com massa total igual a 250 kg comprimem em 4,0 cm as molas de um carro com amortecedores gastos. Considere o carro e os passageiros como um único corpo sobre uma única mola ideal. Sabendo que o período da oscilação do carro com os passageiros é igual a 1,08 s, qual é o período da oscilação do carro vazio?

13.65 Um planador executa um MHS com amplitude A sobre um trilho de ar. Você freia o cavaleiro de modo que sua amplitude é reduzida à metade do valor inicial. O que ocorre com os valores? a) do seu período, frequência e frequência angular. b) da sua energia mecânica total. c) da sua velocidade máxima. d) da sua velocidade no ponto $x = \pm A/4$. e) da sua energia potencial e energia cinética no ponto $x = \pm A/4$?

13.66 Uma criança travessa faz o seu prato de jantar de 250 g deslizar em uma mesa horizontal em MHS com amplitude 0,100 m. Em um ponto situado a 0,060 m da posição de equilíbrio a velocidade do prato é igual a 0,300 m/s. a) Qual é o período? b) Qual é o deslocamento quando a velocidade é igual a 0,460 m/s? c) No centro do prato existe um pedaço de cenoura de 10,0 g. Se o pedaço de cenoura está na iminência de escorregar no ponto final da trajetória, qual é o coeficiente de atrito estático entre o pedaço de cenoura e o prato?

13.67 Um prato uniforme, horizontal, de 1,50 kg é preso a uma mola vertical ideal de constante igual a 185 N/m, e uma esfera de metal de 275 g está sobre o prato. A mola está sob o prato, podendo oscilar para cima e para baixo. O prato é, então, empurrado para baixo até 15,0 cm abaixo de seu ponto de equilíbrio (chame esse ponto de A) e liberado a partir do repouso. (a) A que altura acima do ponto A estará o prato quando a esfera de metal deixar o prato? (*Sugestão.* Isso *não* ocorre quando a esfera e o prato atingem suas velocidades máximas.) (b) Quanto tempo passa entre o momento em que o sistema é liberado no ponto A e o momento em que a esfera sai do prato? (c) Com que velocidade a esfera está se movendo ao sair do prato?

13.68 Um bloco de massa M repousa sobre uma superfície sem atrito e está preso a uma mola horizontal cuja constante é k. A outra extremidade da mola está presa a uma parede (Figura 13.36). Um segundo bloco de massa m repousa sobre o primeiro. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é μ_s. Ache a amplitude *máxima* da oscilação para que o bloco superior não deslize sobre o bloco inferior.

Figura 13.36 Problema 13.68.

13.69 Uma massa de 10,0 kg está se deslocando para a direita com uma velocidade igual a 2,0 m/s sobre uma superfície horizontal quando colide com uma segunda massa inicialmente em repouso, mas presa a uma mola leve de constante 80,0 N/m. A primeira massa gruda-se à segunda. (a) Calcule a freqüência, a amplitude e o período das oscilações subseqüentes. (b) Quanto tempo leva para o sistema retornar pela primeira vez à posição em que estava imediatamente depois da colisão?

13.70 Um foguete sobe com aceleração igual a 4,0 m/s² a partir da plataforma de lançamento na Terra. Dentro do foguete, uma pequena esfera de 4,50 kg está pendurada no teto por um fio leve de 1,10 m. Se a esfera for deslocada 8,50° da vertical e solta, ache a amplitude e o período da oscilação resultante desse pêndulo.

13.71 Um objeto quadrado de massa m é formado de quatro varetas finas idênticas, todas de comprimento L, amarradas juntas. Esse objeto é pendurado em um gancho pelo seu canto superior (Figura 13.37). Se ele for girado levemente para a esquerda e depois solto, em que freqüência ele irá oscilar para a frente e para trás?

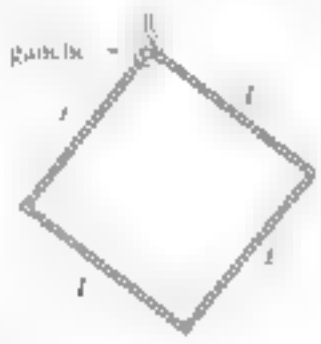


Figura 13.37 Problema 13.71

13.72 Um bloco de massa igual a 0,200 kg está submetido a uma força restauradora elástica e a constante da força é igual a 10,0 N/m. a) Faça um gráfico da energia potencial elástica U em função do deslocamento x no intervalo de $x = -0,100$ m até $x = +0,100$ m. Em seu gráfico, adote a escala 1 cm = 0,05 J no eixo vertical e 1 cm = 0,05 m no eixo horizontal. O bloco inicia o movimento oscilatório com uma energia potencial igual a 0,140 J e uma energia cinética igual a 0,060 J. Examinando o gráfico, responda às perguntas seguintes. b) Qual é a amplitude da oscilação? c) Qual é a energia potencial quando o deslocamento é igual à metade da amplitude? d) Para qual deslocamento a energia potencial é igual à energia cinética? e) Qual é o valor do ângulo de fase ϕ, sabendo que a velocidade inicial é positiva e o deslocamento inicial é negativo?

13.73 Um balde de massa igual a 2,0 kg contendo 10,0 kg de água está pendurado em uma mola vertical ideal de constante 125 N/m e oscilando para cima e para baixo com uma amplitude igual a 3,0 cm. De repente, surge um vazamento no fundo do balde de tal modo que a água escoa à taxa constante de 2,0 g/s. Quando o balde estiver cheio até a metade, ache (a) o período de oscilação e (b) a taxa em que o período está variando em relação ao tempo. O período está aumentando ou diminuindo? (c) Qual é o período mais curto que esse sistema pode ter?

13.74 Um fio de 1,80 m de comprimento é suspenso verticalmente. Quando uma bola de aço de 60,0 kg é suspensa na extremidade do fio, este se dilata 2,0 mm. Se a bola for puxada para baixo a uma distância adicional e solta, com que freqüência ela oscilará? Suponha que a tensão no fio seja menor do que o limite de proporcionalidade (veja a Seção 11.5).

13.75 Uma perdiz de 5,0 kg está pendurada em uma pereira por uma mola ideal de massa desprezível. Quando a perdiz é puxada para baixo a uma distância de 0,100 m abaixo da sua posição de equilíbrio e liberada, ela oscila com um período igual a 4,20 s. a) Qual é sua velocidade quando ela passa pela posição de equilíbrio? b) Qual é sua aceleração quando ela está a 0,050 m acima da posição de equilíbrio? c) Quando ela está se movendo para cima, quanto tempo é necessário para que ela se mova de um ponto 0,050 m abaixo da posição de equilíbrio até um ponto 0,050 m acima do equilíbrio? d) O movimento da perdiz é interrompido e ela é removida da mola. De quanto a mola se encurta?

13.76 Um parafuso de 0,0200 kg executa um MHS com amplitude igual a 0,240 m e período igual a 1,500 s. O deslocamento do parafuso é igual a +0,240 m quando $t = 0$. Calcule: a) o deslocamento do parafuso quando $t = 0,500$ s; b) o módulo, a direção e o sentido da força que atua sobre o parafuso quando $t = 0,500$ s; c) o tempo mínimo necessário para que o parafuso se desloque da posição inicial até um ponto $x = -0,180$ m; d) a velocidade do parafuso quando $x = -0,180$ m.

13.77 **MHS da balança de um açougue.** Uma mola de massa desprezível e constante $k = 400$ N/m está suspensa verticalmente, e um prato de 0,200 kg está suspenso em sua extremidade inferior. Um açougueiro deixa cair sobre o prato, de uma altura de 0,40 m, uma posta de carne de 2,2 kg. A posta de carne produz uma colisão totalmente inelástica com o prato e faz o sistema executar um MHS. Calcule: a) a velocidade do prato e da carne logo após a colisão; b) a amplitude da oscilação subseqüente; c) o período do movimento.

13.78 Uma viga uniforme é suspensa horizontalmente por duas molas verticais idênticas que estão presas entre o teto e ambas as extremidades da viga. A viga pesa 1.000 kg e tem massa igual a 225 kg, e um saco de cascalho de 175 kg descansa sobre seu centro. A viga está oscilando em MHS, com uma amplitude de 40,0 cm e uma frequência de 0,600 ciclos/s. (a) O saco de cascalho cai da viga quando a viga atinge o seu máximo deslocamento para cima. Quais são a freqüência e a amplitude do MHS subseqüente da viga? (b) Se, em vez disso, o cascalho cair quando a viga atingir sua velocidade máxima, quais serão a freqüência e a amplitude do MHS subseqüente da viga?

13.79 No planeta Newtonia, um pêndulo simples com um peso de massa 1,25 kg e um comprimento de 185,0 cm, quando libertado a partir do repouso, leva 1,42 s para oscilar de um ângulo de 12,5°, e então volta a ter velocidade igual a zero. A circunferência de Newtonia mede 51400 km. Qual é a massa do planeta Newtonia?

13.80 Uma força de 40,0 N estica uma mola vertical de 0,250 m. a) Qual é o valor da massa que deve ser suspensa da mola para que o sistema oscile com um período igual a 1,0 s? b) Se a amplitude do movimento for igual a 0,050 m e o período for o especificado na parte (a), onde estará o objeto e em qual sentido ele estará se movendo 0,35 s depois de atravessar a posição de equilíbrio de cima para baixo? c) Qual é o módulo, a direção e o sentido da força que a mola exerce sobre o objeto quando ele está 0,030 m abaixo da posição de equilíbrio, movendo-se para cima?

13.81 **Não perca o barco.** Em visita a Minnesota (a "terra dos dez mil lagos"), você se inscreve em uma excursão ao redor de um dos maiores lagos. Ao chegar ao cais onde o barco de 1500 kg está ancorado, você descobre que o barco está oscilando com as ondas, para cima e para baixo, executando um movimento harmônico simples com amplitude igual a 20 cm. O barco leva 3,5 s para completar um ciclo de oscilação. Quando o barco está em seu ponto mais alto, o convés está na mesma altura que o cais. Enquanto observa o barco oscilando, você, que possui uma massa de 60 kg, começa a se sentir um pouco tonto, em parte

por ter comido peixe demais no jantar. Em conseqüência, você se recusa a embarcar a não ser que o nível do convés esteja a 10 cm ou menos do nível do cais. Quanto tempo você tem para embarcar confortavelmente a cada ciclo do MHS?

13.82 Um exemplo interessante de oscilação, embora impraticável, é o movimento de um objeto que é deixado cair em um furo que atravessa a Terra de um extremo ao outro, passando pelo centro. Usando a hipótese (que não é realista) de que a Terra seja uma esfera com densidade uniforme, prove que o movimento é harmônico simples (MHS) e determine seu período. (*Observação:* A força gravitacional que atua sobre o objeto em função da distância r ao centro da Terra foi calculada no Exemplo 12.10 (Seção 12.6). O movimento é harmônico simples quando a aceleração a_x e o deslocamento do equilíbrio x são relacionados pela Equação (13.8), e o período é então dado por $T = 2\pi/\omega$.)

13.83 Dois corpos puntiformes de massa m são mantidos a uma distância d um do outro. Outro corpo puntiforme de massa M está a meio caminho entre eles. M é então deslocado de uma pequena distância x perpendicular à linha que une os dois corpos fixos e é liberado. (a) Mostre que o módulo da força gravitacional resultante sobre M exercida pelos corpos fixos é dada aproximadamente por $F_x = \dfrac{16\,GmMx}{d^3}$, se $x \ll d$. Qual é a direção e sentido dessa força? Trata-se de uma força restauradora ou não? (b) Mostre que a massa M irá oscilar com freqüência angular $(4/d)\sqrt{Gm/d}$ e período $\pi d/2\sqrt{Gm}$. c) Qual seria o período se $m = 10.0$ kg e $d = 25.0$ cm? Seria você poderia medir facilmente esse período? O que impede que esse experimento seja facilmente executado em um laboratório de física comum? (d) M oscilará se for deslocada do centro de uma pequena distância x no sentido de qualquer um dos corpos fixos? Por quê?

13.84 Para um certo oscilador a força resultante sobre um corpo de massa m é dada por $F_x = -cx^3$. a) Qual é a função energia potencial desse oscilador se considerarmos $U = 0$ para $x = 0$? b) Um quarto do período é o tempo necessário para o corpo se deslocar de $x = 0$ até $x = A$. Calcule esse tempo e, portanto, o período. [*Sugestão:* Comece com a Equação (13.20) modificada para incluir a função energia potencial obtida na parte (a) e explicite v_x em função de x. A seguir substitua v_x por dx/dt. Isole a variável passando todos os fatores que contenham x para o lado esquerdo e todos os fatores que contenham t para o outro, de modo que os dois lados possam ser integrados. Na integral envolvendo x, faça a mudança de variável $u = x/A$. A equação resultante pode ser calculada usando-se programas de computador e o resultado é $\int_0^1 du/\sqrt{1-u^4} = 1.31$.] c) De acordo com o resultado obtido na parte (b), verifique se o período depende da amplitude A do movimento. Esse movimento constitui um MHS?

13.85 Considere o círculo de referência indicado na Figura 13.6. O componente x da velocidade do ponto Q é a velocidade do ponto P. Calcule esse componente e mostre que a velocidade do ponto P é dada pela Equação (13.15).

•13.86 **Molécula diatômica.** Dois átomos idênticos de uma molécula diatômica vibram como osciladores harmônicos. Contudo, o centro de massa situado na metade da distância entre os átomos permanece em repouso. a) Mostre que em qualquer instante os momentos lineares dos átomos são dados por p e $-p$. b) Mostre que a energia cinética K dos dois átomos em qualquer instante é igual à energia cinética de um único objeto de massa $m/2$ com um momento linear de módulo igual a p. (Use $K = p^2/2m$.) Esse resultado mostra por que usamos $m/2$ na expressão de f no Exemplo 13.7 (Seção 13.4). c) Se os átomos não forem idênticos, mas possuírem massas m_1 e m_2, mostre que o resultado da parte (a) ainda permanece válido e na parte (b) a massa do único objeto é dada por $m_1m_2/(m_1 + m_2)$. A grandeza $m_1m_2/(m_1 + m_2)$ denomina-se *massa reduzida* do sistema.

•13.87 Uma expressão aproximada para a energia potencial de uma molécula de KCl é $U = A[(R_0^7/8r^8) - 1/r]$, onde $R_0 = 2{,}67 \times 10^{-10}$ m e $A = 2{,}31 \times 10^{-28}$ J · m. Usando essa aproximação: a) Mostre que o componente radial da força sobre cada átomo é dado por $F_r = A[(R_0^7/r^8) - 1/r^2]$. b) Mostre que R_0 é a separação de equilíbrio. c) Ache a energia potencial mínima. d) Faça $r = R_0 + x$ e use os dois primeiros termos do desenvolvimento do teorema binomial na Equação (13.28) para demonstrar que $F_x = -(7A/R_0^9)x$, de modo que a constante da força é dada por $k = 7A/R_0^9$. (e) Como o átomo de K e o átomo de Cl vibram em sentidos opostos em lados opostos do centro de massa da molécula, $m_1m_2/(m_1 + m_2) = 3{,}06 \times 10^{-26}$ kg é a massa que você deve usar para calcular a freqüência. (Veja o Problema 13.86.) Calcule a freqüência das oscilações com amplitudes pequenas.

13.88 Dois cilindros homogêneos de raio R e massa total M são conectados ao longo de seu eixo comum por uma barra leve e curta, e estão em repouso sobre uma mesa horizontal. Uma mola cuja constante é k possui uma extremidade presa na mesa por uma braçadeira e sua outra extremidade é ligada a um anel sem atrito no centro de massa dos cilindros (Figura 13.38). Os cilindros são puxados para a esquerda esticando a mola até uma distância x, e a seguir são liberados. Existe entre o topo da mesa e os cilindros um atrito suficiente para fazer os cilindros rolarem sem deslizar à medida que eles oscilam na extremidade da mola. Mostre que o movimento do centro de massa dos cilindros é um MHS, e calcule o seu período em termos de M e de k. (*Sugestão:* O movimento é harmônico simples quando a aceleração a_x e o deslocamento x são relacionados mediante a Equação (13.8) e o período é então dado por $T = 2\pi/\omega$. Aplique as relações $\Sigma\tau = I_{cm}\alpha$ e $\Sigma F_x = Ma_{cm}$ para os cilindros a fim de obter uma relação entre a_{cm} e o deslocamento x dos cilindros de sua posição de equilíbrio.)

Figura 13.38 Problema 13.88

13.89 Na Figura 13.39, a esfera de cima é liberada a partir do repouso, colide com a esfera de baixo, que está em repouso, e gruda-se a ela. Ambas as molas têm 50,0 cm de comprimento. A esfera de cima possui uma massa de 2,0 kg e está inicialmente a uma altura 10,0 cm acima da esfera de baixo, cuja massa é igual a 3,0 kg. Ache a frequência e o deslocamento angular máximo do movimento após a colisão.

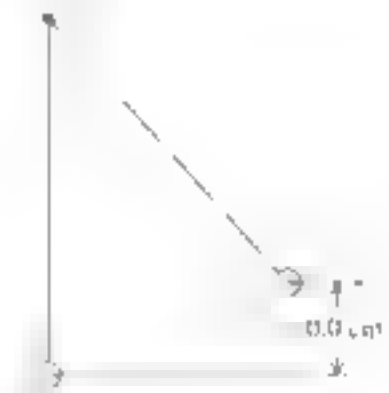


Figura 13.39 Problema 13.89

13.90 **T. rex.** Considere a perna do *T. rex* do Exemplo 13.10 (Seção 13.6) duas barras uniformes, ambas com 1,55 m de comprimento, com uma extremidade fixa rigidamente à outra. Suponha que a barra inferior possua uma massa M e a barra superior tenha uma massa igual a $2M$. O conjunto gira ao redor do topo da barra superior. Calcule a oscilação desse conjunto para oscilações de pequena amplitude. Compare os seus resultados com os do Exemplo 13.10.

13.91 Uma barra metálica delgada e homogênea de massa M possui um pivô em seu centro por onde passa um eixo perpendicular à barra. Uma mola horizontal cuja constante é k possui uma extremidade presa na parte inferior da barra e sua outra extremidade está rigidamente presa a um suporte. Quando a barra é deslocada formando um pequeno ângulo θ com a vertical (Figura 13.40) e liberada, mostre que a oscilação é um movimento harmônico angular e calcule seu período. (*Sugestão:* Suponha que o ângulo θ seja suficientemente pequeno para que as relações sen $\theta = \theta$ e cos $\theta = 1$ sejam aproximadamente válidas. O movimento é harmônico simples quando $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$ e o período é então dado por $T = 2\pi/\omega$.)

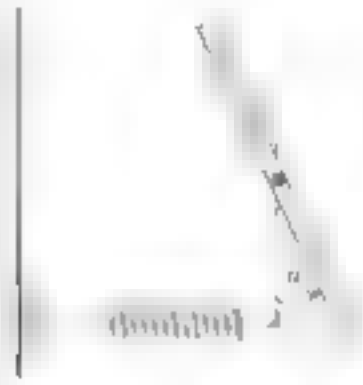


Figura 13.40 Problema 13.91

13.92 **Problema do sino silencioso.** Um sino grande está suspenso em uma viga de madeira de forma que possa oscilar com atrito desprezível. O centro de massa do sino está situado 0,60 m abaixo do eixo de suspensão, a massa do sino é igual a 34,0 kg e o momento de inércia do sino em relação ao eixo de suspensão é igual a 18,0 kg · m². O badalo do sino é uma pequena massa de 1,8 kg ligada à extremidade de uma barra delgada de comprimento L e massa desprezível. A outra extremidade da barra está presa à parte interna do sino, de modo a poder oscilar livremente em torno do mesmo eixo do sino. Qual deve ser o comprimento L da barra delgada do badalo do sino para que ele toque silenciosamente, ou seja, para que o período da oscilação do sino seja igual ao período da oscilação do badalo?

13.93 Duas hastes delgadas, cada uma delas com massa m e comprimento L, são conectadas perpendicularmente de modo a formarem um objeto em forma de L. Esse objeto é equilibrado no topo de uma aresta aguda (Figura 13.41). Quando o objeto em forma de L é deslocado ligeiramente, ele oscila. Ache a freqüência da oscilação.

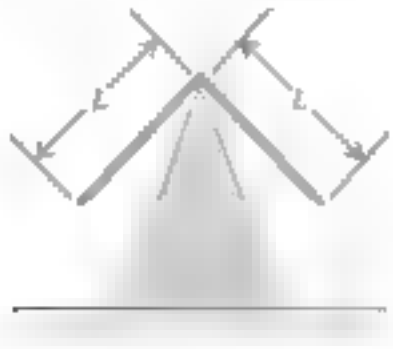


Figura 13.41 Problema 13.93

13.94 Você deseja construir um pêndulo com um período de 4,00 s em um local onde $g = 9{,}80$ m/s². a) Qual é o comprimento de um pêndulo *simples* com esse período? b) Suponha que o pêndulo deve ser montado em uma caixa que não possui mais do que 0,50 m de altura. Você pode imaginar um pêndulo que tenha um período de 4,0 s e que satisfaça a essa condição?

13.95 Uma barra uniforme de comprimento L oscila com ângulos pequenos em torno de um ponto situado a uma distância x do seu centro de massa. a) Prove que a frequência angular é $\sqrt{gx/[(L^2/12) + x^2]}$. b) Prove que sua frequência angular máxima ocorre quando $x = L/\sqrt{12}$. c) Qual é o comprimento da barra quando a frequência angular máxima é igual a 2π rad/s?

Problemas desafiadores

13.96 Duas molas, cada uma com um comprimento sem deformação igual a 0,200 m, porém com constantes diferentes de equilíbrio, k_1 e k_2, são ligadas às extremidades opostas de um bloco de massa m apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito. As extremidades externas das molas são agora ligadas a dois pinos P_1 e P_2 igualmente afastados de 0,100 m da extremidade externa original de cada mola (Figura 13.42). Seja $k_1 = 2{,}0$ N/m, $k_2 = 6{,}0$ N/m e $m = 0{,}100$ kg. a) Ache o comprimento de cada mola quando o bloco atinge a nova posição de equilíbrio depois da ligação das extremidades das molas aos pinos. b) Ache o período das oscilações do bloco quando ele é deslocado da nova posição e a seguir liberado.

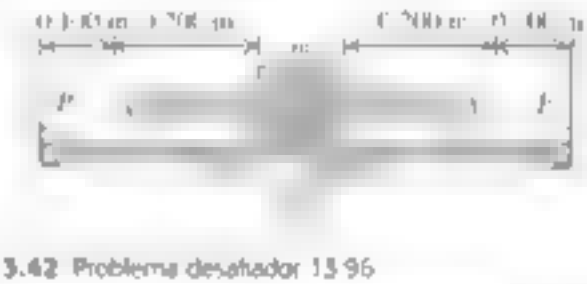


Figura 13.42 Problema desafiador 13.96

13.97 **A constante elástica efetiva de duas molas.** Duas molas, ambas com o mesmo comprimento sem deformação, porém com constantes diferentes k_1 e k_2, são ligadas a um bloco de massa m apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito. Determine a constante efetiva da força k_{ef} para cada um dos três casos (a), (b) e (c) indicados na Figura 13.43. (A constante efetiva da força é obtida pela definição $\Sigma F_x = -k_{ef}x$.) d) Um objeto de massa m, suspenso da extremidade de uma mola cuja constante é k, oscila com uma freqüência f_0. Se a mola for cortada em duas metades e o mesmo objeto for suspenso em uma das metades, a freqüência da oscilação será f_2. Qual é a razão f_2/f_0?

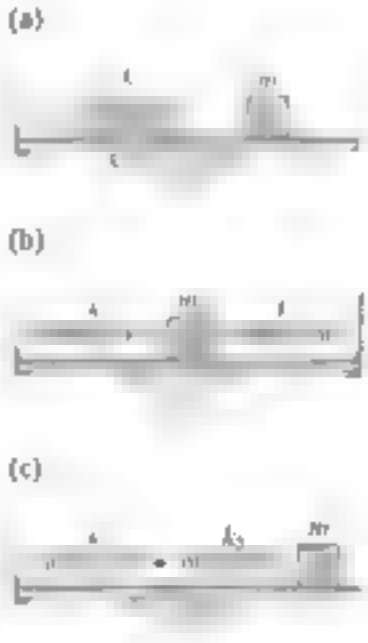


Figura 13.43 Problema desafiador 13.97

13.98 a) Qual é a variação ΔT do período de um pêndulo simples quando a aceleração da gravidade g varia de Δg? (*Sugestão*: O novo período $T + \Delta T$ é obtido substituindo-se $g + \Delta g$ no lugar de g:

$$T + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + \Delta g}}$$

Para obter uma expressão aproximada, desenvolva em série o fator $(g + \Delta g)^{-1/2}$ usando o teorema binomial (Apêndice B) e mantendo apenas os dois primeiros termos.

$$(g + \Delta g)^{-1/2} = g^{-1/2} - \frac{1}{2}g^{-3/2}\Delta g + \cdots$$

Os outros termos contêm potências mais elevadas de Δg e são muito pequenos se Δg for pequeno.) Expresse o seu resultado como uma variação *fracionária* do período $\Delta T/T$ em função da variação fracionária $\Delta g/g$. b) Um relógio de pêndulo mede corretamente o tempo em um local onde $g = 9{,}8000\ m/s^2$ mas verifica-se que ele atrasa 4,0 s por dia em um local mais elevado. Use o resultado da parte (a) para calcular o valor de g nesse novo local.

13.99 **Mola com massa.** Em todos os problemas anteriores desse capítulo consideramos molas com massas desprezíveis. Porém, é claro que toda mola possui alguma massa. Para estudar o efeito da massa da mola, considere uma mola de massa M, comprimento de equilíbrio L_0 e constante k. Quando ela é comprimida ou esticada até atingir um comprimento L, a energia potencial é $\frac{1}{2}kx^2$, onde $x = L - L_0$. a) Considere uma mola como descrito anteriormente, porém, com uma extremidade fixa e a outra se deslocando com velocidade v. Suponha que a velocidade ao longo dos pontos do comprimento da mola varie linearmente com a distância l a partir da extremidade fixa. Suponha também que a massa M da mola seja distribuída uniformemente ao longo do comprimento da mola. Calcule a energia cinética da mola em termos de M e de v. (*Sugestão*: Divida a mola em pedaços de comprimento dl; ache a velocidade de cada pedaço em termos de l, v e L; calcule a massa de cada pedaço em termos de dl, M e L; e integre de 0 até L. O resultado *não* é $\frac{1}{2}Mv^2$, visto que a mola não se move com a mesma velocidade em todas as partes.) b) Tome a derivada em relação ao tempo da lei da conservação da energia, Equação (13.21), para um corpo de massa m preso a uma mola *sem massa*. Comparando os resultados que você obteve com a Equação (13.8) que definiu ω, mostre que a frequência angular da oscilação é $\omega = \sqrt{k/m}$. c) Aplique o procedimento indicado na parte (b) para obter a frequência angular da oscilação ω da mola considerada na parte (a). Se a *massa efetiva* da mola M' for definida por $\omega = \sqrt{k/M'}$, como se escreve M' em termos de M?

13.100 Uma régua uniforme de 1,0 m está suspensa por uma de suas extremidades em um eixo horizontal e oscila como um pêndulo físico. Um objeto muito pequeno com massa igual à da régua pode permanecer preso à régua em um ponto situado a uma distância y abaixo do eixo de suspensão. Seja T o período do pêndulo com o objeto preso na régua e T_0 o período do pêndulo da régua sozinha. a) Qual é a razão T/T_0? Calcule sua expressão para y variando de 0 até 1,0 m em intervalos de 0,1 m e faça um gráfico de T/T_0 em função de y. b) Existe algum valor de y além de $y = 0$, para o qual $T = T_0$? Caso exista, encontre esse valor e explique por que o período não muda quando y atinge esse valor.

13.101 Seja medida do período de um pêndulo físico em torno de um dado eixo indica um valor T. A seguir você usa outro eixo de suspensão do lado oposto do centro de massa e encontra o mesmo período. Os dois pontos estão separados por uma distância L. Use o teorema dos eixos paralelos para mostrar que $g = L(2\pi/T)^2$. (Esse resultado mostra um método para a determinação do valor de g sem o conhecimento da massa ou de qualquer momento de inércia do pêndulo físico.)

13.102 **Ressonância em um sistema mecânico.** Um bloco de massa m está preso à extremidade de uma mola sem massa cuja constante é k e comprimento de equilíbrio igual a l_0. A outra extremidade da mola pode girar livremente em torno de um prego cravado em uma superfície horizontal sem atrito (Figura 13.44). O bloco gira em um círculo com uma frequência angular de revolução ω. a) Determine o comprimento l da mola em função de ω. b) O que ocorre com o resultado da parte (a) quando ω se aproxima da frequência natural $\omega = \sqrt{k/m}$ do sistema massa-mola? (Se o resultado o incomoda, lembre que molas sem massa e superfícies sem atrito não existem, são apenas descrições aproximadas de molas e superfícies reais. Além disso, a lei de Hooke é ela própria uma aproximação do comportamento das molas reais; quanto maior for a deformação da mola, maior será o desvio da lei de Hooke.)

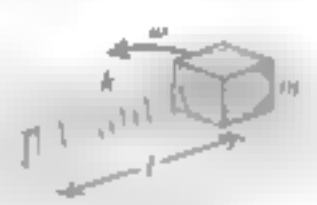


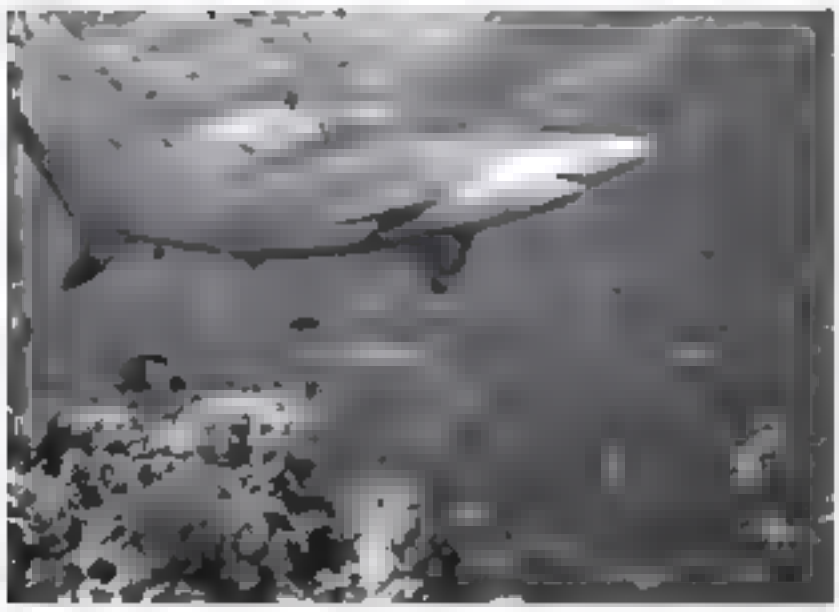
Figura 13.44 Problema desafiador 13.102

*13.103 **Vibração de molécula com ligação covalente.** Muitas moléculas diatômicas são mantidas unidas por *ligações covalentes* que são muito mais fortes do que a interação de van der Waals. Exemplos dessas moléculas incluem H_2, O_2 e N_2. As experiências mostram que, em muitas dessas moléculas, a interação pode ser descrita por uma força da forma

$$F_r = A[e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}]$$

onde A e b são constantes positivas, r é a distância entre os centros dos dois átomos e R_0 é a separação de equilíbrio. Para a molécula de hidrogênio (H_2), $A = 2{,}97 \times 10^{-8}$ N, $b = 1{,}95 \times 10^{10}$ m e $R_0 = 7{,}4 \times 10^{-11}$ m. Calcule a constante da força para pequenas oscilações em torno do equilíbrio. (*Sugestão*: Consulte o Apêndice B e use o desenvolvimento em série da função e^x.) Compare o seu resultado com o valor dado no Exercício 13.40.

MECÂNICA DOS FLUIDOS 14



Este tubarão precisa nadar constantemente para não afundar no oceano, enquanto o peixinho tropical alaranjado consegue permanecer no mesmo nível na água com pouco esforço. Por que essa diferença?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O que é a densidade de um material e a densidade média de um corpo
- O que é a pressão em um fluido e como é medida
- Como calcular a força do empuxo exercida por um fluido sobre um corpo nele imerso
- A diferença entre fluido laminar e fluido turbulento, e como a velocidade do escoamento em um tubo depende do tamanho do tubo
- Como usar a equação de Bernoulli em certos tipos de escoamento para relacionar a pressão à velocidade do escoamento em diferentes pontos

Os fluidos desempenham papel vital em muitos aspectos de nossa vida cotidiana. Nós bebemos, respiramos e nadamos em fluidos. Eles circulam em nosso corpo e são responsáveis pelo clima. Os aviões voam através deles, e os navios flutuam sobre eles. Denomina-se fluido qualquer substância que pode fluir, o termo pode ser usado para um gás ou para um líquido. Geralmente, consideramos gás o fluido que pode ser facilmente comprimido e um líquido, o fluido que é quase incompressível, embora existam alguns casos excepcionais.

Vamos começar com a **estática dos fluidos**, o estudo de fluidos em repouso, em situação de equilíbrio. Analogamente a outras situações de equilíbrio, ela se pauta na primeira e na terceira leis de Newton. Vamos analisar os conceitos básicos de densidade, pressão e empuxo. A **dinâmica dos fluidos**, o estudo de fluidos em movimento, é muito mais complexa, trata-se, na verdade, de um dos ramos mais complexos da mecânica. Felizmente, podemos analisar muitas situações importantes utilizando modelos idealizados simples e princípios familiares, tais como as leis de Newton e a lei da conservação da energia. Mesmo assim, trataremos apenas superficialmente desse vasto e interessante tópico.

14.1 Densidade

Uma propriedade importante de qualquer material é sua **densidade**, definida como a massa por unidade de volume. Em português, um sinônimo de *densidade* é *massa específica*. Um material homogêneo, tal como o gelo ou o ferro, possui a mesma densidade em todas as suas partes. Usaremos a letra grega ρ (pronuncia-se "rô") para simbolizar a densidade. Quando a massa m de um material homogêneo possui volume V, sua densidade ρ é

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ (definição de densidade)} \qquad (14.1)$$

Dois objetos feitos com o mesmo material possuem a mesma densidade, mesmo que tenham massas e volumes diferentes. Isso acontece porque a *razão* entre a massa e o volume é a mesma para ambos os objetos (Figura 14.1).

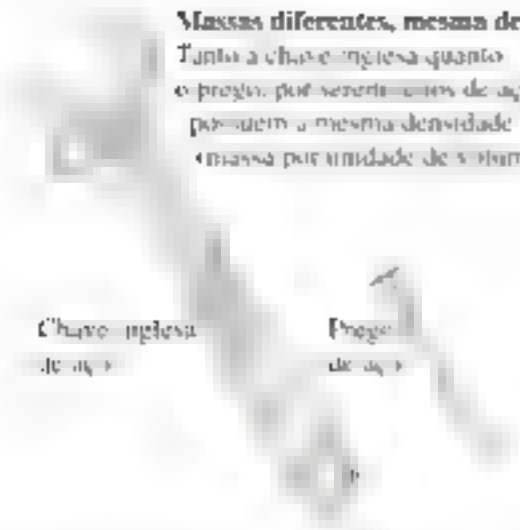


Figura 14.1 Dois objetos de massas diferentes e volumes diferentes, mas com a mesma densidade

Figura 14.2 O preço do ouro é cotado por massa (digamos, em reais por grama). Como o ouro é um dos metais mais densos, uma fortuna pode ser armazenada em um volume pequeno desse metal

A unidade SI de densidade é o quilograma por metro cúbico (1 kg/m^3). A unidade cgs, grama por centímetro cúbico (1 g/cm^3), também é muito empregada. O fator de conversão entre ambas é

$$1\ \text{g/cm}^3 = 1000\ \text{kg/m}^3$$

Na Tabela 14.1 listamos as densidades de algumas substâncias comuns em temperaturas normais. Observe a grande variedade das ordens de grandeza (Figura 14.2). O material mais denso encontrado na superfície terrestre é o ósmio (ρ = 22500 kg/m^3), porém, essa densidade é muito pequena se comparada à densidade de corpos astronômicos exóticos, tais como a estrela de nêutrons e a anã branca.

A **densidade relativa** de um material ou *massa específica relativa* é a razão entre a densidade do material e a densidade da água a 4,0 °C, 1000 kg/m^3; trata-se de um número puro, sem unidades. Por exemplo, a densidade relativa do alumínio é 2,7.

A densidade de alguns materiais varia de um ponto ao outro no interior do material. Um exemplo disso é o corpo humano, que inclui gordura, de baixa densidade (cerca de 940 kg/m^3), e ossos, de alta densidade (de 1700 a 2500 kg/m^3). Dois outros exemplos são a atmosfera terrestre (que é menos densa em altitudes elevadas) e os oceanos (que são mais densos em profundidades elevadas). Para esses materiais, a Equação (14.1) descreve apenas a **densidade média**. Em geral, a densidade de um material depende de fatores ambientais, tais como a temperatura e a pressão.

Tabela 14.1 Densidades de algumas substâncias comuns

Material	Densidade (kg/m^3)*	Material	Densidade (kg/m^3)*
Ar (1 atm, 20° C)	1,20	Ferro, aço	$7,8 \times 10^3$
Álcool etílico	$0,81 \times 10^3$	Latão	$8,6 \times 10^3$
Benzeno	$0,90 \times 10^3$	Cobre	$8,9 \times 10^3$
Gelo	$0,92 \times 10^3$	Prata	$10,5 \times 10^3$
Água	$1,00 \times 10^3$	Chumbo	$11,3 \times 10^3$
Água do mar	$1,03 \times 10^3$	Mercúrio	$13,6 \times 10^3$
Sangue	$1,06 \times 10^3$	Ouro	$19,3 \times 10^3$
Glicerina	$1,26 \times 10^3$	Platina	$21,4 \times 10^3$
Concreto	$2,00 \times 10^3$	Estrela anã branca	10^{10}
Alumínio	$2,70 \times 10^3$	Estrela de nêutrons	10^{14}

* Para obter a densidade em gramas por centímetro cúbico, simplesmente divida os valores por 10

A medição da densidade é uma importante técnica analítica. Por exemplo, podemos verificar se uma bateria está carregada medindo a densidade do seu eletrólito, uma solução de ácido sulfúrico. À medida que a bateria descarrega, o ácido sulfúrico (H_2SO_4) combina-se com o chumbo nas placas da bateria, formando o sulfato de chumbo ($PbSO_4$), que é insolúvel, fazendo diminuir a concentração da solução. A densidade varia de $1,30 \times 10^3$ kg/m^3 para uma bateria completamente carregada até $1,15 \times 10^3$ kg/m^3, quando a bateria está descarregada.

Outro exemplo também encontrado em automóveis é o anticongelante permanente, que, geralmente, é uma solução de água com glicol de etileno ($\rho = 1,12 \times 10^3$ kg/m^3). O ponto de congelamento da solução depende da concentração do glicol, que pode ser determinada medindo-se a densidade. As medidas de densidade são feitas, muitas vezes, em postos de serviços com um dispositivo chamado densímetro, que será discutido na Seção 14.3.

Exemplo 14.1

PESO DO AR NO INTERIOR DE UMA SALA Ache a massa e o peso do ar no interior de uma sala de estar com uma altura de 3,0 m e um piso com uma área de 4,0 m × 5,0 m. Quais seriam a massa e o peso de um volume igual de água?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: vamos supor que o ar seja homogêneo, de modo que a densidade seja a mesma em toda a sala. (É verdade que o ar é menos denso em regiões elevadas do que perto do nível do mar. A variação da densidade na sala de 3,0 m de altura, todavia, é desprezível — veja a Seção 14.2.)

PREPARAR: usaremos a Equação (14.1) para relacionar a massa (a variável procurada) com o volume (que iremos calcular a partir das dimensões da sala) e a densidade (conforme a Tabela 14.1).

EXECUTAR o volume da sala é $V = (3{,}0\ \text{m})(4{,}0\ \text{m}) \times (5{,}0\ \text{m}) = 60\ \text{m}^3$. A massa do ar m_{ar} pode ser obtida pela Equação (14.1):

$$m_{ar} = \rho_{ar} V = (1{,}20\ \text{kg/m}^3)(60\ \text{m}^3) = 72\ \text{kg}$$

O peso do ar é

$$P_{ar} = m_{ar} g = (72\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 700\ \text{N} = 160\ \text{libras}$$

A massa de um volume igual de água é

$$m_{água} = \rho_{água} V = (1000\ \text{kg/m}^3)(60\ \text{m}^3) = 6{,}0 \times 10^4\ \text{kg}$$

O peso é

$$P_{água} = m_{água} g = (6{,}0 \times 10^4\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)$$

$$= 5{,}9 \times 10^5\ \text{N} = 1{,}3 \times 10^5\ \text{libras de água} = 66\ \text{tons}$$

AVALIAR uma sala cheia de ar pesa o mesmo que um adulto de tamanho médio! A água é quase mil vezes mais densa do que o ar, e sua massa e peso são maiores nesse mesmo fator. O peso de uma sala cheia de água faria com que o piso de uma casa comum afundasse.

Teste sua compreensão da Seção 14.1 Coloque os seguintes objetos em ordem da maior à menor densidade média. (i) massa igual a 4,0 kg, volume igual a $1{,}60 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$; (ii) massa igual a 8,0 kg, volume igual a $1{,}60 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$; (iii) massa igual a 8,0 kg, volume igual a $3{,}20 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$; (iv) massa igual a 2560 kg, volume igual a 0,640 m^3; (v) massa igual a 2560 kg, volume igual a 1,28 m^3. ■

14.2 Pressão em um fluido

Quando um fluido (um gás ou um líquido) está em repouso, ele exerce uma força perpendicular sobre qualquer superfície que esteja em contato com ele, tal como a parede do recipiente ou um corpo imerso no fluido. Essa é a força que pressiona suas pernas quando você as movimenta em uma piscina. Embora o fluido como um todo esteja em repouso, as moléculas que o constituem estão em movimento; as forças exercidas pelo fluido são oriundas das colisões moleculares com as superfícies vizinhas.

Se pensarmos em uma superfície imaginária *no interior* do fluido, o fluido exerce forças iguais e contrárias sobre os dois lados da superfície. (Caso contrário, a superfície seria acelerada, e o fluido não estaria em repouso.) Considere uma pequena superfície de área dA centralizada em um ponto do fluido; a força normal exercida pelo fluido sobre cada lado da superfície é $dF_\perp$ (Figura 14.3). Definimos a **pressão** P nesse ponto como a força normal por unidade de área, ou seja, pela razão entre $dF_\perp$ e dA (Figura 14.4):

$$P \equiv \frac{dF_\perp}{dA} \quad \text{(definição de pressão)} \tag{14.2}$$

Quando a pressão for a mesma em todos os pontos de uma superfície plana de área A, então

$$P = \frac{F_\perp}{A} \tag{14.3}$$

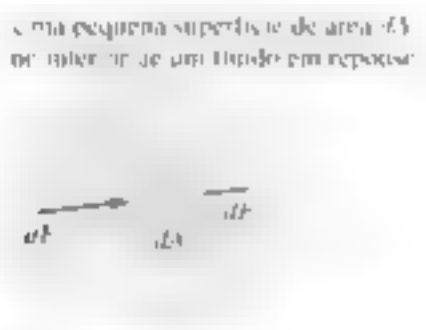
onde $F_\perp$ é a força normal resultante sobre um dos lados da superfície. A unidade SI de pressão é o **pascal**, onde

$$1\ \text{pascal} = 1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$$

Já havíamos trabalhado com o pascal no Capítulo 11. Duas unidades relacionadas, usadas principalmente em meteorologia, são o *bar*, igual a 10^5 Pa, e o *milibar*, igual a 100 Pa.

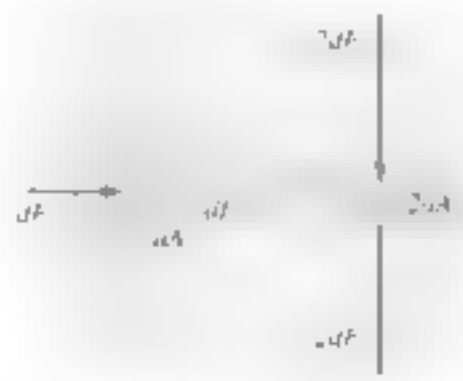
A **pressão atmosférica** P_a é a pressão exercida pela atmosfera terrestre, a pressão no fundo desse oceano de ar em que vivemos. Essa pressão varia com as condições do tempo e com a altitude. A pressão atmosférica normal ao nível do mar (um valor médio) é 1 atm (*atmosfera*), equivalente a 101325 Pa. Com quatro algarismos significativos,

$$(P_a)_{\text{m}} = 1\ \text{atm} = 1{,}013 \times 10^5\ \text{Pa}$$
$$= 1{,}013\ \text{bar} = 1013\ \text{milibar} = 14{,}70\ \text{libras/polegadas}^2$$



A superfície não acelera, então o fluido circundante exerce forças normais iguais em ambos os lados da superfície. (O fluido não pode exercer qualquer força paralela à superfície, já que isso faria com que a superfície acelerasse.)

Figura 14.3 Forças atuando sobre uma pequena superfície dentro de um fluido em repouso.



Embora essas duas superfícies diferam em área e orientação, a pressão sobre elas (a força dividida pela área) é a mesma.

Note que a pressão é uma grandeza escalar: não possui direção.

Figura 14.4 A pressão de cada lado de uma superfície é a força dividida pela área. A pressão é uma grandeza escalar com unidades de newtons por metro quadrado; já a força é uma grandeza vetorial, e sua unidade é o newton.

ATENÇÃO Não confunda pressão e força Na linguagem cotidiana, 'pressão' e 'força' significam praticamente o mesmo. Contudo, na mecânica dos fluidos, essas palavras descrevem grandezas distintas com características físicas diferentes. A pressão do fluido atua sempre ortogonalmente sobre qualquer superfície orientada em qualquer direção (Figura 14.4). Portanto, a pressão não tem nenhuma direção própria, trata-se de uma grandeza escalar. Em contraste, a força é uma grandeza vetorial, que possui módulo, direção e sentido. Lembre também que a pressão é força por unidade de área. Como mostra a Figura 14.4, uma superfície com o dobro da área é submetida ao dobro da força pelo fluido, de modo que a pressão é a mesma.

Exemplo 14.2

A FORÇA DO AR Na sala descrita no Exemplo 14.1, ache a força total de cima para baixo exercida pela pressão do ar de 1,0 atm sobre a superfície do piso.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR este exemplo usa a relação entre a pressão de um fluido (neste caso, o ar), a força normal exercida pelo fluido e a área sobre a qual essa força age. Nessa situação, a superfície do piso é horizontal, portanto a força exercida pelo ar é vertical (de cima para baixo).

PREPARAR: a pressão é uniforme, então usamos a Equação (14.3) para calcular a força $F_\perp$ a partir da pressão e da área.

EXECUTAR: a área do piso é $A = (4{,}0\ \text{m})(5{,}0\ \text{m}) = 20\ \text{m}^2$. A pressão é uniforme, logo a Equação (14.3) fornece a força total de cima para baixo, ou seja

$$F_\perp = PA = (1{,}013 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(20\ \text{m}^2)$$
$$= 2{,}0 \times 10^6\ \text{N} = 4{,}6 \times 10^5\ \text{libras} = 230\ \text{tons}$$

AVALIAR: como no Exemplo 14.1, isso seria mais do que o suficiente para fazer o peso afundar. No entanto, ele não afunda, porque há uma força de igual módulo exercida de baixo para cima sobre o piso. Se a casa tiver um porão, essa força é fornecida pelo ar existente embaixo do piso. Nesse caso, desprezando-se a espessura do piso, a força *resultante* exercida pela pressão do ar é igual a zero.

Pressão, profundidade e lei de Pascal

Quando desprezamos o peso do fluido, a pressão no interior do fluido é a mesma em todos os pontos do seu volume. Na Seção 11.4, usamos essa aproximação na discussão da tensão e da deformação volumétrica. Porém geralmente o peso de um fluido *não* é desprezível. A pressão atmosférica em altitudes elevadas é menor do que a pressão atmosférica ao nível do mar; por essa razão, a cabine de um avião deve ser pressurizada quando ele voa a uma altitude de 11 km. Quando você mergulha em águas profundas, seus ouvidos informam a você que a pressão está crescendo com o aumento da profundidade.

Podemos deduzir uma expressão geral entre a pressão P em um dado ponto no interior de um fluido e a altura desse ponto. Vamos supor que a densidade ρ e a aceleração da gravidade g permaneçam constantes em todos os pontos do fluido. Quando o fluido está em equilíbrio, cada elemento de volume está em equilíbrio. Considere um pequeno elemento de fluido com altura dy (Figura 14.5a). A superfície inferior e a superfície superior possuem a mesma área A, e suas alturas respectivas acima de um nível de referência $y = 0$ são dadas por y e $y + dy$. O volume do

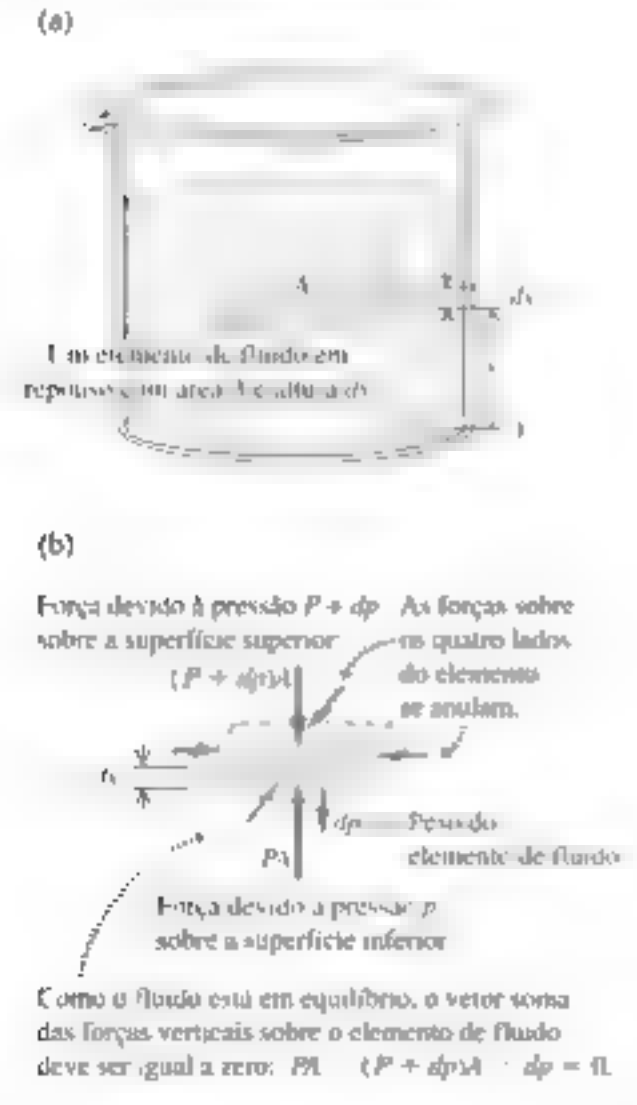

(a)
(b)
Força devido à pressão P + dp sobre a superfície superior
As forças sobre os quatro lados do elemento se anulam.
Peso do elemento de fluido
Força devido à pressão P sobre a superfície inferior
Como o fluido está em equilíbrio, o vetor soma das forças verticais sobre o elemento de fluido deve ser igual a zero:

Figura 14.5 As forças que atuam sobre um elemento de fluido em equilíbrio.

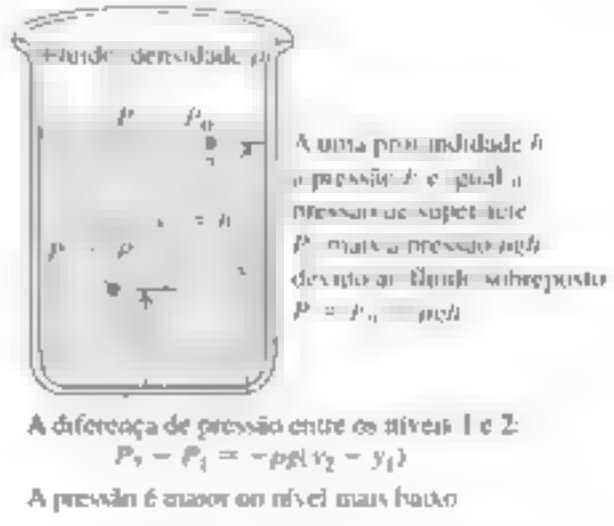

Fluido densidade ρ
A uma profundidade h a pressão P é igual à pressão na superfície P0 mais a pressão ρgh devido ao fluido sobrejacente
A diferença de pressão entre os níveis 1 e 2:
A pressão é maior no nível mais baixo

Figura 14.6 Como a pressão varia com a profundidade em um fluido com densidade uniforme.

elemento de fluido é $dV = A\,dy$, sua massa é $dm = \rho\,dV = \rho A\,dy$ e seu peso é $dp = dm\,g = \rho g A\,dy$.

Quais são as forças que atuam sobre esse elemento de fluido (Figura 14.5b)? Chame de P a pressão na superfície inferior; o componente y da força resultante que atua sobre essa superfície é PA. A pressão na superfície superior é $P + dP$, e o componente y da força resultante que atua (de cima para baixo) sobre a superfície superior é $-(P + dP)A$. O elemento de fluido está em equilíbrio, logo o componente y da força total resultante, incluindo o peso e as outras forças mencionadas, deve ser igual a zero:

$$\Sigma F_y = 0, \quad \text{logo} \quad PA - (P + dP)A - \rho g A\,dy = 0$$

Dividindo pela área A e reagrupando os termos, obtemos

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \tag{14.4}$$

Essa equação mostra que, quando y aumenta, P diminui, ou seja, à medida que subimos através do fluido, a pressão diminui, como era de se esperar. Se P_1 e P_2 forem, respectivamente, as pressões nas alturas y_1 e y_2, e se ρ e g permanecerem constantes, então

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

(pressão em um fluido com densidade constante) (14.5)

Costuma ser mais conveniente expressar a Equação (14.5) em termos da *profundidade* abaixo da superfície do fluido (Figura 14.6). Considere o ponto 1 em qualquer nível do fluido e seja P a pressão nesse nível. Considere o ponto 2 na *superfície* do fluido onde a pressão é P_0 (índice inferior 0 na profundidade zero). A profundidade do ponto 1 abaixo da superfície do fluido é $h = y_2 - y_1$, e a Equação (14.5) pode ser escrita na forma

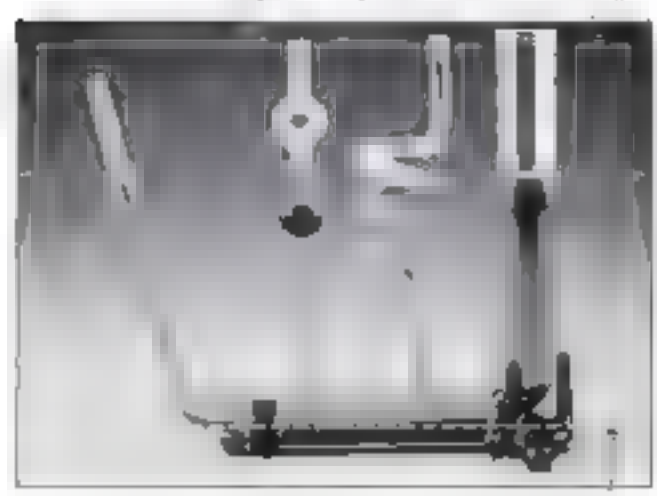
$$P_0 - P = -\rho g\,(y_2 - y_1) = -\rho g h \text{ ou}$$

$$P = P_0 + \rho g h$$

(pressão em um fluido com densidade constante) (14.6)

A pressão P em uma profundidade h é maior do que a pressão P_0 na superfície, e a diferença entre essas pressões é $\rho g h$. Observe que a pressão em qualquer dos dois pontos do fluido é sempre igual em todos os pontos que possuem a mesma altura. A *forma* do recipiente não altera essa pressão (Figura 14.7).

A Equação (14.6) mostra que, se aumentarmos o valor da pressão P_0 no topo da superfície, possivelmente usando um pistão que se adapta firmemente ao interior do recipiente e empurra a superfície do fluido, a pressão P em qualquer profundidade do fluido aumenta de um valor exatamente igual ao valor do aumento da pressão. Esse fato foi verificado em 1653 pelo cientista francês Blaise Pascal (1623-1662), e é chamado de *lei de Pascal*:



A pressão no topo de cada coluna de líquido é a pressão atmosférica, P_0.

A pressão na base de cada coluna de líquido possui o mesmo valor P.

A diferença entre P e P_0 é $\rho g h$, onde h é a distância do topo à base da coluna de líquido. Logo, todas as colunas apresentam a mesma altura.

Figura 14.7 Todas as colunas de fluido apresentam a mesma altura independentemente de sua forma.

Lei de Pascal: A pressão aplicada a um fluido no interior de um recipiente é transmitida sem nenhuma diminuição a todos os pontos do fluido e para as paredes do recipiente.

A Figura 14.8 ilustra esquematicamente o princípio de funcionamento de um elevador hidráulico, uma aplicação da lei de Pascal. Um pistão, cuja seção reta possui área pequena A_1, exerce uma força F_1 sobre a superfície de um líquido tal como um óleo. A pressão aplicada $P = F_1/A_1$ é transmitida integralmente através dos tubos até um pistão maior com área A_2. A pressão aplicada nos dois cilindros é a mesma, logo

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{e} \quad F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

O elevador hidráulico é um dispositivo que multiplica o valor de uma força, e o fator de multiplicação é dado pela razão entre as áreas dos dois pistões. Cadeiras de dentista, elevadores de carro, macacos hidráulicos, diversos elevadores e freios hidráulicos são exemplos de aplicação desse princípio.

Em se tratando de gases, a hipótese de que ρ permanece constante é realista apenas para pequenas diferenças de altura. Em uma sala com 3,0 m de altura cheia de ar com densidade uniforme igual a 1,2 kg/m^3, a diferença de pressão entre o piso e o teto, de acordo com a Equação (14.6), é

$$\rho g h = (1{,}2\ \text{kg/m}^3)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(3{,}0\ \text{m}) = 35\ \text{Pa}$$

ou cerca de 0,00035 atm, uma diferença muito pequena. Contudo, entre o nível do mar e o topo do Monte Everest (8882 m) a densidade do ar varia de um fator aproximadamente igual a três, e, nesse caso, não podemos usar a

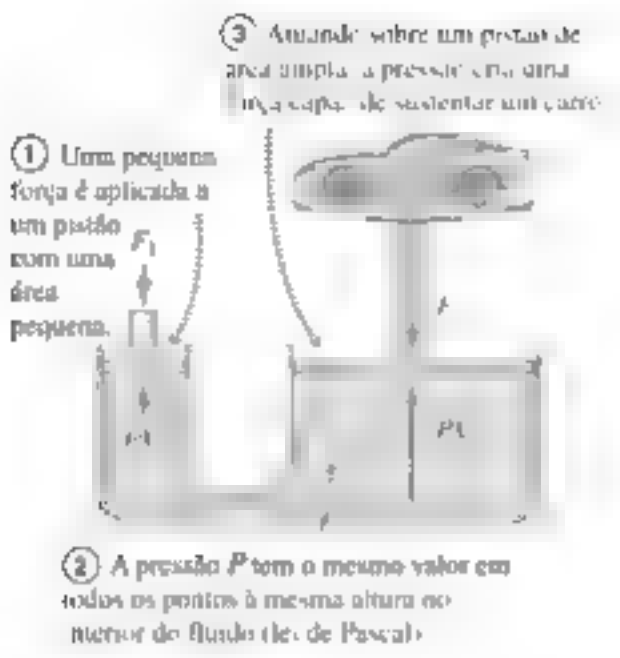

(3) Atuando sobre um pistão de área ampla, a pressão cria uma força capaz de sustentar um carro.
(1) Uma pequena força é aplicada a um pistão com uma área pequena.
F_1
F_2
(2) A pressão P tem o mesmo valor em todos os pontos à mesma altura no interior do fluido (lei de Pascal).

Figura 14.8 O elevador hidráulico é uma aplicação da lei de Pascal. Para maior clareza, o tamanho do recipiente que contém o fluido está exagerado.

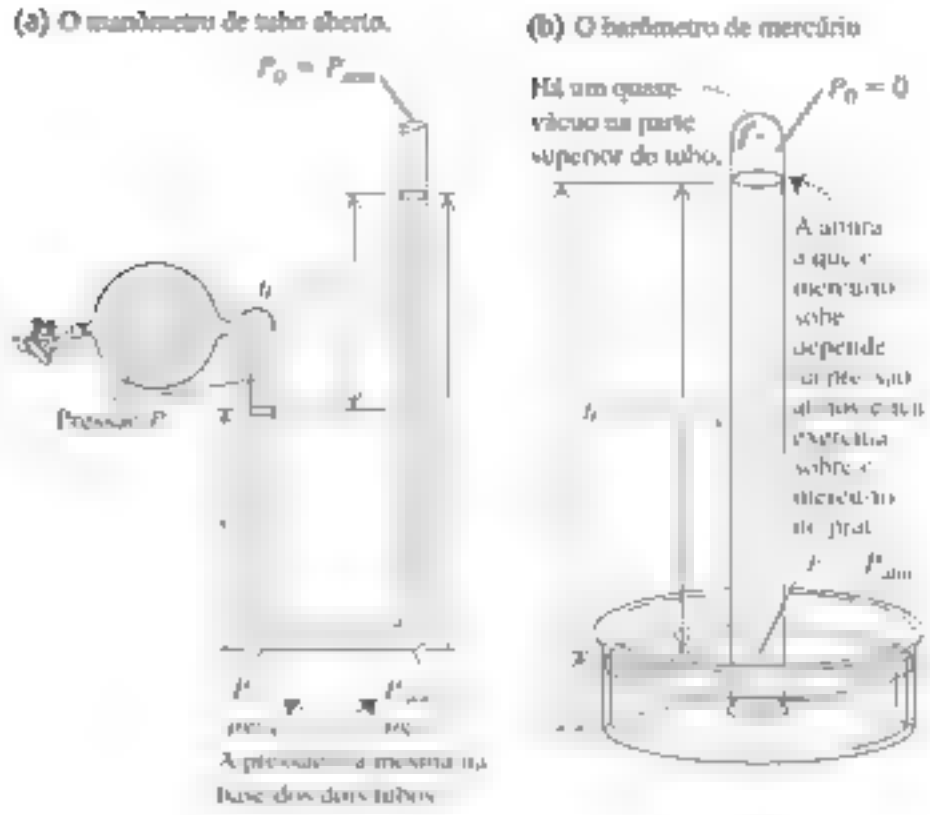

(a) O manômetro de tubo aberto.
$P_0 = P_{atm}$
Pressão P
A pressão é a mesma na base dos dois tubos.
(b) O barômetro de mercúrio
Há um quase-vácuo na parte superior do tubo.
$P_0 = 0$
A altura a que o mercúrio sobe depende da pressão sobre a superfície sobre o mercúrio do prato.
P_{atm}

Figura 14.9 [illegible]

Equação (14.6). Em contraste, um líquido é aproximadamente incompressível, portanto, geralmente é uma boa aproximação considerar sua densidade independente da pressão. Um aumento de pressão de algumas centenas de atmosferas produz um aumento percentual de apenas um dígito na grande maioria dos líquidos.

Pressão absoluta e pressão manométrica

Se a pressão no interior do pneu de um automóvel fosse igual à pressão atmosférica, o pneu ficaria amado. A pressão deve ser *maior* do que a pressão atmosferica para que ele possa sustentar o peso do carro, logo a grandeza físico importante nesse caso é a *diferença* entre a pressão interna e a pressão externa. Quando dizemos que a pressão de um pneu é de "2 atm" queremos dizer que o ar no interior do pneu apresenta uma pressão *total* de 3 atm. O excesso da pressão acima da pressão atmosférica denomina-se **pressão manométrica**, e a pressão total denomina-se **pressão absoluta**. Quando a pressão absoluta for *menor* do que a pressão atmosférica, como no caso de um recipiente onde existe um vácuo parcial, a pressão manométrica é negativa.

Exemplo 14.3

CÁLCULO DA PRESSÃO MANOMÉTRICA E DA PRESSÃO ABSOLUTA Um tanque de armazenamento de 12,0 m de profundidade está cheio de água. O topo do tanque é aberto ao ar. Qual é a pressão absoluta no fundo do tanque? Qual é a pressão manométrica?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR água é quase sempre incompressível. (Imagine tentar usar um pistão para comprimir um cilindro cheio de água — é impossível!) Assim, podemos tratar a água como um fluido de densidade uniforme

PREPARAR o nível da parte superior do tanque corresponde ao ponto 2 na Figura 14.6, e o nível do fundo do tanque corresponde ao ponto 1. Logo, a variável que queremos encontrar é P na Equação (14.6). O problema nos disse que $h = 12{,}0$ m, como o topo do tanque é aberto para a atmosfera, P_0 é igual a 1 atm $= 1{,}01 \times 10^5$ Pa.

EXECUTAR de acordo com a Equação (14.6), a pressão absoluta é

$$P = P_0 + \rho g h$$

$$= (1{,}01 \times 10^5\ \text{Pa}) + (1000\ \text{kg/m}^3)(9{,}80\ \text{m/s}^2)(12{,}0\ \text{m})$$

$$= 2{,}19 \times 10^5\ \text{Pa} = 2{,}16\ \text{atm} = 31{,}8\ \text{libras/polegadas}^2$$

A pressão manométrica é

$$P - P_0 = (2{,}19 - 1{,}01) \times 10^5\ \text{Pa}$$

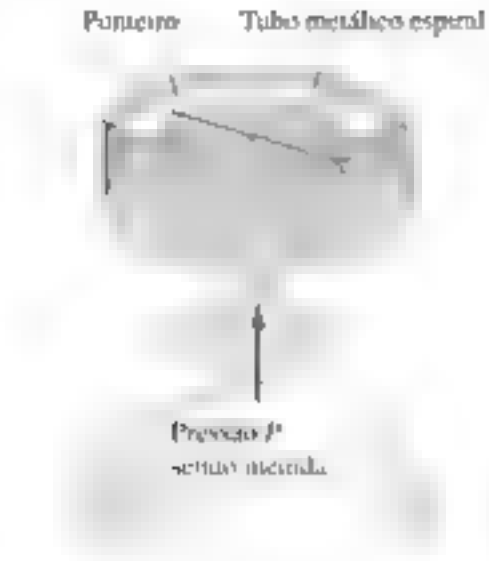
$$= 1{,}18 \times 10^5\ \text{Pa} = 1{,}16\ \text{atm} = 17{,}1\ \text{libras/polegadas}^2$$

AVALIAR quando um tanque possui um manômetro, ele normalmente é calibrado para medir a pressão manométrica e não a pressão absoluta. Como já comentamos, a variação da pressão na *atmosfera* em uma altura de poucos metros é desprezível.

Pressão manométrica

O manômetro mais simples é o *manômetro* de tubo aberto que vemos na Figura 14.9a. O tubo em forma de U contém um líquido de densidade ρ, geralmente mercúrio ou água. Uma das extremidades do tubo está conectada ao recipiente onde desejamos medir a pressão P, e a outra extremidade está aberta para a atmosfera a uma pressão $P_0 = P_{atm}$. A pressão na base do tubo devida ao fluido da coluna da esquerda é $P + \rho g y_1$, e a pressão na base do tubo devida ao fluido da coluna da direita é $P_{atm} + \rho g y_2$. Como essas pressões referem-se ao mesmo ponto, elas são iguais:

(a)



(b)

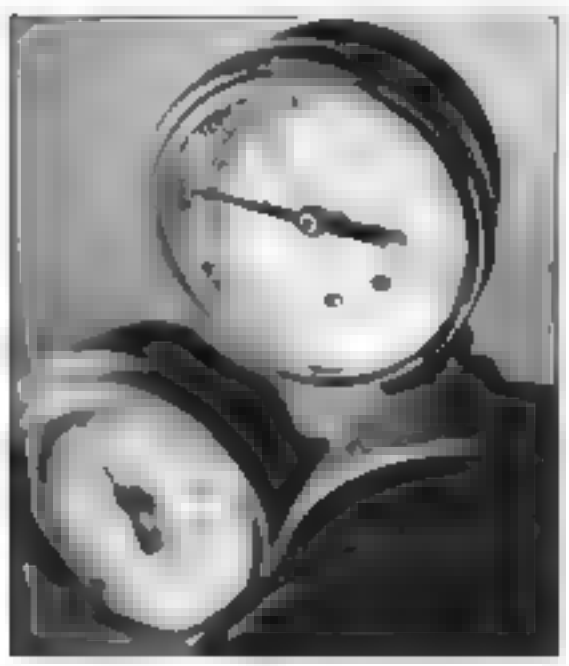


Figura 14.10 Um manômetro Bourdon. Quando a pressão no interior do tubo aumenta, o tubo infla ligeiramente, produzindo uma deflexão do ponteiro sobre a escala. (b) Um manômetro Bourdon usado em um tanque de gás comprimido

$$P + \rho g y_1 = P_{atm} + \rho g y_2$$
$$P - P_{atm} = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \qquad (14.8)$$

Na Equação (14.8), p é a *pressão absoluta*, e a diferença $P - P_{atm}$ entre a pressão absoluta e a pressão atmosférica é a pressão manométrica. Logo, a pressão manométrica é proporcional à diferença de altura ($h = y_2 - y_1$) entre as duas colunas do líquido

Outro tipo comum de manômetro é o **barômetro de mercúrio**. Ele consiste em um longo tubo de vidro, fechado em uma extremidade, que foi previamente preenchido com mercúrio e posteriormente invertido em um recipiente que contém mercúrio (Figura 14.9b). O espaço acima da coluna de mercúrio contém apenas vapor de mercúrio; a sua pressão extremamente pequena pode ser desprezada, de modo que a pressão P_0 no topo da coluna de mercúrio é praticamente igual a zero. De acordo com a Equação (14.6),

$$P_a = P = 0 + \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \qquad (14.9)$$

Portanto, o barômetro de mercúrio mede a pressão atmosférica P_{atm} diretamente a partir da altura da coluna de mercúrio

Em muitas aplicações, as pressões são descritas pela correspondente altura da coluna de mercúrio como um certo valor de milímetros de mercúrio (ou, de forma abreviada, mmHg). A pressão equivalente a 1 mmHg denomina-se *1 torr*, em homenagem a Evangelista Torricelli, o inventor do barômetro de mercúrio. Entretanto, como essa unidade depende da densidade do mercúrio, que pode variar com a temperatura, e de g, que varia com o local, o pascal é a unidade de pressão preferida

Um tipo comum de manômetro usado para medir a pressão arterial, denominado *esfigmomanômetro*, é composto por um manômetro cheio de mercúrio. Leituras da pressão do sangue, tais como 130/80, referem-se aos valores máximos e mínimos das pressões manométricas existentes nas artérias, medidas em mmHg ou em torr. A pressão arterial varia com a altura do corpo; o ponto-padrão de referência é a parte superior do braço, ao nível do coração.

Muitos tipos de manômetros usam um recipiente flexível selado (Figura 14.10). Uma variação de pressão fora ou dentro do recipiente produz uma variação de suas dimensões. Essa variação pode ser medida elétrica, óptica ou mecanicamente

Exemplo

A HISTÓRIA DE DOIS FLUIDOS O tubo de um manômetro é parcialmente preenchido com água. Despeja-se óleo (que não se mistura com a água e possui uma densidade menor do que ela) no braço esquerdo do tubo até que a linha de separação entre o óleo e a água esteja na metade do tubo. Ambos os braços do tubo são abertos para o ar. Encontre a relação entre as alturas $h_{óleo}$ e $h_{água}$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a relação entre a pressão e a profundidade em um fluido aplica-se apenas aos fluidos de densidade uniforme. Assim, não existe uma equação única para o óleo e a água. O que podemos fazer é escrever uma relação entre a pressão e a profundidade para cada fluido separadamente. Note que a pressão é a mesma na base das duas colunas de fluido (onde os fluidos estão em contato e em equilíbrio, as pressões são iguais) e no topo (onde os dois fluidos estão em contato com o ar e em equilíbrio com ele).

PREPARAR: a Figura 14.11 mostra nosso esboço. Vamos considerar P_0 a pressão atmosférica e P a pressão no fundo do tubo. As densidades dos dois fluidos são $\rho_{água}$ e $\rho_{óleo}$ (que é menor do que $\rho_{água}$). Usamos a Equação (14.6) para cada um dos fluidos.

EXECUTAR: aplicando a Equação (14.6) a cada um dos dois fluidos, obtemos

$$P = P_0 + \rho_{água} g h_{água}$$

$$P = P_0 + \rho_{óleo} g h_{óleo}$$

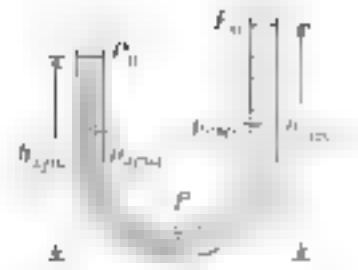


Figura 14.11 Nosso esboço para esse problema.

Como a pressão P no fundo do tubo é a mesma nos dois fluidos, igualamos as duas expressões e resolvemos para $h_{óleo}$ em termos de $h_{água}$. O resultado é

$$h_{óleo} = \frac{\rho_{água}}{\rho_{óleo}} h_{água}$$

AVALIAR como o óleo é menos denso do que a água, a razão $\rho_{água}/\rho_{óleo}$ é maior do que 1, e $h_{óleo}$ é maior do que $h_{água}$ (como mostra a Figura 14.11). Ou seja, a altura do óleo, que tem menor densidade, precisa ser maior para produzir a mesma pressão P no fundo do tubo.

Teste sua compreensão da Seção 14.2 O mercúrio é menos denso em temperaturas elevadas do que em temperaturas baixas. Suponha que você leve um barômetro de mercúrio do interior gelado de um refrigerador bem fechado para o ar livre em um dia quente de verão e descubra que a coluna de mercúrio continua na mesma altura no tubo. Comparada à pressão do ar dentro do refrigerador, a pressão do ar livre é (i) maior, (ii) menor, ou (iii) igual? (Despreze as pequenas variações nas dimensões do tubo de vidro devido à variação da temperatura.) ▮

14.3 Empuxo

O **empuxo** é um fenômeno familiar: um corpo imerso na água parece possuir um peso menor do que no ar. Quando o corpo possui densidade menor do que a do fluido, ele flutua. O corpo humano normalmente flutua na água, e um balão cheio de hélio flutua no ar.

O princípio de Arquimedes afirma: quando um corpo está parcial ou completamente imerso em um fluido, o fluido exerce sobre o corpo uma força de baixo para cima igual ao peso do volume do fluido deslocado pelo corpo.

Para demonstrar esse princípio, consideramos uma porção qualquer de fluido em repouso. Na Figura 14.12a a linha irregular externa indica a superfície que delimita essa porção do fluido. As setas representam as forças exercidas pelo fluido vizinho sobre a superfície de contorno.

O fluido todo está em equilíbrio, logo o componente y da força resultante deve ser igual a zero. Portanto, a soma dos componentes y das forças que atuam sobre a *superfície* deve ser uma força de baixo para cima com módulo igual ao peso mg do fluido no interior da superfície. Além disso, a soma dos torques sobre a porção do fluido deve ser igual a zero, de forma que a linha de ação da força resultante deve passar pelo centro de gravidade dessa porção do fluido.

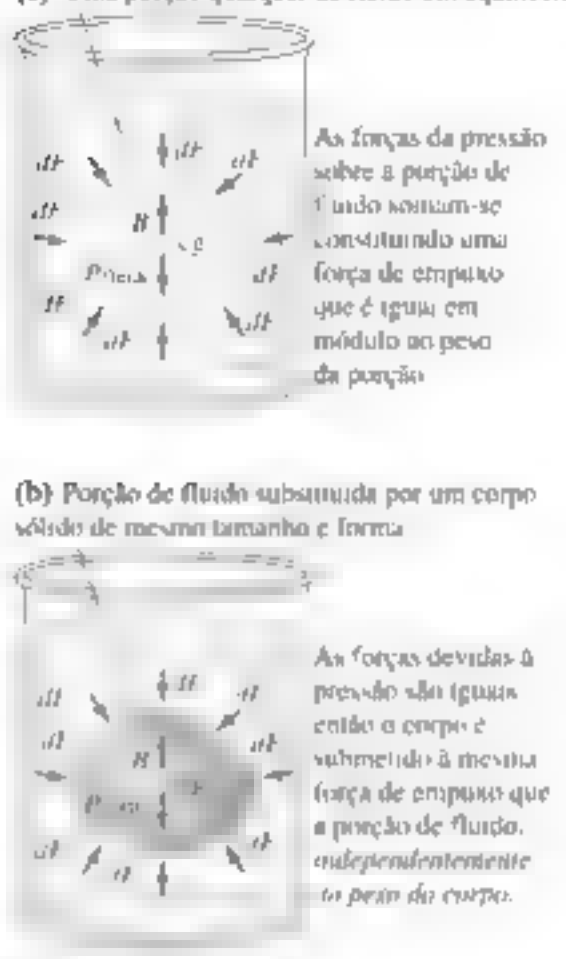

(a) Uma porção qualquer de fluido em equilíbrio
As forças da pressão sobre a porção de fluido somam-se constituindo uma força de empuxo que é igual em módulo ao peso da porção.
(b) Porção de fluido substituída por um corpo sólido de mesmo tamanho e forma
As forças devidas à pressão são iguais então o corpo é submetido à mesma força de empuxo que a porção de fluido, *independentemente* do peso do corpo.

Figura 14.12 Princípio de Arquimedes.

Agora, substituímos o elemento de fluido por um corpo sólido com uma forma exatamente igual à forma do elemento considerado (Figura 14.12b). A pressão em cada ponto é exatamente a mesma que a anterior. Assim, a força de baixo para cima exercida pelo fluido é também a mesma, novamente igual ao peso mg do fluido deslocado que abria o espaço para o corpo. Essa força de baixo para cima denomina-se **força de empuxo** sobre o corpo sólido. A linha de ação da força de empuxo novamente passa pelo centro de gravidade do fluido deslocado (que não coincide necessariamente com o centro de gravidade do corpo).

Quando um balão flutua em equilíbrio no ar, seu peso (incluindo o gás do seu interior) deve ser igual ao peso do ar deslocado pelo balão. O corpo de um peixe é mais denso do que a água, e mesmo assim o peixe flutua quando colocado dentro da água, porque possui uma cavidade cheia de gás dentro do corpo. Isso torna a densidade *média* do peixe igual à da água, de forma que seu peso total é o mesmo que o peso da água que ele desloca. Um corpo cuja densidade média é *menor* do que a do líquido pode flutuar parcialmente submerso na superfície livre do líquido. Quanto maior for a densidade do líquido, menor é a parte do corpo submersa. Quando você nada na água do mar (densidade igual a 1030 kg/m^3), seu corpo flutua mais facilmente do que quando você nada na água doce (1000 kg/m^3).

Outro exemplo familiar é o densímetro, um dispositivo usado para determinar a densidade de líquidos (Figura

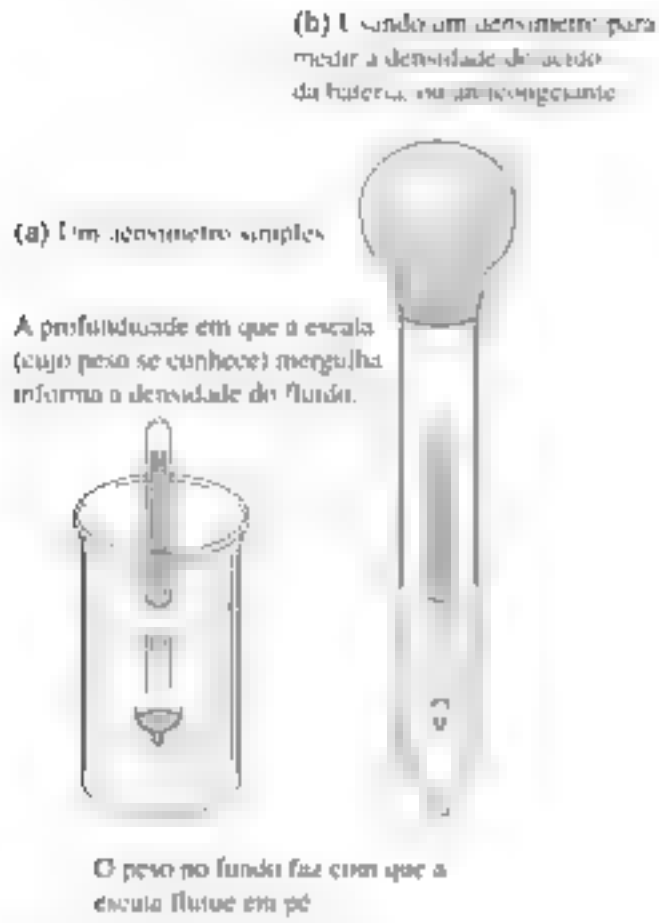

(b) Usando um densímetro para medir a densidade do ácido da bateria ou anticongelante
(a) Um densímetro simples
A profundidade em que a escala (cujo peso se conhece) mergulha informa a densidade do fluido.
O peso no fundo faz com que a escala flutue em pé

Figura 14.13 Medindo a densidade de um fluido.

14.13a). Um flutuador calibrado afunda no líquido até que seu peso se torne exatamente igual ao peso do fluido deslocado. O flutuador do densímetro em um líquido mais denso flutua em uma altura *mais elevada* do que a altura em um líquido menos denso. Ele é mais pesado em sua extremidade inferior de modo que sua posição direita se mantém estável e uma escala marcada na haste superior permite uma leitura direta da densidade. A Figura 14.13b mostra um tipo de densímetro geralmente usado para medir a densidade do ácido de uma bateria ou a densidade de um anticongelante. A extremidade inferior do tubo maior é imersa no líquido, o bulbo é comprimido para expelir o ar e a seguir libertado, funcionando como um conta-gotas gigante. O líquido ascende no tubo e o flutuador atinge o equilíbrio na amostra do líquido.

Exemplo 14.9

EMPUXO Uma estátua de ouro de 15,0 kg está sendo içada de um navio submerso (Figura 14.14a). Qual é a tensão no cabo de sustentação quando a estátua está em repouso a) completamente submersa, b) fora da água?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: quando a estátua está submersa, ela sofre a ação de uma força de empuxo com módulo igual ao peso da água deslocada. Para achar essa força, observamos que a estátua está em equilíbrio (ou seja, está em repouso) e consideramos as três forças que agem sobre ela: peso, empuxo e a tensão no cabo.

PREPARAR: a Figura 14.14b mostra o diagrama de forças da estátua em equilíbrio. A variável que queremos encontrar é a

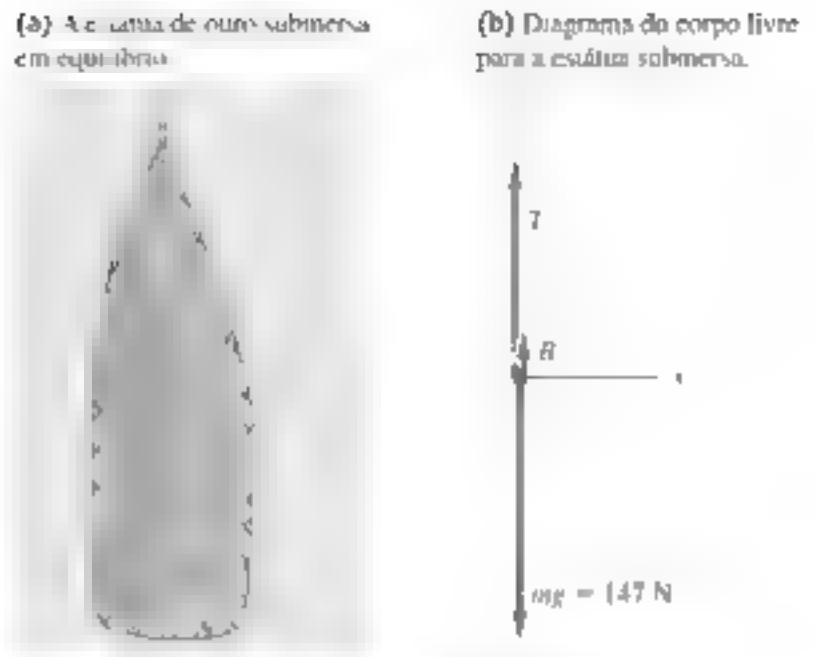


Figura 14.14 Qual é a tensão no cabo que sustenta a estátua?

tensão T. O problema forneceu o peso mg, e podemos calcular o empuxo B por meio do princípio de Arquimedes. Fazemos isso para os dois casos: (a) quando a estátua está imersa na água e (b) quando a estátua está fora da água e imersa no ar.

EXECUTAR: a) para encontrar o empuxo, calcule primeiro o volume da estátua, verificando a densidade do ouro na Tabela 14.1:

$$V = \frac{m}{\rho_{ouro}} = \frac{15,0\ \text{kg}}{19,3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3} = 7,77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

Usando a Tabela 14.1 mais uma vez, encontramos o peso desse volume de água do mar:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{água do mar}} &= m_{\text{água do mar}}g = \rho_{\text{água do mar}}Vg \\ &= (1,03 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(7,77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(9,80\ \text{m/s}^2) \\ &= 7,84\ \text{N} \end{aligned}$$

Esse valor é igual ao módulo da força de empuxo B.
Como a estátua está em repouso, a força resultante que atua sobre ela é igual a zero. Pela Figura 14.14b,

$$\begin{aligned} \sum F_y &= B + T + (-mg) = 0 \\ T &= mg - B = (15,0\ \text{kg})(9,80\ \text{m/s}^2) - 7,84\ \text{N} \\ &= 147\ \text{N} - 7,84\ \text{N} = 139\ \text{N} \end{aligned}$$

Se um dinamômetro for preso à extremidade superior do cabo, ele indicará 7,84 N a menos do que se a estátua não estivesse imersa na água do mar. Portanto, a estátua submersa parece pesar 139 N, cerca de 5% a menos do que seu peso de 147 N.

b) A densidade do ar é aproximadamente igual a 1,2 kg/m³, de modo que a força de empuxo do ar sobre a estátua é

$$\begin{aligned} B &= \rho_{ar}Vg = (1,2\ \text{kg/m}^3)(7,77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(9,80\ \text{m/s}^2) \\ &= 9,1 \times 10^{-3}\ \text{N} \end{aligned}$$

Essa força equivale a 62 partes por milhão do peso real da estátua. Esse valor está muito aquém da precisão requerida neste problema, de modo que podemos desprezá-lo. Portanto, a tensão no cabo com a estátua no ar é igual ao peso da estátua, 147 N.

Figura 14.15 A superfície da água age como uma membrana sob tensão, permitindo que essa aranha-d'água literalmente ande sobre as águas.

AVALIAR: note que o empuxo é proporcional à densidade do *fluido*, não à densidade da estátua. Quanto mais denso é o fluido, maior o empuxo e menor a tensão no cabo. Se o fluido tivesse a mesma densidade que a estátua, o empuxo seria igual ao peso da estátua e a tensão seria zero (o cabo ficaria frouxo). Se o fluido fosse mais denso do que a estátua, a tensão seria *negativa*: o empuxo seria maior do que o peso da estátua e uma força de cima para baixo seria necessária para impedir a estátua de emergir.

Tensão superficial

Um objeto menos denso do que a água, como uma bola de praia cheia de ar, flutua com parte de seu volume abaixo da superfície. Um clipe de papel, por outro lado, flutua sobre a superfície da água embora sua densidade seja diversas vezes maior do que a da água. Essas situações exemplificam o fenômeno da **tensão superficial**: a superfície do líquido se comporta como uma membrana submetida à tensão (Figura 14.15). As moléculas de um líquido exercem forças de atração mútuas; a força resultante sobre qualquer molécula situada no interior do volume do líquido é igual a zero, porém, uma molécula na superfície é puxada para dentro do volume (Figura 14.16). Ou seja, o líquido tende a minimizar a área da superfície, da mesma forma que uma membrana.

A tensão superficial explica por que gotas de chuva caindo livremente são esféricas (e *não* em forma de lágrimas): a esfera é a forma que possui a menor área superficial para um dado volume. Explica também por que água com sabão serve para a limpeza. Para lavar bem as roupas, a água precisa ser forçada a entrar nos minúsculos espaços entre as fibras (Figura 14.17). Isso exige um aumento na área superficial da água, que é difícil de obter devido à tensão superficial. A tarefa se torna mais simples aumentando a temperatura da água e adicionando sabão, pois ambos os procedimentos diminuem a tensão superficial.

A tensão superficial é importante para uma gota de água de tamanho milimétrico, que possui uma área superficial relativamente grande para seu volume. (Uma esfera de raio r tem área superficial igual a $4\pi r^2$ e volume igual a $(4\pi/3)r^3$. A razão entre a área superficial e o volume é de $3/r$, que aumenta à medida que o raio diminui.) Para grandes quantidades de líquido, contudo, a razão entre a área superficial e o volume é relativamente pequena, e a tensão superficial é desprezível se comparada às forças de

Moléculas de um líquido são atraídas pelas moléculas vizinhas
Na superfície, as atrações não equilibradas fazem com que a superfície resista à expansão
Moléculas de água
Moléculas do interior são igualmente atraídas em todas as direções

Figura 14.16 Uma molécula na superfície de um líquido é atraída para dentro do seio do líquido, o que tende a reduzir a área superficial do líquido.

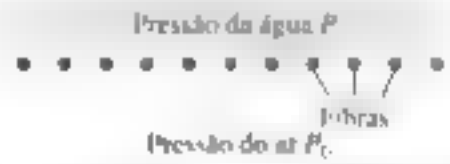


Figura 14.17 A tensão superficial dificulta a penetração da água entre fendas pequenas. A pressão da água P necessária pode ser reduzida usando-se água quente com sabão, que possui tensão superficial menor.

pressão. Durante o restante deste capítulo, consideraremos apenas fluidos em grandes quantidades e, portanto, desprezaremos os efeitos da tensão superficial.

Teste sua compreensão da Seção 14.3 Você coloca um recipiente de água do mar em uma balança e verifica o seu peso. A seguir, você mergulha a estátua do Exemplo 14.5 dentro da água, suspendendo-a por um fio (Figura 14.18). Como varia a leitura do peso na balança? (i) Aumenta em 7,84 N; (ii) diminui em 7,84 N; (iii) permanece igual; (iv) nenhuma das anteriores.

Figura 14.18 Como varia a leitura na balança quando a estátua é imersa na água? ■

Figura 14.19 Um tubo de escoamento delimitado por linhas de escoamento. Em um escoamento estacionário o fluido não pode cruzar as paredes de um tubo de escoamento.

14.4 Escoamento de um fluido

Estamos agora preparados para estudar o *movimento* de um fluido. O escoamento de um fluido pode ser extremamente complexo, como no caso das correntezas de um rio ou das chamas revoltas de uma fogueira em um acampamento. Entretanto, algumas situações podem ser descritas mediante um modelo idealizado simples. Um **fluido ideal** é um fluido *incompressível* (ou seja, aquele cuja densidade não varia) e sem nenhum atrito interno (chamado de **viscosidade**). Os líquidos são aproximadamente incompressíveis em muitas situações, e podemos também considerar um gás incompressível quando as diferenças de pressão de uma região para outra não forem muito elevadas. O atrito interno em um fluido produz tensões de cisalhamento quando existe um movimento relativo entre duas camadas vizinhas do fluido, como no caso do escoamento de um fluido no interior de um tubo ou em torno de um obstáculo. Em alguns casos, essas tensões de cisalhamento podem ser desprezadas em comparação às diferenças de pressão e forças oriundas da ação da gravidade.

A trajetória de uma partícula individual durante o escoamento de um fluido denomina-se **linha de escoamento** ou *linha de fluxo*. Quando a configuração global do escoamento de um fluido não varia com o tempo, ele se chama de **escoamento estacionário** ou *escoamento permanente*. No escoamento estacionário, todo elemento que passa por um dado ponto segue sempre a mesma linha de escoamento. Nesse caso, o 'mapa' das velocidades do fluido em diversos pontos do espaço permanece constante, embora a velocidade da partícula possa variar em módulo, direção e sentido em pontos diferentes. Uma **linha de corrente** é uma curva cuja tangente em cada ponto dá a direção e o sentido da velocidade no respectivo ponto. Quando a configuração do escoamento de um fluido varia com o tempo, as linhas de corrente não coincidem com as linhas de escoamento. Consideraremos apenas situações com escoamento estacionário, nas quais as linhas de corrente e as linhas de escoamento são idênticas.

As linhas de escoamento que passam através de um elemento de área imaginário, tal como a área A na Figura 14.19, formam um tubo chamado de **tubo de escoamento** ou tubo de fluxo. Pela definição de linha de escoamento, em um escoamento estacionário nenhuma parte do fluido pode atravessar as paredes laterais de um tubo de escoamento; os fluidos de diferentes tubos de escoamento não podem se misturar.

Na Figura 14.20, da esquerda para a direita, vemos o escoamento de um fluido em torno de três tipos diferentes de obstáculos. Essas fotografias foram feitas injetando-se um corante na água que escoava entre duas placas de vidro. Todas as configurações indicadas são típicas do **escoamento laminar**, no qual camadas adjacentes do fluido deslizam umas sobre as outras e o escoamento é estacionário. (*Lâmina* é uma folha fina.) Para taxas de escoamento suficientemente elevadas, ou quando um obstáculo produz variações abruptas de velocidade, o escoamento pode tornar-se irregular e caótico. Nesse caso, ele recebe o nome de **escoamento turbulento** (Figura 14.21). Em um escoamento turbulento não pode existir nenhuma configuração com escoamento estacionário; a configuração do escoamento varia continuamente com o tempo.

Equação da continuidade

A massa de um fluido não varia durante seu escoamento. Isso leva a uma relação importante chamada de **equação da continuidade**. Considere um tubo de escoamento deli-

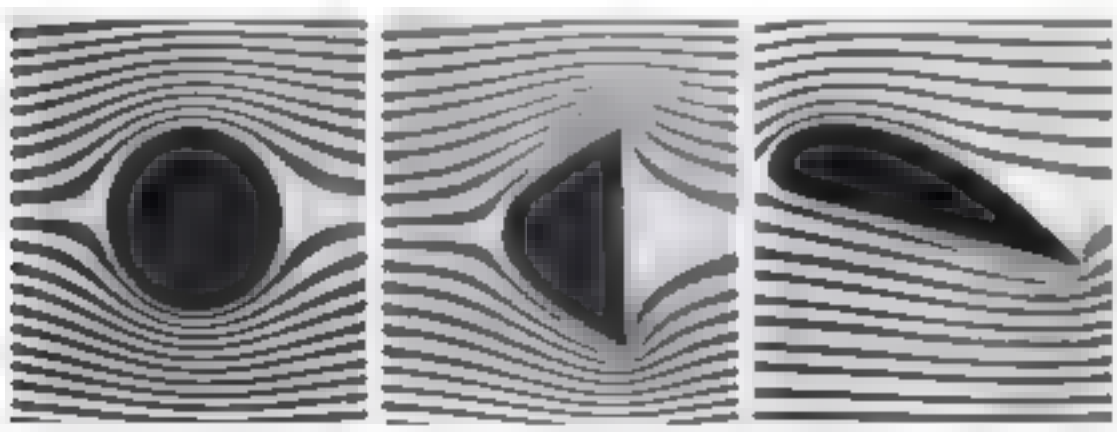


Figura 14.20 Escoamento laminar em torno de obstáculos com formas diferentes.

Figura 14.21 O escoamento da fumaça erguendo-se dessas varetas de incenso é laminar até certo ponto, depois, torna-se turbulento.

mitado por duas seções retas estacionárias de áreas A_1 e A_2 (Figura 14.22). Nessas seções retas as velocidades do fluido são v_1 e v_2, respectivamente. Nenhum fluido pode escoar pelas paredes laterais do tubo, porque a velocidade do fluido é tangente à parede em cada um dos seus pontos. Durante um pequeno intervalo de tempo dt, o fluido que estava em A_1 se desloca uma distância $v_1\,dt$, de modo que um cilindro de fluido com altura $v\ dt$ e volume $dV_1 = A_1 v_1\,dt$ escoa para o interior do tubo através de A_1. Durante esse mesmo intervalo de tempo, um cilindro com volume $dV_2 = A_2 v_2\,dt$ escoa para fora do tubo através de A_2.

Vamos considerar inicialmente o caso de um fluido incompressível, de tal forma que a densidade ρ possua o mesmo valor em todos os pontos do fluido. A massa dm_1 que flui para o interior do tubo através da área A_1 no tempo dt é dada por $dm_1 = \rho A_1 v_1\,dt$. Analogamente, a massa dm_2 que flui para fora do tubo através da área A_2 no mesmo tempo é dada por $dm_2 = \rho A_2 v_2\,dt$. No escoamento estacionário, a massa total no tubo permanece constante, logo $dm_1 = dm_2$ e

$$\rho A_1 v_1\,dt = \rho A_2 v_2\,dt \quad \text{ou}$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

(equação da continuidade, fluido incompressível) (14.10)

O produto Av é a *vazão volumétrica* dV/dt, ou seja, a taxa com a qual o volume do fluido atravessa a seção reta do tubo:

$$\frac{dV}{dt} = Av \quad \text{(vazão volumétrica)} \tag{14.11}$$

A vazão *mássica* é a taxa de variação da massa por unidade de tempo através da seção reta do tubo. Ela é dada pelo produto da densidade ρ pela vazão volumétrica dV/dt.

A Equação (14.10) mostra que a vazão volumétrica possui sempre o mesmo valor em todos os pontos ao longo de qualquer tubo de escoamento. Quando a seção reta de um escoamento diminui, a velocidade aumenta e vice-versa. A parte mais profunda de um rio possui uma seção reta maior e correntes mais lentas do que as partes rasas, mas a vazão volumétrica é a mesma nos dois casos. Essa é a essência da máxima "Águas profundas ainda correm". A corrente de água que jorra de uma torneira torna-se mais estreita na medida em que a água ganha velocidade durante sua queda livre, porém, dV/dt possui sempre o mesmo valor ao longo da corrente. Quando um tubo com diâmetro de 2 cm é ligado a um tubo com diâmetro de 1 cm, a velocidade do escoamento no tubo de 1 cm é quatro vezes maior do que a velocidade do escoamento no tubo de 2 cm.

Figura 14.22 Um tubo de escoamento com seção reta de área variável. Quando o fluido é incompressível, o produto Av permanece constante em todos os pontos ao longo do tubo de escoamento.

Podemos generalizar a Equação (14.10) para o caso do escoamento de um fluido que *não* é incompressível. Se ρ_1 e ρ_2 forem as densidades nas seções 1 e 2, então

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

(equação da continuidade, fluido compressível) (14.12)

Se o fluido for mais denso no ponto 2 do que no ponto 1 ($\rho_2 > \rho_1$), a vazão volumétrica no ponto 2 será menor do que no ponto 1 ($A_2 v_2 < A_1 v_1$). Deixamos os detalhes desta demonstração como um exercício (veja o Exercício 14.38). No caso do fluido incompressível, como ρ_1 e ρ_2 são sempre iguais, a Equação (14.12) se reduz à Equação (14.10).

Exemplo 14.6

ESCOAMENTO DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL. Como parte de um sistema de lubrificação para máquinas pesadas, um óleo de densidade igual a 850 kg/m^3 é bombeado através de um tubo cilíndrico de 8,0 cm de diâmetro a uma taxa de 9,5 litros por segundo. (a) Qual é a velocidade do óleo? Qual é a vazão mássica? (b) Se o diâmetro do tubo for reduzido a 4,0 cm, quais serão os novos valores para a velocidade e vazão volumétrica? Considere o óleo incompressível.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o dado fundamental é que o fluido é incompressível, então podemos usar a idéia da equação da continuidade para relacionar a vazão mássica, a vazão volumétrica, a área do tubo de escoamento e a velocidade do escoamento.

PREPARAR: usamos a definição da vazão volumétrica, Equação (14.11), para encontrar a velocidade v na seção de 8,0 cm de diâmetro. A vazão mássica é o produto da densidade e da vazão volumétrica. A equação da continuidade para escoamento incompressível, Equação (14.10), permite-nos encontrar a velocidade v_2 na seção de 4,0 cm de diâmetro.

EXECUTAR: (a) a vazão volumétrica dV/dt é igual ao produto $A_1 v_1$, onde A_1 é a área da seção reta do tubo de diâmetro de 8,0 cm e raio 4,0 cm. Assim,

$$v_1 = \frac{dV/dt}{A_1} = \frac{(9{,}5\ \text{L/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{L})}{\pi(4{,}0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2} = 1{,}9\ \text{m/s}$$

A vazão mássica é $\rho\, dV/dt = (850\ \text{kg/m}^3)(9{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}) = 8{,}1\ \text{kg/s}$.

(b) Como o óleo é incompressível, a vazão volumétrica apresenta o mesmo valor em ambas as seções do tubo. Pela Equação (14.10),

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi(4{,}0 \times 10^{-2}\,\text{m})^2}{\pi(2{,}0 \times 10^{-2}\,\text{m})^2}(1{,}9\,\text{m/s}) = 7{,}6\,\text{m/s}$$

AVALIAR A segunda seção do tubo tem a metade do diâmetro e um quarto da área de seção reta da primeira. Logo, a velocidade deve ser quatro vezes maior na segunda seção, o que é exatamente o que o nosso resultado mostra ($v_2 = 4v_1$).

Teste sua compreensão da Seção 14.4 Uma equipe de manutenção está trabalhando em um trecho de uma estrada de três pistas, deixando apenas uma pista aberta ao tráfego. O resultado é um tráfego muito mais lento (um engarrafamento). Os carros na estrada se comportam como (i) moléculas de um fluido incompressível ou (ii) moléculas de um fluido compressível? ■

14.5 Equação de Bernoulli

De acordo com a equação da continuidade, a velocidade de escoamento de um fluido pode variar com as trajetórias do fluido. A pressão também pode variar; ela depende da altura, como na situação estática (Seção 14.2), e também da velocidade do escoamento. Podemos deduzir uma relação importante entre a pressão, a velocidade e a altura no escoamento de um fluido ideal, chamada de *equação de Bernoulli*. A equação de Bernoulli é uma ferramenta essencial para analisar escoamentos em sistemas de encanamentos, em usinas hidrelétricas e nos voos de aeronaves.

A dependência da pressão em relação à velocidade decorre da equação da continuidade, Equação (14.10). Quando um fluido incompressível escoa ao longo de um tubo de escoamento com seção reta variável, sua velocidade *deve* variar e, portanto, um elemento do fluido deve possuir uma aceleração. Quando o tubo é horizontal, a força que produz essa aceleração é proveniente do fluido das vizinhanças. Isso significa que a pressão *deve* variar em diferentes seções retas do tubo; caso ela fosse a mesma em todos os pontos, a força resultante sobre cada elemento do fluido deveria ser igual a zero. Quando um tubo horizontal afunila e o elemento do fluido acelera, ele deve se deslocar para uma região de pressão menor para ter uma força resultante capaz de acelerá-lo. Quando existe uma diferença de altura, ocorre uma diferença de pressão adicional.

Deduzindo a equação de Bernoulli

Para deduzir a equação de Bernoulli, aplicamos o teorema do trabalho-energia ao fluido em uma seção do tubo de escoamento. Na Figura 14.23, consideramos um elemento do fluido que estava inicialmente entre duas seções retas a e c. A velocidade na extremidade inferior é v_1 e na extremidade superior é v_2. Durante um pequeno intervalo de tempo dt, o fluido que estava inicialmente em

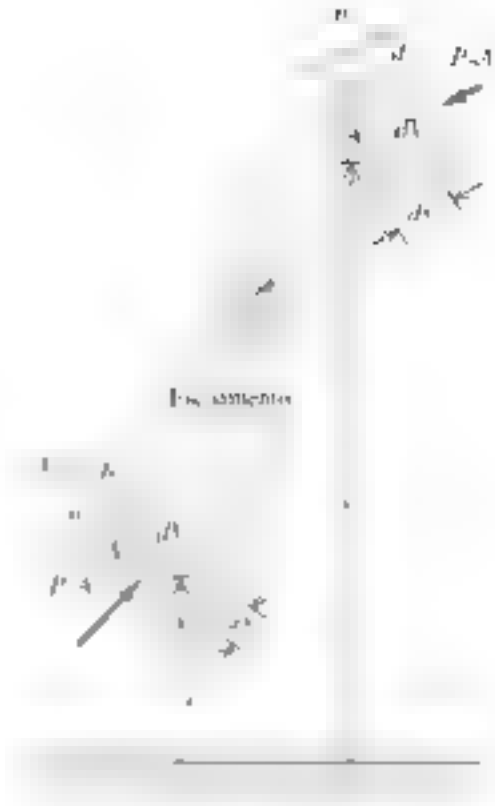


Figura 14.23 Deduzindo a equação de Bernoulli. O trabalho total realizado sobre um elemento do fluido pela pressão do fluido circundante é igual à variação da energia cinética acrescida da variação da energia potencial gravitacional.

a desloca-se para b, percorrendo uma distância $ds_1 = v_1 dt$, e o fluido que estava em c desloca-se para d, percorrendo uma distância $ds_2 = v_2 dt$. As áreas das seções retas nas duas extremidades são A_1 e A_2, conforme indicado. O fluido é incompressível; portanto, pela equação da continuidade, Equação (14.10), o volume de fluido dV que passa em *qualquer* seção reta durante um intervalo de tempo dt é sempre o mesmo. Ou seja, $dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$.

Vamos calcular o *trabalho* realizado sobre esse elemento de fluido durante dt. Estamos supondo que o atrito interno no fluido é desprezível (ou seja, não há viscosidade), de modo que as únicas forças não gravitacionais que realizam trabalho sobre o elemento do fluido são as da pressão do fluido circundante. As pressões nas duas extremidades são P_1 e P_2, a força sobre a seção reta a é $P_1 A_1$ e a força sobre a seção reta c é $P_2 A_2$. O trabalho total dW realizado pelo fluido das vizinhanças sobre o elemento de fluido durante esse deslocamento é

$$dW = P_1 A_1 ds_1 - P_2 A_2 ds_2 = (P_1 - P_2)\, dV \qquad (14.13)$$

O segundo termo possui sinal negativo porque a força sobre c se opõe ao deslocamento do fluido.

O trabalho dW é realizado por outras forças, além da força conservativa da gravidade, portanto ele é igual à variação da energia mecânica do sistema (energia cinética mais energia potencial gravitacional) associada ao elemento de fluido. A energia mecânica no fluido entre as seções b e c não varia. No início de dt, o fluido entre as seções a e b possui volume $A_1 ds_1$, massa $\rho A_1 ds_1$ e energia cinética $\frac{1}{2}\rho(A_1 ds_1)v_1^2$. No final de dt, o fluido entre as seções c e d

possui energia cinética $\frac{1}{2}\rho(A_2\,ds_2)v_2^2$. A variação total da energia cinética dK durante o intervalo de tempo dt é

$$dK = \frac{1}{2}\rho\,dV(v_2^2 - v_1^2) \tag{14.14}$$

E quanto à variação da energia potencial gravitacional? No início de dt, a energia potencial da massa entre a e b é $dm\,gy_1 = \rho\,dV\,gy_1$. No final de dt, a energia potencial da massa entre c e d é $dm\,gy_2 = \rho\,dV\,gy_2$. A variação total da energia potencial dU durante o intervalo de tempo dt é

$$dU = \rho dV\,g(y_2 - y_1) \tag{14.15}$$

Substituindo as equações (14.13), (14.14) e (14.15) na equação da energia $dW = dK + dU$, obtemos

$$(P_1 - P_2)\,dV = \frac{1}{2}\rho\,dV(v_2^2 - v_1^2) + \rho\,dV\,g(y_2 - y_1)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1) \tag{14.16}$$

Essa é a **equação de Bernoulli**. Ela afirma que o trabalho realizado pelo fluido das vizinhanças sobre uma unidade de volume de fluido é igual à soma das variações da energia cinética e da energia potencial ocorridas na unidade de volume durante o escoamento. Podemos também interpretar a Equação (14.16) em termos das pressões. O primeiro termo do membro direito é a diferença de pressão associada à variação da velocidade do fluido. O segundo termo do membro direito é a diferença de pressão adicional associada ao peso e produzida pela diferença de altura entre as duas extremidades.

Podemos também expressar a Equação (14.16) de modo mais conveniente usando a forma

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho$$

(equação de Bernoulli) (14.17)

Os índices 1 e 2 referem-se a *qualquer* par de pontos ao longo do tubo de escoamento, então podemos também escrever

$$P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \tag{14.18}$$

Note que, quando o fluido *não* está em movimento (quando $v_1 = v_2 = 0$), a Equação (14.17) se reduz à Equação (14.5), que dá a pressão de um fluido em repouso.

ATENÇÃO **O princípio de Bernoulli se aplica apenas em certas situações** Acentuamos mais uma vez que a equação de Bernoulli vale *somente* para o escoamento estacionário de um fluido incompressível sem viscosidade. Por ser uma equação simples e fácil de usar, surge a tentação de usá-la em situações para as quais ela não é válida, mas você deve resistir a essa tentação!

Estratégia para a solução de problemas

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A equação de Bernoulli foi deduzida a partir do teorema do trabalho-energia, portanto não é surpresa que possamos aplicar aqui muitas recomendações de estratégia para a solução de problemas mencionadas na Seção 7.1.

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* comece certificando-se de que o escoamento do fluido seja estacionário e que o fluido seja compressível e livre de atrito interno. Este caso é uma idealização, mas é surpreendentemente aplicável a fluidos que escoam por tubos suficientemente grandes e a escoamentos dentro de fluidos com grande volume (por exemplo, o ar que cerca um avião ou a água ao redor de um peixe).

PREPARAR *seguindo os passos.*

1. Sempre comece identificando claramente os pontos 1 e 2 mencionados na equação de Bernoulli.
2. Defina o seu sistema de coordenadas e, em especial, o nível em que $y = 0$.
3. Faça uma lista das grandezas conhecidas e desconhecidas na Equação (14.17). As variáveis são P_1, P_2, v_1, v_2, y_1 e y_2; as constantes são ρ e g. O que foi dado? O que você precisa calcular?

EXECUTAR *o problema* da seguinte forma: escreva a equação de Bernoulli e encontre as grandezas desconhecidas. Em alguns problemas você terá de usar a equação da continuidade (Equação (14.10)) para obter uma relação entre as duas velocidades em termos das áreas das seções retas dos tubos ou dos recipientes. Ou talvez você conheça as velocidades, mas precise encontrar uma das áreas. Você também pode precisar da Equação (14.11) para achar a vazão volumétrica.

AVALIAR *sua resposta:* Como sempre, confirme se os resultados fazem sentido. Verifique se as unidades são consistentes umas com as outras. Em unidades SI, a pressão é dada em pascal, a densidade em quilograma por metro cúbico e a velocidade em metro por segundo. Note também que todas as pressões devem ser expressas como pressões absolutas ou como pressões manométricas.

Exemplo 14.7

PRESSÃO DA ÁGUA EM UMA CASA A água entra em uma casa através de um tubo com diâmetro interno de 2,0 cm, com uma pressão absoluta igual a $4,0 \times 10^5$ Pa (cerca de 4 atm). Um tubo com diâmetro interno de 1,0 cm conduz ao banheiro do segundo andar a 5,0 m de altura (Figura 14.24). Sabendo que no tubo de entrada a velocidade é igual a 1,5 m/s, ache a velocidade do escoamento, a pressão e a vazão volumétrica no banheiro.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: estamos supondo que a água escoe a uma taxa constante. O tubo tem um diâmetro relativamente grande, então é razoável desprezar o atrito interno. A água é bastante incompressível, portanto a equação de Bernoulli pode ser aplicada com uma boa aproximação.

PREPARAR: os pontos 1 e 2 devem ser colocados no tubo de entrada e no banheiro, respectivamente. O problema fornece a

velocidade v_1 e a pressão P no tubo de entrada, e os diâmetros do tubo nos pontos 1 e 2 (por meio dos quais calculamos as áreas A_1 e A_2). Fazemos $y_1 = 0$ (na entrada) e $y_2 = 5{,}0$ m (no banheiro). As duas primeiras variáveis que precisamos encontrar são a velocidade v_2 e a pressão P_2. Como temos mais de uma incógnita, usamos tanto a equação de Bernoulli quanto a equação de continuidade para um fluido incompressível. Assim que encontrarmos v_2, podemos calcular a vazão volumétrica v_2A_2 no ponto 2.

EXECUTAR encontramos a velocidade v_2 no banheiro usando a equação da continuidade (Equação 14.10):

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi (\quad)^2}{\pi (\quad)^2} (1{,}5 \text{ m/s}) = 6{,}0 \text{ m/s}$$

Conhecemos P_1 e v_2 e podemos achar P_2 pela equação de Bernoulli:

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 - \rho g y_2 = 4{,}0 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$= -\frac{1}{2}(1{,}0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(36 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 2{,}25 \text{ m}^2/\text{s}^2)$$

$$-(1{,}0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)(5{,}0 \text{ m})$$

$$= 4{,}0 \times 10^5 \text{ Pa} - 0{,}17 \times 10^5 \text{ Pa} - 0{,}49 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$= 3{,}3 \times 10^5 \text{ Pa} = 3{,}3 \text{ atm}$$

A vazão volumétrica é

$$\frac{dV}{dt} = A_2 v_2 = \pi (0{,}50 \times 10^{-2} \text{ m})^2 (6{,}0 \text{ m/s})$$

$$= 4{,}7 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0{,}47 \text{ L/s}$$

AVALIAR esta é uma vazão volumétrica razoável para uma torneira de banheiro ou chuveiro. Note que, quando a torneira está fechada, tanto v_1 quanto v_2 são zero, o termo $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$ se anula e a pressão P_2 sobe para $3{,}5 \times 10^5$ Pa.

Figura 14.24 Qual é a pressão da água no banheiro do segundo andar desta casa?

Exemplo prático

VELOCIDADE DE EFLUXO A Figura 14.25 mostra um tanque de armazenamento de gasolina com uma seção reta de área A_1, cheio até uma altura h. O espaço entre a gasolina e a parte superior do recipiente está a uma pressão P_0, e a gasolina flui para fora através de um pequeno tubo de área A_2. Deduza expressões para a velocidade de escoamento no tubo e para a vazão volumétrica.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: podemos considerar o volume inteiro do líquido que flui como um único tubo de escoamento com atrito interno desprezível. Podemos, portanto, aplicar o princípio de Bernoulli.

PREPARAR os pontos 1 e 2 na Figura 14.25 estão na superfície da gasolina e no tubo de saída, respectivamente. No ponto 1, a pressão é P_0, e no ponto 2 é a pressão atmosférica, P_{atm}. Fazemos $y = 0$ no tubo de saída, de modo que $y_1 = h$ e $y_2 = 0$. Como A_1 é muito maior do que A_2, a superfície superior da gasolina escoará muito lentamente, e podemos encarar v_1 praticamente igual a zero. Encontramos a variável procurada, v_2, com a Equação (14.17) e a vazão volumétrica com a Equação (14.11).

EXECUTAR: aplicamos a equação de Bernoulli aos pontos 1 e 2:

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(0)$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\left(\frac{P_0 - P_{atm}}{\rho}\right) + 2gh$$

Usando $v_1 = 0$, obtemos

$$v_2^2 = 2\left(\frac{P_0 - P_{atm}}{\rho}\right) + 2gh$$

Conforme a Equação (14.11), a vazão volumétrica $dV/dt = v_2A_2$.

AVALIAR: a velocidade v_2, algumas vezes chamada de *velocidade de efluxo*, depende da altura do nível h do líquido no tanque e da diferença de pressão $(P_0 - P_{atm})$. Se o tanque estivesse aberto para a atmosfera em sua parte superior, não existiria excesso de pressão: $P_0 = P_{atm}$ e $P_0 - P_{atm} = 0$. Nesse caso,

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Ou seja, a velocidade de efluxo de uma abertura situada a uma distância h abaixo da superfície superior do líquido é a *mesma*

Figura 14.25 Esquema para calcular a velocidade de efluxo da gasolina que escoa pela parte inferior do tanque de armazenamento.

velocidade que teria um corpo caindo livremente de uma altura h. Esse resultado é conhecido como *teorema de Torricelli*. Ele vale também para uma abertura lateral na parede do recipiente situada uma distância h abaixo da superfície superior do líquido. Nesse caso, a vazão volumétrica é

$$\frac{dV}{dt} = A\sqrt{2gh}$$

EXEMPLO 14.9

O MEDIDOR DE VENTURI A Figura 14.26 mostra um *medidor de Venturi*, usado para medir a velocidade de escoamento em um tubo. A parte estreita do tubo denomina-se *garganta*. Deduza uma expressão para a velocidade de escoamento v_1 em termos das áreas das seções retas A_1 e A_2 e da diferença de altura h entre os níveis dos líquidos nos dois tubos verticais.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o escoamento é estacionário, e supomos que o fluido seja incompressível e que seu atrito interno seja desprezível. Podemos, portanto, aplicar a equação de Bernoulli.

PREPARAR: aplicamos a equação de Bernoulli à parte larga do tubo (ponto 1) e à parte estreita (ponto 2). A diferença de altura entre os dois tubos verticais nos dá a diferença de pressão entre os pontos 1 e 2.

EXECUTAR: os dois pontos estão na mesma coordenada vertical ($y_1 = y_2$), então aplicamos a Equação (14.17):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Pela equação da continuidade, $v_2 = (A_1/A_2)v_1$. Substituindo esse valor na equação e reagrupando, obtemos

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$$

Conforme o que vimos na Seção 14.2, a diferença de pressão $p_1 - p_2$ é também igual a $\rho g h$, onde h é a diferença de altura entre os níveis dos líquidos nos dois tubos. Combinando esse resultado com a equação anterior e explicitando v_1, obtemos

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}}$$

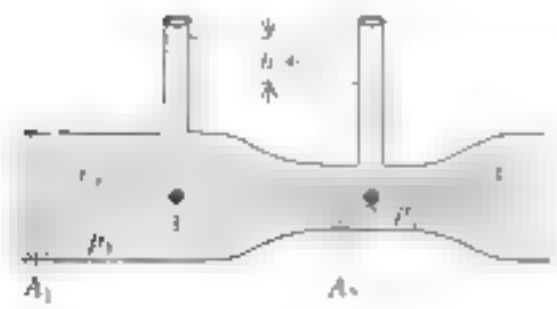


Figura 14.26 O medidor de Venturi.

AVALIAR: como A_1 é maior do que A_2, v_2 é maior do que v_1, e a pressão P_2 na garganta é *menor* do que P_1. Uma força resultante orientada da esquerda para a direita acelera o fluido quando ele entra na garganta, e uma força resultante orientada da direita para a esquerda freia o fluido depois que ele sai.

EXEMPLO CONCEITUAL 14.10

SUSTENTAÇÃO SOBRE A ASA DE UM AVIÃO A Figura 14.27a mostra as linhas de escoamento em torno da seção reta da asa de um avião. As linhas de escoamento se concentram acima da asa, indicando um aumento da velocidade de escoamento e correspondendo a uma pressão mais baixa nessa região, tal como no caso da garganta do medidor de Venturi. A força de baixo para cima na asa do avião é maior do que a força de cima para baixo; a força resultante de baixo para cima é chamada de *força de sustentação*. A sustentação não é simplesmente devida ao impulso do ar que incide sobre a parte de baixo da asa; na realidade, verifica-se que a redução da pressão sobre a superfície superior da asa dá a maior contribuição para a sustentação. (Essa discussão altamente simplificada despreza a formação de redemoinhos, uma discussão mais completa deveria levar isso em consideração.)

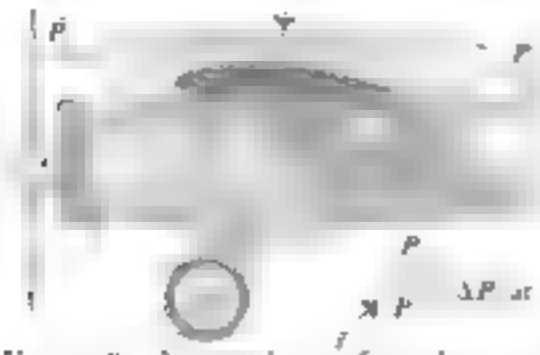
Podemos também entender a força de sustentação com base nas variações do momento linear. A Figura 14.27a mostra que existe uma variação do momento linear vertical resultante *de cima para baixo* produzida pelo escoamento do ar que passa em torno da asa, correspondendo à força de cima para baixo que a asa exerce sobre o ar. A força de reação *sobre* a asa é orientada de *baixo para cima*, conforme concluímos anteriormente.

Um padrão de escoamento e uma força de sustentação semelhantes são encontrados nas vizinhanças de qualquer objeto curvo ao vento. Com um vento suficientemente forte, a força de sustentação na parte superior de um guarda-chuva pode virá-lo para cima. Uma força de sustentação também age sobre um carro em alta velocidade, devido ao ar que se move sobre a superfície curva do topo do carro. Tal força de sustentação pode reduzir a tração dos pneus do carro, razão pela qual muitos carros são equipados com um *spoiler* aerodinâmico na traseira. O *spoiler* tem a forma de uma asa virada para baixo e aplica uma força para baixo sobre as rodas traseiras.

ATENÇÃO Um equívoco a respeito das asas Explicações simplificadas muitas vezes afirmam que o ar se desloca mais rápido sobre a parte de cima de uma asa porque "tem mais espaço a percorrer". Essa explicação supõe que duas moléculas de ar adjacentes que se separam no bordo de ataque (parte da frente) da asa, uma se dirigindo à superfície superior e a outra à superfície inferior, devem encontrar-se novamente no bordo de fuga (parte de trás) da asa. Isso não é correto! A Figura 14.27b mostra uma simulação de computador do escoamento de parcelas de ar em torno de uma asa de avião. As faixas adjacentes no bordo de ataque da asa *não* se encontram no bordo de fuga porque o escoamento sobre a parte de cima da asa é, na verdade, mais rápido do que na parte de baixo. Conforme a equação de Bernoulli, essa velocidade maior implica uma pressão menor sobre a asa (e, portanto, uma maior força de sustentação).

(a) Linhas de escoamento em torno da asa de um avião.

As linhas de escoamento do ar que se move sobre a parte de cima da asa se aglomeram, portanto a velocidade do escoamento é maior e a pressão, em consequência, é menor



Uma explicação equivalente à forma da asa cria um momento linear total de cima para baixo sobre o ar, então a força de reação sobre o avião é para cima

(b) Simulação do computador do escoamento do ar ao redor da asa de um avião

Imagem de parcelas de ar escoando ao redor de uma asa, o que mostra que o ar se move mais depressa na parte superior do que na parte inferior e que as parcelas de ar que estão juntas no bordo de ataque da asa não se encontram no bordo de fuga

Figura 14.27 (a) Linhas de escoamento em torno da asa de um avião. O momento linear de uma parcela de ar (em relação à asa) é $\vec{p}$ antes de encontrar a asa, e $\vec{p}'$, depois de sair da asa. (b) Simulação de computador de linhas de ar escoando ao redor de uma asa.

Teste sua compreensão da Seção 14.5 Qual é a afirmação mais correta a respeito do princípio de Bernoulli? (i) O ar que se move mais depressa provoca uma pressão mais baixa; (ii) a pressão mais baixa faz com que o ar se mova mais rápido; (iii) as afirmativas (i) e (ii) são igualmente corretas. ■

*14.6 Viscosidade e turbulência

Ao estudarmos o escoamento de fluidos, supusemos que o fluido não apresentasse atrito interno e que o escoamento fosse laminar. Embora essas suposições sejam válidas em muitas situações, em várias situações físicas importantes os efeitos da viscosidade (atrito interno) e turbulência (escoamento não laminar) são fundamentais. Vamos estudar brevemente algumas dessas situações.

Viscosidade

A **viscosidade** é o atrito interno em um fluido. As forças da viscosidade se opõem ao movimento de uma parte do fluido em relação à outra. A viscosidade é a razão pela qual você realiza um esforço para remar em uma canoa se deslocando em águas calmas, mas é também a razão pela qual você consegue remar. Os efeitos da viscosidade são importantes para o escoamento através de tubos, para o fluxo do sangue, para a lubrificação de diversas partes das máquinas e muitas outras situações.

Fluidos que escoam facilmente, como a água ou a gasolina, possuem menos viscosidade do que líquidos "espessos" como o mel ou o óleo de motor. As viscosidades de todos os fluidos dependem muito da temperatura; à medida que a temperatura aumenta, a viscosidade aumenta nos gases e diminui nos líquidos (Figura 14.28). Um objetivo fundamental no projeto de óleos para a lubrificação de máquinas é *reduzir* a variação de temperatura da viscosidade tanto quanto possível.

Um fluido viscoso tende a aderir a uma superfície sólida em contato com ele. Existe uma camada fina chamada de *camada limite* do fluido nas proximidades da superfície, ao longo da qual o fluido está praticamente em repouso em relação à superfície sólida. É por essa razão que partículas de poeira aderem às lâminas de um ventilador, mesmo quando ele gira rapidamente, e é também por isso que você não consegue eliminar toda a sujeira do carro simplesmente jogando água sobre ele com uma mangueira.

A viscosidade tem efeitos importantes sobre o escoamento de líquidos através de tubos, inclusive para o fluxo do sangue no sistema circulatório. Pense em um fluido com viscosidade zero de modo a poder aplicar a equação de Bernoulli, a Equação (14.17). Se as duas extremidades de um longo tubo cilíndrico estão à mesma altura ($y_1 = y_2$) e a velocidade do escoamento é a mesma em ambas as extremidades ($v_1 = v_2$), então a equação de Bernoulli nos diz que a pressão é a mesma em ambas as extremidades. Entretanto, esse resultado simplesmente não é verdadeiro se levarmos em conta a viscosidade. Para ver por que, considere a Figura 14.29, que mostra o perfil das velocidades no escoamento laminar de um fluido viscoso em um longo tubo cilíndrico. Devido à viscosidade, a velocidade é *zero* nas paredes do tubo (às quais o fluido adere) e máxima no centro do tubo. O escoamento é como uma série de tubos concêntricos escorregando em relação um ao outro, com o tubo central movendo-se mais rapidamente e o tubo mais externo em repouso. As forças de viscosidade entre os tubos se opõem a esse escorregamento; para manter o fluxo, devemos aplicar uma pressão mais forte na parte de trás do que na parte da frente. É por isso que você aperta um tubo de pasta de dentes ou uma embalagem de ketchup (ambos fluidos viscosos) para fazer o fluido sair de seu recipiente. Seus dedos imprimem uma pressão à parte de trás que é bem maior do que a pressão atmosférica na parte da frente do escoamento.

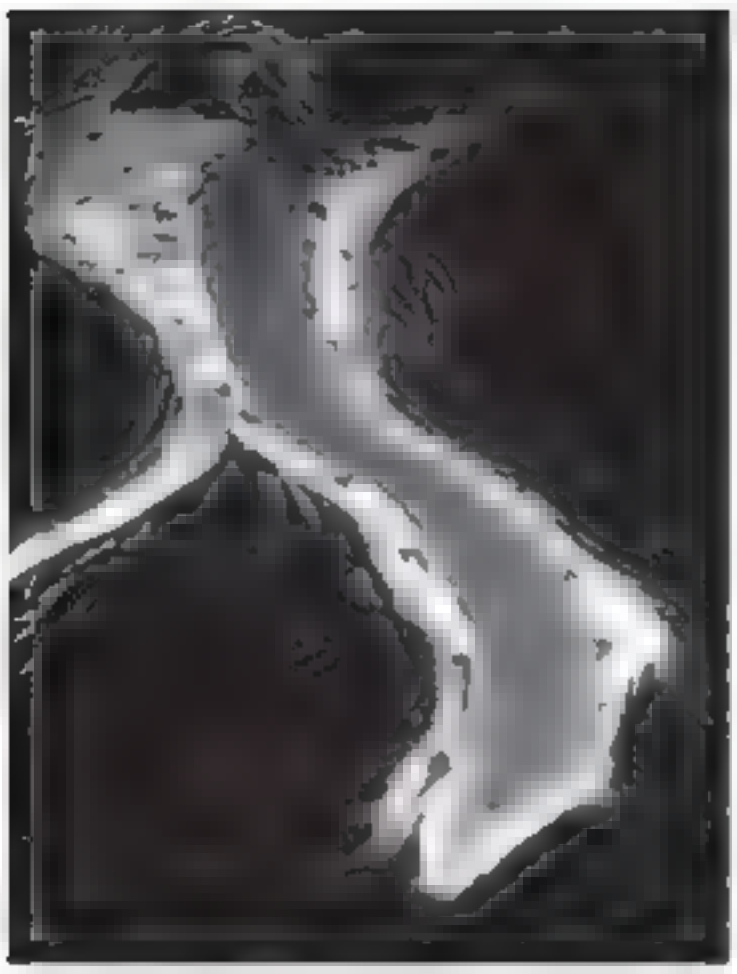


Figura 14.28 A lava é um exemplo de escoamento de um fluido com viscosidade. A viscosidade diminui com o aumento da temperatura e [illegible]

Figura 14.29 Perfil de velocidades no escoamento de um fluido viscoso [illegible]

A diferença de pressão necessária para manter uma dada vazão volumétrica em um tubo cilíndrico de comprimento L e raio R é proporcional a L/R^4. Se reduzirmos R à metade, a pressão necessária aumenta em $2^4 = 16$. Se diminuirmos R de um fator de 0,90 (uma redução de 10%), aumentamos a diferença de pressão de um fator de $(1/0,90)^4 \approx 1,52$ (um aumento de 52%). Essa relação simples explica a relação entre uma dieta com elevado teor de colesterol (que tende a estreitar as artérias) e a alta pressão sanguínea. Devido à dependência de R^4, mesmo um pequeno estreitamento nas artérias pode levar a uma elevação substancial na pressão sanguínea e aumentar a tensão sobre o músculo cardíaco.

Turbulência

Quando a velocidade do escoamento de um fluido supera um certo valor crítico, o escoamento deixa de ser laminar. A configuração do escoamento torna-se extremamente irregular e complexa, variando continuamente com o tempo; não existe nenhuma configuração com escoamento estacionário. Esse escoamento irregular e caótico denomina-se **turbulência**. A Figura 14.21 mostra o contraste entre um escoamento laminar e um escoamento turbulento quando a fumaça sobe no ar. A equação de Bernoulli *não* pode ser aplicada em regiões onde existe turbulência, porque o escoamento não é estacionário.

O fato de um escoamento ser laminar ou turbulento depende em parte da viscosidade do fluido. Quanto maior a viscosidade, maior a tendência que o fluido possui para escoar em lâminas; é mais provável que o escoamento seja laminar. (Quando discutimos a equação de Bernoulli na Seção 14.5, supusemos que o escoamento fosse laminar e que o fluido tivesse viscosidade zero. Na verdade, um *pouco* de viscosidade é necessário para assegurar que o escoamento seja laminar.)

Em um fluido de uma dada viscosidade, a velocidade do escoamento é um fator determinante no estabelecimento da turbulência. Uma configuração de escoamento que é estável em velocidades baixas pode tornar-se, subitamente, instável quando a velocidade supera certo valor crítico. As irregularidades no escoamento podem ser produzidas por rugosidades no interior da parede do tubo, variações na densidade do fluido e muitos outros fatores. Em velocidades pequenas, essas perturbações são amortecidas — a configuração do escoamento é *estável* e tende a manter sua natureza laminar (Figura 14.30a). Porém, quando a velocidade crítica é atingida, a configuração do escoamento torna-se instável. As perturbações não são mais amortecidas e crescem até que toda a configuração laminar seja destruída (Figura 14.30b).

Figura 14.30 O escoamento de água de uma torneira é (a) laminar em velocidades baixas, mas (b) turbulento em velocidades suficientemente altas.

O escoamento do sangue na aorta humana é laminar, porém pequenas perturbações patológicas podem fazer o escoamento se tornar turbulento. A turbulência produz ruído, e é por isso que escutar o escoamento do sangue com um estetoscópio é uma técnica de diagnóstico bastante útil.

Exemplo 14.11

A BOLA CURVA A trajetória de uma bola curva é *realmente* curva? A resposta é sim, e a curva é produzida pela turbulência. A Figura 14.31a mostra uma bola que se move através do ar da esquerda para a direita. Para um observador que se move junto com o centro da bola, a corrente de ar parece se mover da direita para a esquerda, como mostrado pelas linhas de escoamento na figura. Em virtude das elevadas velocidades normalmente envolvidas (cerca de 160 km/h), existe uma região de *escoamento turbulento* atrás da bola.

A Figura 14.31b mostra uma bola *girando* com *spin* para cima. Camadas de ar nas proximidades da superfície da bola são puxadas no sentido do *spin* devido ao atrito entre o ar e a bola e por causa do atrito interno do ar (viscosidade). A velocidade do ar em relação à superfície da bola torna-se menor no topo da bola do que na base, e ocorre mais turbulência na parte superior da bola do que na parte inferior. A força resultante *faz* a bola se desviar para baixo, conforme indicado na Figura 14.31c. Essa é a razão pela qual o *top spin*, ou *spin* para cima, é usado no tênis em saques velozes para manter a bola dentro do campo (Figura 14.31d). No lançamento de uma bola curva no beisebol, a bola gira em torno de um eixo aproximadamente vertical e a curva real obtida é lateral. Nesse caso, a Figura 14.31e mostra uma vista de *cima* da situação. Uma bola curva lançada por um arremessador que usa a mão esquerda sofre um desvio *na direção de* um rebatedor que usa a mão direita, dificultando a rebatida (Figura 14.31e).

Um efeito semelhante ocorre com uma bola de golfe, que sempre possui "*spin* para trás" devido ao impacto da face inclinada do taco de golfe. A diferença de pressão resultante entre a parte superior e a parte inferior da bola produz uma força de sustentação que permite mantê-la suspensa no ar durante um tempo maior do que se não houvesse o *spin*. Quando uma tacada é bem dada, a bola de golfe parece "flutuar" acima do local de onde partiu ou, até mesmo, desviar-se *para cima* durante a porção inicial da trajetória. Trata-se de um efeito real e não de uma ilusão. As pequenas reentrâncias da bola desempenham um papel essencial: para uma mesma velocidade inicial e uma mesma rotação, a viscosidade do ar produz uma trajetória mais curta em uma bola sem reentrâncias do que no caso de uma bola com reentrâncias. A Figura 14.31f mostra o "*spin* para trás" adquirido pela bola de golfe logo após o impacto com o taco.

Teste sua compreensão da Seção 14.6 Que pressão adicional uma enfermeira deve aplicar com o polegar para dar uma injeção com uma agulha hipodérmica de diâmetro interno igual a 0,80 mm em comparação com a pressão necessária para aplicar uma injeção com uma agulha de diâmetro interno igual a 0,60 mm? Suponha que as duas agulhas tenham o mesmo comprimento e que a vazão volumétrica seja a mesma em ambos os casos. (i) O dobro; (ii) 4 vezes, (iii) 8 vezes, (iv) 16 vezes, (v) 32 vezes. ❙

Resumo

Densidade e pressão: a densidade é a massa por unidade de volume. Se a massa m de um corpo homogêneo possui volume V, sua densidade de ρ é a razão m/V. A densidade relativa é a razão entre a densidade de um material e a densidade da água. (Veja o Exemplo 14.1.)

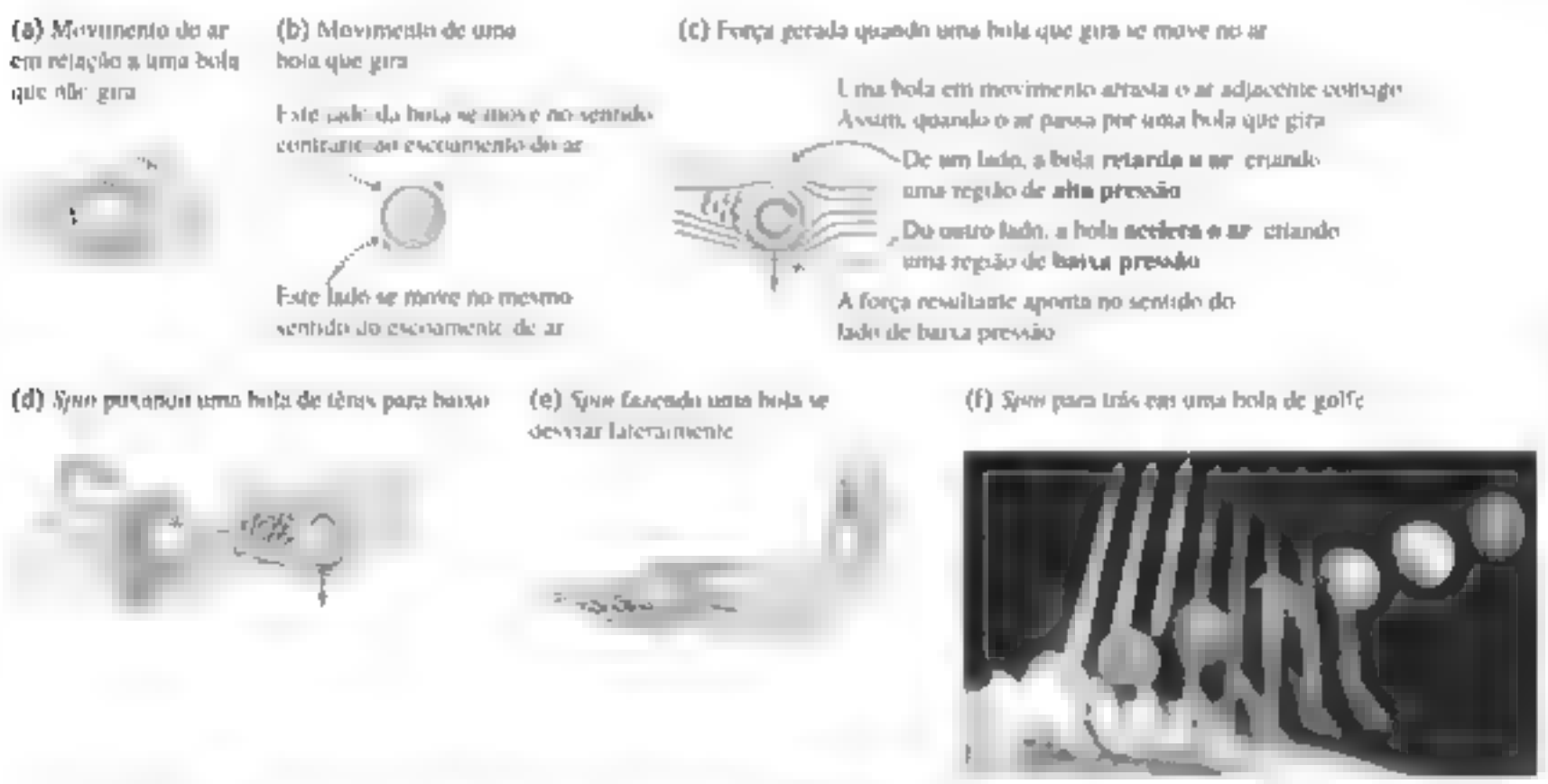

(a) Movimento do ar em relação a uma bola que não gira
(b) Movimento de uma bola que gira
Este lado da bola se move no sentido contrário ao escoamento do ar
Este lado se move no mesmo sentido do escoamento do ar
(c) Força gerada quando uma bola que gira se move no ar
Uma bola em movimento atrasta o ar adjacente consigo. Assim, quando o ar passa por uma bola que gira
De um lado, a bola retarda o ar criando uma região de alta pressão
Do outro lado, a bola acelera o ar criando uma região de baixa pressão
A força resultante aponta no sentido do lado de baixa pressão
(d) Spin para cima em uma bola de tênis para baixo
(e) Spin fazendo uma bola se desviar lateralmente
(f) Spin para trás em uma bola de golfe

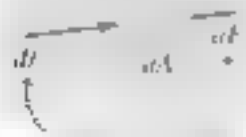
Figura 14.31 (a) Analisando o movimento de uma bola que gira. (b) Uma bola de golfe sendo arremessada por um jato. A fotografia foi feita com 300 flashes por segundo. A bola de golfe, girando em torno de um eixo horizontal, tem uma velocidade angular de 25 rev/s ou 7.500 rpm.

Pressão é a força normal por unidade de área. A lei de Pascal afirma que a pressão aplicada sobre a superfície de um fluido fechado é transmitida sem diminuição a todos os pontos do fluido. A pressão absoluta é a pressão total em um fluido; a pressão manométrica é a diferença entre a pressão absoluta e a pressão atmosférica. A unidade SI de pressão é o pascal (Pa): 1 Pa = 1 N/m². (Veja o Exemplo 14.2.)

$$p = \frac{dF_n}{dA} \qquad (14.1)$$

$$P = \frac{dF}{dA} \qquad (14.2)$$

Pequena área dA no interior de fluido em repouso

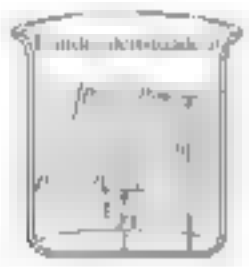


Forças normais exercidas sobre ambos os lados pelo fluido circundante

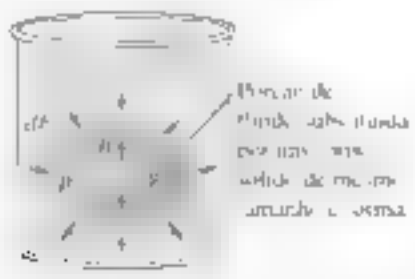
Pressões em um fluido em repouso. A diferença de pressão entre os pontos 1 e 2 em um fluido em repouso de densidade ρ uniforme (um fluido incompressível) é proporcional à diferença entre as alturas y_1 e y_2. Se a pressão na superfície de um fluido incompressível em repouso é P_0, a pressão em uma profundidade h é dada pela soma entre a pressão de superfície mais ρgh. (Veja os exemplos 14.3 e 14.4.)

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$
(pressão em um fluido de densidade uniforme) (14.5)

$$P = P_0 + \rho gh$$
(pressão em um fluido de densidade uniforme) (14.6)



Empuxo. O princípio de Arquimedes afirma que, quando um corpo está imerso em um fluido, ele exerce sobre o corpo uma força de empuxo de baixo para cima igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo. (Veja o Exemplo 14.5.)



Escoamento de fluidos. Um fluido ideal é incompressível e não possui viscosidade (atrito interno). Uma linha de escoamento é a trajetória de uma partícula do fluido; uma linha de corrente é uma curva cuja tangente em cada ponto dá a direção e o sentido do vetor velocidade. Um tubo de escoamento é delimitado em sua superfície externa por linhas de escoamento. No escoamento laminar as camadas do fluido deslizam suavemente umas sobre as outras. No escoamento turbulento existe uma grande desordem e a configuração do escoamento muda constantemente.

A conservação da massa de um fluido incompressível é expressa pela equação da continuidade, que relaciona as velocidades de escoamento v_1 e v_2 para duas seções retas A_1 e A_2 ao longo de um tubo de escoamento. O produto Av é a *vazão volumétrica*, dV/dt, a taxa com a qual o volume atravessa uma seção reta do tubo. (Ver Exemplo 14.6.)

A equação de Bernoulli relaciona a pressão P com a velocidade v e a altura y para quaisquer dois pontos, supondo o escoamento estacionário de um fluido ideal. (Veja os exemplos 14.7-14.10.)

$$A_1v_1 = A_2v_2$$
(equação da continuidade, fluido incompressível) (14.10)

$$\frac{dV}{dt} = Av \text{ (vazão volumétrica)} \qquad (14.11)$$

$$p_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
(equação de Bernoulli) (14.17)

Principais termos

barômetro de mercúrio, 78
densidade, 72
densidade média, 73
densidade relativa, 73
dinâmica dos fluidos, 72
empuxo, 79
escoamento estacionário, 82
escoamento laminar, 82
escoamento turbulento, 82
estática dos fluidos, 72
equação da continuidade, 82
equação de Bernoulli, 85
fluido ideal, 82
força de empuxo, 79
lei de Pascal, 76
linha de corrente, 82
linha de escoamento, 82
pascal, 74
pressão, 74
pressão absoluta, 77
pressão atmosférica, 74
pressão manométrica, 77

princípio de Arquimedes, 79
tensão superficial, 81
tubo de escoamento, 82
turbulência, 89
viscosidade, 82

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Tanto o corpo do tubarão quanto o do peixe tropical são mais densos do que a água do mar; portanto, se dependessem apenas desse fator, ambos afundariam. Entretanto, o peixe tropical possui uma cavidade cheia de gás no corpo chamada bexiga natatória, de forma que a densidade *média* do corpo do peixe é a mesma que a da água do mar e o peixe nem afunda nem emerge. Os tubarões não possuem bexiga natatória. Assim, eles precisam nadar constantemente para não afundar, usando suas barbatanas peitorais para obter a força de sustentação, de modo bastante semelhante ao funcionamento das asas de um avião (veja a Seção 14.5).

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

14.1 **Resposta: (ii), (iv), (i) e (iii) (empate), (v).** Em todos os casos a densidade média é igual à massa dividida pelo volume. Logo, temos
(i) $\rho = (4{,}0\ \text{kg}) / (1{,}60 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 2{,}50 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$
(ii) $\rho = (8{,}0\ \text{kg}) / (1{,}60 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 5{,}0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$;
(iii) $\rho = (8{,}0\ \text{kg}) / (3{,}20 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 2{,}50 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$;
(iv) $\rho = (256{,}0\ \text{kg}) / (0{,}640\ \text{m}^3) = 2{,}50 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$;
(v) $\rho = (256{,}0\ \text{kg}) / (1{,}28\ \text{m}^3) = 2{,}0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. Note que, em comparação com o objeto (i), o objeto (ii) possui o dobro da massa, porém o mesmo volume e, assim, tem o dobro da densidade média. O objeto (iii) possui o dobro da massa e o dobro do volume do objeto (i); logo, (i) e (iii) apresentam a mesma densidade média. Finalmente, o objeto (v) tem a mesma massa que o objeto (iv), porém, o dobro do volume, então (v) possui a metade da densidade média de (iv).

14.2 **Resposta: (ii).** Pela Equação (14.9), a pressão fora do barômetro é igual ao produto ρgh. Quando o barômetro é retirado do refrigerador a densidade ρ diminui, enquanto a altura h da coluna de mercúrio permanece igual. Assim, a pressão do ar deve ser mais baixa fora do que dentro do refrigerador.

14.3 **Resposta: (i).** Considere a água, a estátua e o recipiente um sistema, o peso total do sistema não depende do fato de a estátua estar submersa ou não. A força de reação total, inclusive a tensão T e a força F de baixo para cima que a balança exerce sobre o recipiente (igual à leitura da balança), é a mesma em ambos os casos. Entretanto, como vimos no Exemplo 14.5, T diminui em 7,84 N quando a estátua é submersa, então a leitura da balança F precisa *aumentar* em 7,84 N. Um ponto de vista alternativo é o de que a água exerce uma força de empuxo de baixo para cima igual a 7,84 N sobre a estátua; logo, a estátua precisa exercer uma força igual de cima para baixo sobre a água, tornando a leitura da balança 7,84 N maior do que o peso da água e do recipiente.

14.4 **Resposta: (ii).** Uma estrada que se estreita de três pistas para uma é como um tubo cuja área da seção reta diminui para um terço de seu valor. Se os carros se comportassem como as moléculas de um fluido incompressível, à medida que os carros alongassem o trecho de uma pista, o espaçamento entre os carros (a "densidade") permaneceria o mesmo, porém, a velocidade dos carros triplicaria. Isso mantém a "vazão volumétrica" (número de carros por segundo passando por um ponto na estrada) constante. Na vida real, os carros se comportam como moléculas de um fluido *compressível*: acabam se aglomerando (a "densidade" aumenta), e menos carros por segundo passam por um ponto na estrada (a "vazão volumétrica" diminui).

14.5 **Resposta: (ii).** A segunda lei de Newton afirma que um corpo acelera (sua velocidade varia) em reação a uma força resultante. No escoamento de fluidos, a diferença de pressão entre dois pontos significa que as partículas do fluido que se movem entre esses dois pontos são submetidas a uma força que faz com que as partículas do fluido acelerem e tenham velocidade variável.

14.6 **Resposta: (iv).** A pressão necessária é proporcional a $1/R^4$ onde R é o raio interno da agulha (metade do diâmetro interno). Com a agulha de diâmetro menor, a pressão aumenta de um fator $[(0{,}60\ \text{mm}) / (0{,}30\ \text{mm})]^4 = 2^4 = 16$.

Questões para discussão

Q14.1 Um cubo de carvalho de faces lisas normalmente flutua na água. Suponha que você o submergisse completamente e pressionasse uma das faces contra o fundo do tanque de modo que não houvesse água sob essa face. O bloco subiria à superfície e flutuaria? Há uma força de empuxo atuando sobre ele? Explique.

Q14.2 Uma mangueira de borracha é ligada a um funil, e a extremidade livre é encurvada para apontar para cima. Derramando-se água no funil, ela sobe na mangueira até um nível igual ao nível da água no funil, embora o volume da água do funil seja maior do que o volume da água na mangueira. Por quê? O que sustenta o peso adicional da água no funil?

Q14.3 Comparando os exemplos 14.1 (Seção 14.1) e 14.2 (Seção 14.2), parece que um peso de 700 N de ar exerce uma força para baixo igual a $2{,}0 \times 10^6$ N sobre o piso. Como isso é possível?

Q14.4 A Equação (14.7) mostra que uma razão de 100 para 1 pode fornecer uma força na saída 100 vezes maior do que a força na entrada. Isso viola a conservação da energia? Explique.

Q14.5 Você deve ter notado que, quanto menor for a pressão de um pneu, maior será a área de contato entre o pneu e o pavimento. Por quê?

Q14.6 No balonismo, enche-se um balão grande com ar aquecido por um combustor de gás situado na parte inferior do balão. Por que o ar deve ser aquecido? Como o balonista controla a ascensão e a descida do balão?

Q14.7 Para descrever o tamanho de um grande navio é costume usar-se expressões do tipo "ele desloca 20000 toneladas". O que isso significa? O peso do navio pode ser calculado por essa informação?

Q14.8 Você coloca uma esfera maciça de alumínio dentro de um balde com água em repouso sobre o solo. A força de empuxo é igual ao peso da água deslocada; este é menor do que o peso da esfera, logo a esfera afunda até a base do balde. Se você transporta o balde até um elevador que sobe verticalmente com aceleração constante, o peso aparente da água aumenta e a força de empuxo aumenta também. Caso a aceleração do elevador seja suficientemente elevada, a esfera pode saltar para fora da água? Explique.

Q14.9 Um dirigível resistente, mas leve do que o ar e cheio de hélio não pode continuar subindo indefinidamente. Por quê? Qual é o fator que determina a altura máxima que ele pode atingir?

Q14.10 A pressão do ar diminui com o aumento da altura. Então por que o ar da superfície terrestre não é continuamente empurrado pela diferença de pressão para as camadas mais elevadas, de baixa pressão?

Q14.11 A pureza do ouro pode ser testada medindo-se seu peso no ar e na água. Como? Você acha que conseguiria enganar as pessoas fabricando uma falsa barra de ouro recobrindo de ouro um material mais barato?

Q14.12 Durante a grande inundação do Mississipi em 1993, os diques em St. Louis tendiam a se romper primeiro na base. Por quê?

Q14.13 Um navio cargueiro está viajando no Oceano Atlântico (água salgada) e entra pelo Rio St. Lawrence no Lago Ontário (água doce). No Lago Ontário, o navio flutua a um nível diversos centímetros mais baixo do que o nível da flutuação no oceano. Por quê?

Q14.14 Você empurra um pedaço de madeira para dentro de uma piscina. Depois que ele submergiu completamente, você continua empurrando-o mais para o fundo. Enquanto faz isso, o que acontecerá com a força do empuxo sobre o objeto? Ela continuará aumentando, ficará igual ou diminuirá? Por quê?

Q14.15 Uma velha pergunta é: "O que pesa mais, um quilo de pena ou um quilo de chumbo?" Como o peso resulta da força gravitacional, suponha que você coloque um quilograma de penas em um prato de uma balança de braços iguais e coloque no outro prato um quilograma de chumbo. A balança ficará equilibrada? Explique, levando em conta a força de empuxo.

Q14.16 Suponha que a porta de uma sala esteja ajustada ao marco sem atrito, impedindo a passagem do ar. Se a pressão de um lado da porta for igual a uma atmosfera-padrão e a pressão do outro lado for 1% maior do que a atmosfera-padrão, ela se abrirá? Explique.

Q14.17 A uma certa profundidade em um líquido incompressível, a pressão absoluta é P. A uma profundidade duas vezes maior, a pressão absoluta será igual a $2P$, maior ou menor do que $2P$? Justifique sua resposta.

Q14.18 Um pedaço de ferro está colado sobre um bloco de madeira. Quando esse bloco, juntamente com o ferro em seu topo, é colocado em um balde cheio de água, o bloco flutua. A seguir o bloco é invertido de modo que o ferro fique submerso, embaixo da madeira. O bloco flutuará ou afundará? O nível da água do balde permanecerá o mesmo, aumentará ou diminuirá? Explique suas respostas.

Q14.19 Em um tanque de água, você mergulha um pote de vidro vazio com o bocal voltado para baixo, de modo que o ar fique preso e não possa escapar. Se você empurrar o pote para o fundo do tanque, a força de empuxo sobre o pote permanecerá constante? Caso não permaneça, aumentará ou diminuirá? Explique suas respostas.

Q14.20 Você está flutuando em uma canoa no meio de uma piscina. Seu amigo está à beira da piscina, verificando o nível de água ao lado da piscina. Você tem uma bola de boliche dentro da canoa. Se você soltar suavemente a bola de boliche ao lado da canoa e ela afundar até o chão da piscina, o nível da água na piscina aumenta ou diminui?

Q14.21 Você está flutuando em uma canoa no meio de uma piscina. Um grande pássaro alça vôo e pousa no seu ombro. O nível da água da piscina aumenta ou diminui?

Q14.22 A uma certa profundidade no oceano incompressível, a pressão manométrica é P_g. A uma profundidade três vezes maior, a pressão manométrica será maior do que $3P_g$, igual ou inferior a $3P_g$? Justifique sua resposta.

Q14.23 Um cubo de gelo flutua em um copo com água. Quando o gelo se liquefaz, o nível da água no copo permanece o mesmo, aumenta ou diminui? Explique suas respostas.

Q14.24 Disseram a você que "A equação de Bernoulli afirma que quando a velocidade do fluido é elevada, a pressão é baixa e vice-versa". Essa afirmação é sempre verdadeira? Explique.

Q14.25 Se a velocidade em cada ponto do espaço de um escoamento estacionário é constante, como uma partícula pode acelerar?

Q14.26 Na vitrine de uma loja, uma bola de tênis de mesa flutua no ar empurrada por um jato de ar proveniente da saída do cano de um aspirador de pó. A bola oscila um pouco, porém sempre permanece próxima do centro do jato, mesmo quando o jato está ligeiramente inclinado. Como esse comportamento ilustra a equação de Bernoulli?

Q14.27 Um tornado é um redemoinho de ar muito veloz. Por que a pressão no centro é sempre muito menor do que a pressão na periferia? Como essa condição é responsável pelo poder de destruição de um tornado?

Q14.28 O comprimento das pistas de pouso e decolagem de aeroportos situados em altitudes elevadas é maior do que o comprimento das pistas de aeroportos situados ao nível do mar. Uma razão para isso é que o motor do avião desenvolve menor potência no ar rarefeito em altitudes elevadas. Qual é a outra razão?

Q14.29 Quando uma corrente de água sai suavemente de uma torneira, a sua largura diminui à medida que a corrente cai. Explique por que isso acontece.

Q14.30 Cubos de chumbo e alumínio de tamanho idêntico são suspensos em diferentes profundidades por dois fios em um grande tanque de água (Figura 14.32). (a) Qual dos cubos é submetido a uma maior força de empuxo? (b) Em qual dos cubos a tensão do fio é maior? (c) Qual dos cubos é submetido a uma força maior em sua face inferior? (d) Em qual dos cubos a diferença de pressão entre as faces superior e inferior é maior?

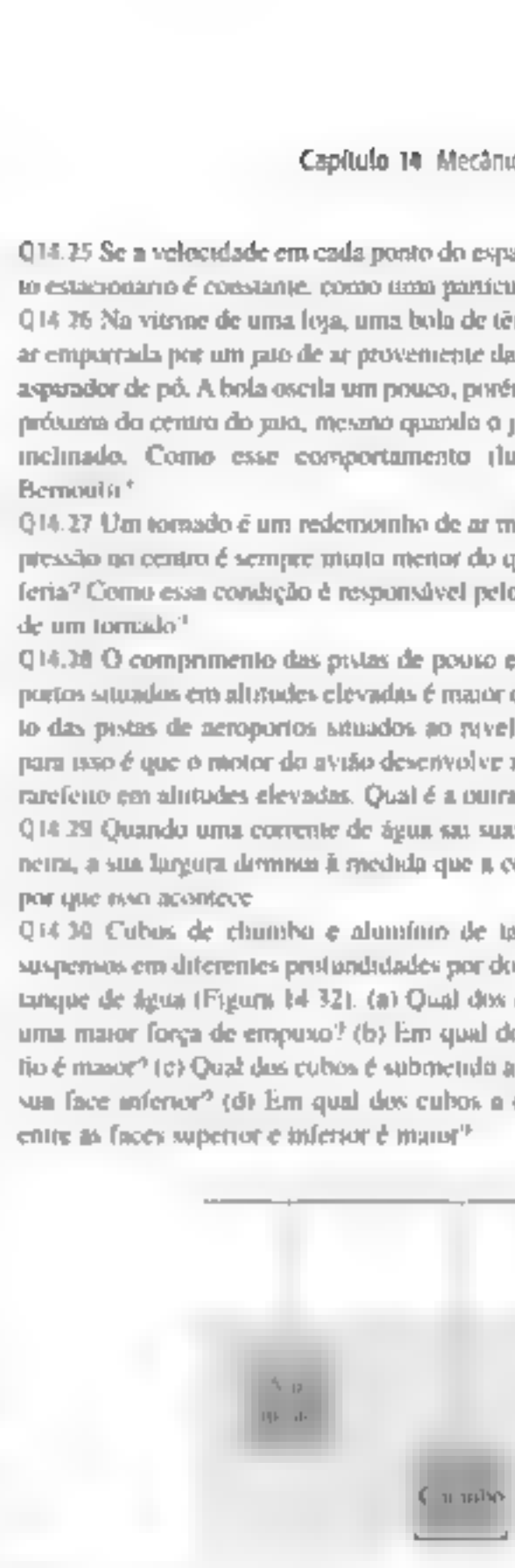


Figura 14.32 Questão Q14.30

Exercícios

Seção 14.1 Densidade

14.1 Fazendo um extra, você foi solicitado a transportar uma barra de ferro de 85,80 cm de comprimento e 2,85 cm de diâmetro de um depósito até um mecânico. Você precisará usar um carrinho de mão? (Para responder, calcule o peso da barra.)

14.2 **Milhas por quilograma.** A densidade da gasolina é 737 kg/m³. Se o seu novo carro híbrido faz 45,0 milhas por galão de gasolina, quantas milhas ele percorrerá por quilograma de gasolina? (Veja o Apêndice E.)

14.3 Você compra uma peça retangular de metal com massa igual a 0,0158 kg e dimensões de 5,0 × 15,0 × 30,0 mm. O vendedor diz que o metal é ouro. Para verificar se é verdade, você deve calcular a densidade média da peça. Qual o valor obtido? Você foi enganado?

14.4 **Barra de ouro.** Você ganha na loteria e decide impressionar seus amigos exibindo um cubo de ouro de um milhão de dólares. O ouro está sendo vendido a $ 426,60 por onça troy, e uma onça

troy equivale a 31,1035 g. Qual seria a altura do seu cubo de um milhão de dólares?

14.5 Duas esferas uniformes, uma de chumbo e outra de alumínio, possuem a mesma massa. Qual é a razão entre o raio da esfera de alumínio e o raio da esfera de chumbo?

14.6 (a) Qual é a densidade média do Sol? (b) Qual é a densidade média de uma estrela de nêutron que possui a mesma massa que o Sol, mas um raio de apenas 20,0 km?

14.7 Um tubo cilíndrico de cobre vazio mede 1,50 m de comprimento e tem um diâmetro externo de 3,50 cm e um diâmetro interno de 2,50 cm. Quanto pesa esse tubo?

Seção 14.2 Pressão em um fluido

14.8 **Chaminés negras.** Chaminés negras são jatos vulcânicos quentes que emitem fumaça no fundo do oceano. Muitas dessas chaminés negras estão repletas de animais exóticos, e alguns biólogos acreditam que a vida na Terra tenha começado ao redor delas. Os jatos variam em profundidade de cerca de 1500 m a 3200 m abaixo da superfície. Qual é a pressão manométrica em um jato a 3200 m de profundidade, supondo que a densidade da água não varie? Dê a sua resposta em pascals e atmosferas.

14.9 **Oceanos em Marte.** Os cientistas encontraram indícios de que Marte pode ter tido outrora um oceano com 0,500 km de profundidade. A aceleração da gravidade em Marte é 3,71 m/s^2. (a) Qual seria a pressão manométrica no fundo desse oceano, supondo que ele fosse de água doce? (b) A que profundidade você precisaria descer nos oceanos da Terra para ser submetido à mesma pressão manométrica?

14.10 (a) Calcule a diferença na pressão sanguínea entre os pés e o topo da cabeça de uma pessoa de 1,65 m de altura. (b) Considere um segmento cilíndrico de um vaso sanguíneo de 2,0 cm de comprimento e 1,50 mm de diâmetro. Que força externa *adicional* esse vaso precisaria suportar nos pés em comparação a um vaso semelhante na cabeça dessa pessoa?

14.11 Na alimentação intravenosa, uma agulha é inserida em uma veia no braço do paciente, e um tubo vai da agulha até um reservatório de fluido (densidade igual a 1050 kg/m^3) localizado em uma altura h acima do braço. A parte superior do reservatório é aberta para o ar. Se a pressão manométrica dentro da veia é 5980 Pa, qual é o valor mínimo de h para que o fluido possa entrar na veia? Suponha que o diâmetro da agulha é grande o bastante para que se possa desprezar a viscosidade (veja a Seção 14.6) do fluido.

14.12 Um barril contém uma camada de óleo de 0,120 m flutuando sobre água com uma profundidade igual a 0,250 m. A densidade do óleo é igual a 600 kg/m^3. a) Qual é a pressão manométrica na interface entre o óleo e a água? b) Qual é a pressão manométrica no fundo do barril?

14.13 Um carro de 975 kg tem os seus pneus cheios a 32,0 libras. (a) Quais são a pressão absoluta e a pressão manométrica desses pneus em libras/polegadas^2, Pa e atm? (b) Se os pneus fossem perfeitamente redondos, a pressão dos pneus poderia exercer alguma força sobre o pavimento? (Suponha que as paredes dos pneus sejam flexíveis para que a pressão exercida pelo pneu sobre o pavimento seja igual à pressão do ar existente no interior do pneu.) (c) Se você examinar os pneus de um carro, verá que é óbvio que há um certo achatamento na base. Qual é a área de contato total da parte achatada de todos os quatro pneus com o pavimento?

14.14 Você está projetando um sino de mergulho para agüentar a pressão da água do mar até uma profundidade de 250 m. a) Qual é a pressão manométrica nessa profundidade? (Despreze as variações de densidade da água com a profundidade.) b) Sabendo que nessa profundidade a pressão dentro do sino é igual à pressão fora do sino, qual é a força resultante exercida pela água fora do sino e pelo ar dentro do sino sobre uma janela de vidro circular com diâmetro de 30,0 cm? (Despreze a pequena variação de pressão sobre a superfície da janela.)

14.15 Qual deve ser a pressão manométrica desenvolvida por uma bomba para mandar água do fundo do Grand Canyon (a uma altura de 730 m) até o Indian Gardens (a 1370 m)? Expresse a resposta em pascals e em atmosferas.

14.16 O líquido no manômetro de tubo aberto indicado na Figura 14.9a é o mercúrio. $y_1 = 3,0$ cm e $y_2 = 7,0$ cm. A pressão atmosférica é igual a 980 milibares. a) Qual é a pressão absoluta no fundo do tubo em forma de U? b) Qual é a pressão absoluta no tubo aberto a uma profundidade de 4,0 cm abaixo da superfície livre? c) Qual é a pressão absoluta do gás no tanque? d) Qual é a pressão manométrica do gás em pascals?

14.17 Existe uma profundidade máxima na qual uma mergulhadora (Figura 14.33) pode respirar através de um tubo *snorkel* (respirador), porque, à medida que a profundidade aumenta, a diferença de pressão também aumenta, tendendo a forçar os pulmões da mergulhadora. Como o *snorkel* liga o ar dos pulmões à atmosfera sobre a superfície livre, a pressão no interior dos pulmões é igual a uma atm. Qual é a diferença de pressão entre o exterior e o interior dos pulmões da mergulhadora a uma profundidade igual a 6,1 m? Suponha que a mergulhadora esteja mergulhada em água doce. (Um mergulhador usando uma scuba (tanque com ar comprimido) e respirando o ar comprimido desse dispositivo pode atingir profundidades muito maiores do que um mergulhador usando o *snorkel*, uma vez que a pressão do ar comprimido no interior da *scuba* compensa o aumento da pressão da água no exterior dos pulmões.)

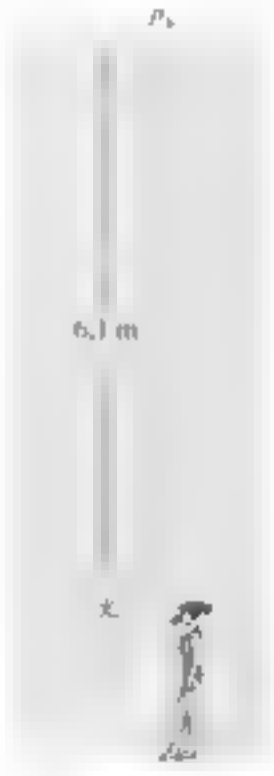


Figura 14.33 Exercício 14.17

14.18 Um cilindro alto com uma área da seção reta igual a 12,0 cm^2 está parcialmente cheio de mercúrio; a superfície do mercúrio está 5,0 cm acima do fundo do cilindro. Despeja-se água lentamente sobre o mercúrio, e os dois fluidos não se misturam. Que volume de água deve ser acrescentado para dobrar a pressão manométrica no fundo do cilindro?

14.19 Um lago no extremo norte do Yukon está coberto por uma camada de gelo de 1,75 m de espessura. Calcule a pressão absoluta e a pressão manométrica a uma profundidade de 2,50 m no lago.

14.20 Um recipiente fechado é parcialmente preenchido com água. Inicialmente, o ar acima da água é a pressão atmosférica ($1,01 \times 10^5$ Pa), e a pressão manométrica no fundo da água é 2500 Pa. A seguir, bombeia-se mais ar para dentro, aumentando a pressão de ar acima da água em 1500 Pa. (a) Qual é a pressão manométrica no fundo da água? (b) Caso se retire água por uma válvula no fundo do recipiente, quanto mais o nível da água precisa ser reduzido para que a pressão manométrica no fundo da água volte a ser a original, de 2500 Pa? A pressão do ar acima da água é mantida em 1500 Pa acima da pressão atmosférica.

14.21 Um curto-circuito elétrico impede o fornecimento da potência necessária para um submarino que está situado a 30 m abaixo da superfície do oceano. A tripulação deve empurrar uma escotilha com área de 0,75 m^2 e peso igual a 300 N para poder escapar pelo fundo do submarino. Se a pressão interna for igual a um atm, qual é a força para baixo que eles devem exercer para abrir a escotilha?

14.22 **Explorando Vênus.** A pressão na superfície de Vênus é 92 atm, e a aceleração da gravidade é 0,894*g*. Em uma futura missão de exploração, um tanque cilíndrico na vertical, contendo benzeno, é selado na parte de cima e pressurizado 92 atm acima do benzeno. O tanque tem um diâmetro de 1,72 m e a coluna de benzeno tem 11,50 m de altura. Despreze os efeitos da alta temperatura em Vênus. (a) Qual a força resultante exercida sobre a superfície interna do fundo do tanque? (b) Que força a atmosfera venusiana exerce sobre a superfície externa do fundo do tanque? (c) Que força total de fora para dentro exerce a atmosfera sobre as paredes verticais do tanque?

14.23 Um disco cilíndrico de madeira, pesando 45,0 N e com um diâmetro de 30,0 cm, flutua sobre um cilindro de óleo de densidade 0,850 g/cm^3 (Figura 14.34). O cilindro de óleo está a 75,0 cm de profundidade e tem o mesmo diâmetro que o disco de madeira. (a) Qual é a pressão manométrica no topo da coluna de óleo? (b) Suponha agora que alguém coloque um peso de 83,0 N sobre a madeira, e que nenhum óleo passe pela borda do disco de madeira. Qual é a *variação* de pressão (i) no fundo do cilindro de óleo e (ii) na metade do cilindro de óleo?

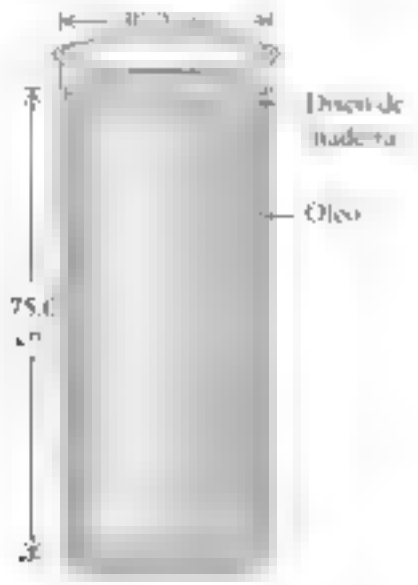


Figura 14.34 Exercício 14.23

14.24 **Elevador hidráulico I.** No elevador hidráulico mostrado na Figura 14.8, qual deve ser a razão entre o diâmetro do braço do recipiente sob o carro e o diâmetro do braço do recipiente onde a força é aplicada para que um carro de 1520 kg possa ser erguido com uma força de apenas 125 N?

14.25 **Elevador hidráulico II.** O pistão de um elevador hidráulico de carros possui diâmetro igual a 0,30 m. Qual é a pressão manométrica, em pascals, necessária para elevar um carro com massa igual a 1700 kg? Expresse essa pressão também em atmosferas.

Seção 14.3 Empuxo

14.26 Um bloco de gelo flutua sobre um lago de água doce. Qual deve ser o volume mínimo do bloco para que uma mulher de 45,0 kg possa ficar em pé sobre o bloco sem molhar os pés?

14.27 Uma amostra de minério pesa 17,50 N no ar. Quando a amostra é suspensa por uma corda leve e totalmente imersa na água, a tensão na corda é igual a 11,20 N. Calcule o volume total e a densidade da amostra.

14.28 Você está preparando um aparelho para uma visita a um planeta recém-descoberto chamado Caasi, onde há oceanos de glicerina e cuja aceleração gravitacional na superfície é igual a 4,15 m/s^2. Se o seu aparelho flutua nos oceanos da Terra com 25,0% de seu volume submerso, que percentagem de seu volume estará submersa nos oceanos de glicerina de Caasi?

14.29 Um objeto com densidade média ρ flutua na superfície livre de um fluido com densidade ρ_{fluido}. a) Qual é a relação entre essas duas densidades? b) Levando em conta a resposta do item (a), como um navio de aço flutua na água? c) Em termos de ρ e de ρ_{fluido}, qual é a fração do objeto que fica submersa e qual é a fração do objeto que fica acima da superfície do fluido? Verifique se suas respostas fornecem os limites corretos quando $\rho \to \rho_{fluido}$ e $\rho \to 0$. d) Quando você está a bordo do seu iate, seu primo Tobias corta de um salva-vidas uma peça retangular (dimensões de 5,0 × 4,0 × 3,0 cm) e a joga no mar. A peça possui massa igual a 42 g. Quando ela flutua no oceano, que percentagem de seu volume fica acima da superfície?

14.30 Uma esfera de plástico oca é mantida submersa em um lago de água doce amarrada a uma corda presa no fundo do lago. O volume da esfera é igual a 0,650 m^3, e a tensão na corda é igual a 900 N. a) Calcule a força de empuxo exercida pela água sobre a esfera. b) Qual é a massa da esfera? c) A corda se rompe e a esfera sobe até a superfície. Quando ela atinge o equilíbrio, qual é a fração do volume da esfera que fica submersa?

14.31 Um bloco de madeira cúbico com aresta de 10,0 cm flutua sobre uma interface entre uma camada de água e uma camada de óleo, com sua base situada 1,50 cm abaixo da superfície livre do óleo (Figura 14.34). A densidade do óleo é igual a 790 kg/m^3. a) Qual é a pressão manométrica na face superior do bloco? b) Qual a pressão manométrica na face inferior do bloco? c) Quais são a massa e a densidade do bloco?

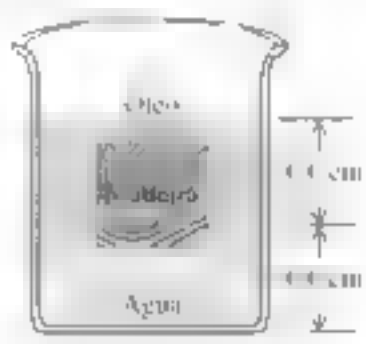


Figura 14.35 Exercício 14.31

14.32 Um lingote de alumínio sólido pesa 89 N no ar. a) Qual é o seu volume? b) O lingote é suspenso por uma corda leve e totalmente imerso na água. Qual é a tensão na corda (o peso *aparente* do lingote na água)?

14.33 Uma rocha é suspensa por uma corda leve. Quando a rocha está no ar, a tensão na corda é 39,2 N. Quando a rocha está totalmente imersa na água, a tensão é 28,4 N. Quando a rocha está totalmente imersa em um líquido desconhecido, a tensão é 18,6 N. Qual é a densidade do líquido desconhecido?

Seção 14.4 Escoamento de um fluido

14.34 A água corre para dentro de uma fonte, enchendo todos os tubos, a uma taxa constante de 0,750 m³/s. (a) Com que velocidade a água jorraria de um buraco de 4,50 cm de diâmetro? (b) Com que velocidade ela jorraria se o diâmetro do buraco fosse três vezes maior?

14.35 Uma cabeça de chuveiro possui 20 aberturas circulares, cada uma com um raio de 1,0 mm. A cabeça de chuveiro é conectada a um cano de raio igual a 0,80 cm. Se a velocidade da água no cano é 3,0 m/s, qual é a sua velocidade ao sair pelas aberturas da cabeça?

14.36 A água escoa em um tubo cuja seção reta possui área variável e enche completamente o tubo em todos os pontos. No ponto 1, a seção reta possui área igual a 0,070 m² e o módulo da velocidade do fluido é igual a 3,50 m/s. a) Qual é a velocidade do fluido nos pontos em que a seção reta possui área igual a (i) = 0,105 m²? (ii) = 0,047 m²? b) Calcule o volume de água descarregada pela extremidade aberta do tubo em 1 hora.

14.37 A água escoa em um tubo cilíndrico cuja seção reta possui área variável. A água enche completamente o tubo em todos os pontos. a) Em um ponto o raio do tubo é igual a 0,150 m. Qual é a velocidade da água nesse ponto se a vazão volumétrica no tubo é igual a 1,20 m³/s? b) Em um segundo ponto a velocidade da água é igual a 3,80 m/s. Qual é o raio do tubo nesse ponto?

14.38 a) Deduza a Equação (14.12). b) Quando a densidade cresce 1,80% de um ponto 1 até um ponto 2, o que ocorre com a vazão volumétrica?

Seção 14.5 Equação de Bernoulli

14.39 Um tanque selado que contém água do mar até uma altura igual a 11,0 m também contém ar acima da água a uma pressão manométrica igual a 3,0 atm. A água escoa para fora através de um pequeno orifício na base do tanque. Calcule a velocidade de efluxo da água.

14.40 Um pequeno orifício circular com diâmetro igual a 6,0 mm é cortado na superfície lateral de um grande tanque de água, a uma profundidade de 14,0 m abaixo da superfície da água. O topo do tanque está aberto para a atmosfera. Ache a) a velocidade de efluxo; b) o volume de água descarregado por segundo.

14.41 Qual é a pressão manométrica necessária no tubo principal da rua para que uma mangueira de incêndio ligada a ele seja capaz de lançar água até uma altura de 15,0 m? (Suponha que o diâmetro do tubo principal seja muito maior do que o diâmetro da mangueira de incêndio.)

14.42 Em um ponto de um encanamento a velocidade da água é 3,0 m/s e a pressão manométrica é igual a $5,0 \times 10^4$ Pa. Calcule a pressão manométrica em um segundo ponto do encanamento, 11,0 m abaixo do primeiro, sabendo que o diâmetro do cano no segundo ponto é igual ao dobro do diâmetro do primeiro.

14.43 **Sustentação de um avião.** As linhas de corrente horizontais em torno das asas de um pequeno avião são tais que a velocidade sobre a superfície superior é igual a 70,0 m/s e sobre a superfície inferior é igual a 60,0 m/s. Se a área da asa é igual a 16,2 m², qual é a força vertical resultante (incluindo o efeito da gravidade) sobre o avião? A densidade do ar é igual a 1,20 kg/m³.

14.44 Uma bebida leve (essencialmente água) escoa em um tubo de uma fábrica de cerveja com uma vazão volumétrica tal que deve encher 220 latas de 0,355 L por minuto. Em um ponto 2 do tubo, a pressão manométrica é igual a 152 kPa, e a área da seção reta é igual a 8,0 cm². Em um ponto 1, situado 1,35 m acima do ponto 2, a área da seção reta é igual a 2,0 cm². Obtenha a) a vazão mássica; b) a vazão volumétrica; c) as velocidades do escoamento nos pontos 1 e 2; d) a pressão manométrica no ponto 1.

14.45 Em um dado ponto de um encanamento cilíndrico horizontal, a velocidade da água é igual a 2,50 m/s e a pressão manométrica é igual a $1,80 \times 10^4$ Pa. Calcule a pressão manométrica em um segundo ponto do encanamento sabendo que o diâmetro do cano no segundo ponto é igual ao dobro do diâmetro do primeiro.

14.46 Um sistema de irrigação de um campo de golfe descarrega a água de um cano horizontal à taxa de 7200 cm³/s. Em um ponto do cano em que o raio é 4,0 cm, a pressão absoluta da água é $2,40 \times 10^5$ Pa. Em um segundo ponto do cano, a água passa por uma constrição, onde o raio é 2,0 cm. Qual é a pressão absoluta da água ao passar por essa constrição?

Problemas

14.47 Em uma demonstração, uma professora separa facilmente dois hemisférios ocos de aço (diâmetro D) por meio de uma alça presa a cada um deles. A seguir, ela os encaixa novamente, bombeia o ar para fora da esfera até atingir uma pressão absoluta P e entrega-os ao aluno musculoso da última fileira para que ele tente separá-los. a) Designando por P_0 a pressão atmosférica, qual é a força que o aluno musculoso deve exercer sobre cada hemisfério? b) Avalie sua resposta para o caso $P = 0,025$ atm e $D = 10,0$ cm.

14.48 O ponto com a maior profundidade de todos os oceanos da Terra é a fossa Marianas, com uma profundidade igual a 10,92 km. a) Supondo que a água seja incompressível, qual é a pressão nessa profundidade? Use a densidade da água do mar. b) A pressão real nesse ponto é igual a $1,16 \times 10^8$ Pa, o valor que você calculou deve ser menor do que esse porque, na realidade, a densidade da água varia com a profundidade. Usando o valor da compressibilidade da água e o valor real da pressão, ache a densidade da água no fundo da fossa Marianas. Qual é a variação percentual da densidade da água?

14.49 Uma piscina mede 5,0 m de comprimento, 4,0 m de largura e 3,0 m de profundidade. Determine a força exercida pela água sobre a) o fundo da piscina, b) ambas as extremidades da piscina. (*Sugestão.* Calcule a força que atua sobre uma estreita faixa horizontal situada a uma profundidade h e integre sobre a extremidade da piscina.) Despreze a força produzida pela pressão do ar.

14.50 A aresta superior da comporta de uma represa está em contato com a superfície da água. A comporta tem 2,0 m de altura, 4,0 m de largura e uma articulação ao longo de uma linha horizontal passando pelo seu centro (Figura 14.36). Calcule o torque produzido pela força da água em relação ao eixo da articulação. (*Sugestão.* Use um procedimento análogo ao adotado no Problema 14.49; calcule o torque sobre uma estreita faixa horizontal situada a uma profundidade h e integre sobre a comporta.)

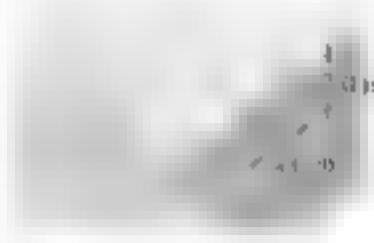


Figura 14.36 Problema 14.50

14.51 **Força e torque sobre uma represa.** Uma represa possui forma de um sólido retangular. A face de frente para o lago possui área A e altura H. A superfície da água doce do lago atrás da represa está no mesmo nível do topo da represa. a) Mostre que a força resultante horizontal exercida pela água sobre a represa é igual a $\frac{1}{2}\rho g H A$, ou seja, o produto da pressão manométrica na face da represa pela área da represa. (Veja o Problema 14.49.) b) Mostre que o torque produzido pela força da água em relação ao eixo passando no fundo da represa é dado por $\rho g H^2 A/6$. c) Como a força e o torque dependem do tamanho da represa?

14.52 **Submarinos em Europa.** Alguns cientistas desejam enviar um submarino por controle remoto à lua de Júpiter, Europa, para procurar vida em seus oceanos sob a crosta de gelo. A massa de Europa é 4.78×10^{22} kg, seu diâmetro é 3130 km e sua atmosfera é desprezível. Suponha que a camada de gelo na superfície não seja suficientemente espessa para exercer uma força significativa sobre a água. Se as janelas do submarino que você está projetando medem 25,0 cm^2 e suportam uma força de fora para dentro de no máximo 9750 N por janela, qual é a maior profundidade a que esse submarino pode descer com segurança?

14.53 Um astronauta está em pé no pólo norte de um planeta recém-descoberto com uma massa esférica de raio R. Ele segura em suas mãos um recipiente que contém um líquido de massa m e volume V. Na superfície do líquido a pressão é P_0, a uma profundidade d abaixo da superfície, a pressão possui um valor maior P. A partir dessas informações, determine a massa do planeta.

14.54 **Balões em Marte.** Há quem diga que poderíamos explorar Marte usando balões de gás para sobrevoar a superfície de perto. A força de empuxo da atmosfera marciana os balões no alto. A densidade da atmosfera marciana é 0,0154 kg/m^3 (embora esse valor varie com a temperatura). Suponha que esses balões sejam construídos com plástico fino, mas resistente, com uma densidade tal que cada metro quadrado possua uma massa de 5,0 g. O gás que usaríamos para inflar esses balões é tão leve que sua massa poderia ser desprezada. (a) Quais devem ser o raio e a massa desses balões para que eles parem logo acima da superfície de Marte? (b) Se soltarmos um desses balões mencionados no item (a) na Terra, onde a densidade atmosférica é 1,20 kg/m^3, qual será a sua aceleração inicial, supondo que o balão tenha o mesmo tamanho que em Marte? Ele subirá ou cairá? (c) Se em Marte esses balões tivessem cinco vezes o raio calculado no item (a), qual seria o peso máximo dos instrumentos que eles poderiam carregar?

14.55 A Terra não possui uma densidade uniforme: ela é mais densa em seu centro e menos densa na superfície. Uma expressão aproximada para sua densidade é $\rho(r) = A - Br$, onde $A = 12700$ kg/m^3 e $B = 1{,}50 \times 10^{-3}$ kg/m^4. Considere a Terra uma esfera de raio $R = 6{,}37 \times 10^6$ m. (a) Evidências geológicas indicam que as densidades são de 13100 kg/m^3 no centro e de 2400 kg/m^3 na superfície. Quais são os valores obtidos para a densidade nesses dois pontos com o nosso modelo de aproximação? (b) Imagine a Terra dividida em camadas esféricas concêntricas. Cada camada possui raio r, espessura dr, volume $dV = 4\pi r^2 dr$ e massa $dm = \rho(r)\,dV$. Integrando desde $r = 0$ até $r = R$, mostre que a massa da Terra com esse modelo é dada por $M = \frac{4}{3}\pi R^3(A - \frac{3}{4}BR)$. c) Mostre que os valores dados de A e B fornecem a massa da Terra com precisão de 0,4%. d) Vimos na Seção 12.6 que uma casca esférica uniforme não contribui para g em seu interior. Mostre que, neste modelo, $g(r) = \frac{4}{3}\pi G r(A - \frac{3}{4}Br)$ no interior da Terra. e) Mostre que a expressão obtida no item (d) fornece $g = 0$ no centro da Terra e $g = 9{,}85$ m/s^2 na superfície da Terra. f) Mostre que, nesse modelo, g não diminui uniformemente com a profundidade e, ao contrário, atinge um valor máximo igual a $4\pi GA^2/9B = 10{,}01$ m/s^2 no ponto $r = 2A/3B = 5640$ km.

14.56 No Exemplo 12.10 (Seção 12.6) vimos que, no interior de um planeta com densidade constante (uma hipótese irreal para a Terra), a aceleração da gravidade cresce uniformemente com a distância ao centro do planeta. Ou seja, $g(r) = g_s r/R$, onde g_s é a aceleração da gravidade na superfície, r é a distância ao centro do planeta e R é o raio do planeta. O interior do planeta pode ser considerado aproximadamente um fluido incompressível com densidade ρ. a) Substitua a altura y na Equação (14.4) pela coordenada radial r e integre para achar a pressão no interior de um planeta com densidade constante em função de r. Considere a pressão na superfície igual a zero. (Isso significa desprezar a pressão da atmosfera do planeta.) b) Usando esse modelo, calcule a pressão no centro da Terra. (Use o valor da densidade média da Terra, calculando-a mediante os valores da massa e do raio indicados no Apêndice F.) c) Os geólogos estimam um valor aproximadamente igual a 4×10^{11} Pa para a pressão no centro da Terra. Esse valor condiz com o que você calculou para $r = 0$? O que poderia contribuir para uma eventual diferença?

14.57 Um tubo em forma de U está aberto em ambas as extremidades e contém uma porção de mercúrio. Uma quantidade de água é cuidadosamente derramada na extremidade esquerda do tubo em forma de U até que a altura da coluna de água seja igual a 15,0 cm (Figura 14.37). a) Qual é a pressão manométrica na interface água-mercúrio? b) Calcule a distância vertical h entre o topo da superfície do mercúrio do lado direito e o topo da superfície da água do lado esquerdo.

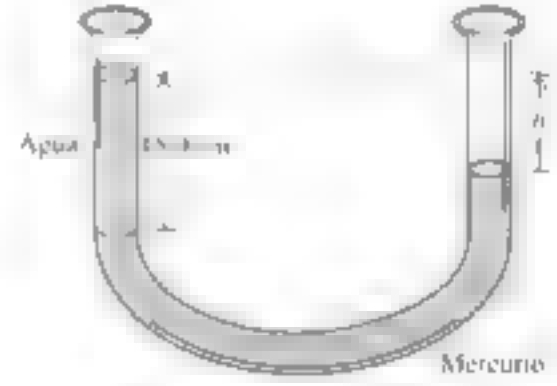


Figura 14.37 Problema 14.57.

14.58 **A grande inundação de melaço.** Na tarde do dia 15 de janeiro de 1919, em um dia anormalmente quente em Boston, ocorreu a ruptura de um tanque cilíndrico metálico com diâmetro de 27,4 m e altura de 27,4 m que continha melaço. O melaço inundou uma rua formando uma corrente com profundidade igual a 9 m, matando pedestres e cavalos e destruindo edifícios. A densidade do melaço era igual a 1600 kg/m^3. Se o tanque estivesse completamente cheio antes do acidente, qual seria a força total que o melaço exerceria de dentro para fora sobre a superfície lateral do tanque? (*Sugestão*: Considere a força de dentro para fora exercida sobre um anel circular da parede do tanque com largura dy situado a uma profundidade y abaixo da superfície superior. Integre para achar a força total de dentro para fora. Suponha que antes de o tanque se romper, a pressão sobre a superfície do melaço fosse igual à pressão atmosférica fora do tanque.)

14.59 Uma barca aberta possui as dimensões indicadas na Figura 14.38. Sabendo-se que todas as partes da barca são feitas com placas de aço de espessura igual a 4,0 cm, qual é a massa de carvão

que a barca pode suportar em água doce sem afundar? Existe espaço suficiente na parte interna da barca para manter essa quantidade de carvão? (A densidade do carvão é aproximadamente igual a 1500 kg/m^3.)

Figura 14.38 Problema 14.59

14.60 Um balão com ar quente possui volume igual a 2200 m^3. O tecido (envoltório) do balão pesa 900 N. A cesta com os equipamentos e o tanque cheio de propano pesa 1700 N. Se o peso máximo que o balão pode suportar é 3200 N, incluindo passageiros, comida e champanhe, e sabendo-se que a densidade do ar externo é 1,23 kg/ m^3, qual é a densidade média dos gases quentes no interior do balão?

14.61 A propaganda de um certo carro afirma que ele flutua na água. a) Sabendo-se que a massa do carro é igual a 900 kg e seu volume interno é de 3,0 m^3, qual é a fração do carro que fica submersa quando ele flutua? Despreze o volume do aço e de outros materiais. b) A água penetra gradualmente por uma brecha deslocando o ar do interior do carro. Que fração do volume interno do carro ficará cheia quando ele afundar?

14.62 Um cubo de gelo de massa igual a 9.70 g flutua em um copo de 420 cm^3 completamente cheio de água. A tensão superficial da água e a variação da densidade com a temperatura são desprezíveis (quando ela permanece líquida). a) Qual é o volume de água deslocado pelo cubo de gelo? b) Depois que o gelo se fundiu completamente a água transborda? Em caso afirmativo, calcule o volume da água que transbordou. Em caso negativo, explique por que isso ocorre. c) Suponha que a água do copo seja água salgada com densidade igual a 1050 kg/ m^3. Qual seria o volume da água salgada deslocado pelo cubo de gelo de 9.70 g? d) Refaça o item (b) para o caso de um cubo de gelo de água doce flutuando em água salgada.

14.63 Um bloco de madeira mede 0,600 m de comprimento, 0,250 m de largura e 0,080 m de espessura. A densidade desse bloco é 600 kg/m^3. Qual deve ser o volume de chumbo que pode ser amarrado debaixo do bloco de madeira para que ele possa flutuar em águas calmas com seu topo alinhado à superfície? Qual é a massa desse volume de chumbo?

14.64 Um densímetro é constituído por um bulbo esférico e uma haste cilíndrica cuja seção reta possui área igual a 0,400 cm^2 (Figura 14.13a). O volume total do bulbo, incluindo a haste, é igual a 13,2 cm^3. Quando imerso em água, o densímetro flutua mantendo a haste a uma altura de 8,0 cm acima da superfície da água. Quando imerso em um fluido orgânico, a haste fica a uma altura de 3,20 cm acima da superfície. Ache a densidade do fluido orgânico. (*Observação*: Este problema ilustra a precisão desse tipo de densímetro. Uma diferença de densidade relativamente pequena produz uma diferença grande na leitura da escala do densímetro.)

14.65 As densidades do ar, do hélio e do hidrogênio (para $p = 1,0$ atm e $T = 293$ K) são 1,20 kg/m^3, 0,166 kg/m^3 e 0,0899 kg/m^3, respectivamente. a) Qual é o volume em metros cúbicos deslocado por um aeróstato cheio de hidrogênio sobre o qual atua uma força de 'sustentação' total igual a 120 kN? (A 'sustentação' é a diferença entre a força de empuxo e o peso do gás que enche o aeróstato.) b) Qual seria a 'sustentação' se o hélio fosse usado no lugar do hidrogênio? Tendo em vista sua resposta, explique por que o hélio é usado nos modernos dirigíveis de propaganda.

14.66 **MHS de um objeto flutuando.** Um objeto com altura h, massa M e área da seção reta A flutua verticalmente em um líquido com densidade ρ. a) Calcule a distância vertical entre a superfície do líquido e a parte inferior do objeto na posição de equilíbrio. b) Uma força de módulo F é aplicada de cima para baixo sobre o topo do objeto. Nessa nova posição de equilíbrio, a distância vertical entre a superfície do líquido e a parte inferior do objeto difere em que valor da distância calculada no item (a)? (Suponha que uma pequena parte do objeto permaneça sobre a superfície do líquido.) c) Sua resposta da parte (b) mostra que, se a força for repentinamente removida, o objeto deverá oscilar para cima e para baixo executando um MHS. Obtenha o período desse movimento em função da densidade ρ do líquido, da massa M e da área da seção reta A do objeto. Despreze o amortecimento provocado pelo atrito do líquido (Seção 13.7).

14.67 Uma baliza cilíndrica de 950 kg flutua verticalmente na água do mar. O diâmetro da baliza é igual a 0,900 m. a) Calcule a distância vertical adicional que a baliza deverá afundar quando um homem de 70,0 kg ficar em pé sobre ela. (Use a expressão deduzida na parte (b) do Problema 14.66.) b) Calcule o período do MHS resultante quando o homem pular para fora da baliza. (Use a expressão deduzida na parte (c) do Problema 14.66 e, como naquele problema, despreze o amortecimento provocado pelo atrito do líquido.)

14.68 Uma mangueira de incêndio deve poder lançar água no topo de um prédio de 35,0 m de altura quando apontada para cima. A água entra na mangueira a uma taxa constante de 0,500 m^3/s e sai por um esguicho redondo. (a) Qual é o diâmetro máximo que esse esguicho pode ter? (b) Se o único esguicho disponível possuir o dobro do diâmetro, qual é o ponto mais alto que a água atingirá?

14.69 Você usa a broca para fazer um pequeno furo na lateral de um tanque cilíndrico vertical de água assentado sobre o solo com seu topo aberto para o ar. (a) Se o nível da água tiver uma altura H em que altura acima da base você precisa fazer o furo para que a água atinja a maior distância da base do cilindro quando chega ao solo? (b) Qual é a maior distância que a água atinge?

14.70 Um tanque cilíndrico vertical de área de seção reta A está aberto para o ar em seu topo e contém água até a profundidade h_0. Um empregado abre acidentalmente um furo de área A_2 no fundo do tanque. (a) Deduza uma equação para a profundidade h da água em função do tempo t depois que o furo é aberto. (b) Quanto tempo leva para o tanque esvaziar depois que o furo é aberto?

14.71 Um bloco de madeira leve está sobre um dos pratos de uma balança de braços iguais, onde mantém-se perfeitamente equilibrado pela massa de 0,0950 kg de um bloco de latão colocado no outro prato da balança. Calcule a massa do bloco de madeira leve se a sua densidade for igual a 150 kg/m^3. Explique por que podemos desprezar o empuxo sobre o bloco de latão, mas *não* o empuxo do ar sobre o bloco de madeira leve.

14.72 O bloco A da Figura 14.39 está suspenso por uma corda, preso a uma balança de mola D e submerso em um líquido C contido em um recipiente cilíndrico B. A massa do recipiente é 1,0 kg, a massa do líquido é 1,80 kg. A leitura da balança D indica 3,50 kg e a balança E indica 7,50 kg. O volume do bloco A é igual a $3,80 \times 10^{-3}$ m^3. a) Qual é a densidade do líquido? b) Qual será a leitura de cada balança quando o bloco A for retirado do líquido?

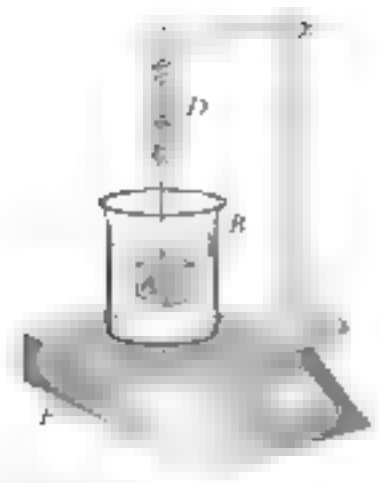


Figura 14.39 Problema 14.72

14.73 Uma barra de alumínio é completamente recoberta por uma camada de ouro formando um lingote com peso igual a 45,0 N. Quando você suspende o lingote em uma balança de mola e o segura mergulhado na água, a leitura da balança indica 39,0 N. Qual é o peso do ouro na camada?

14.74 Uma bola de plástico de raio igual a 12,0 cm flutua na água com 16,0% de seu volume submerso. (a) Que força você precisa aplicar à bola para mantê-la em repouso completamente abaixo da superfície da água? (b) Se você soltar a bola, qual será a aceleração dela no instante em que a soltar?

14.75 O peso da coroa de um rei é p. Quando suspensa por uma corda leve e totalmente imersa na água, a tensão na corda (o peso aparente da coroa) é igual a fp. a) Mostre que a densidade relativa da coroa é dada por $1/(1 - f)$. Discuta o significado dos limites quando $f = 0$ e $f = 1$. b) Se a coroa for de ouro sólido e pesar 12,9 N no ar, qual será o seu peso aparente quando estiver totalmente imersa na água? c) Repita a parte (b) se a coroa for de chumbo sólido com uma camada muito fina de ouro, porém com peso ainda igual a 12,9 N no ar.

14.76 Uma peça de aço possui peso p, um peso aparente (ver o Problema 14.75) $p_{água}$ quando está totalmente imersa na água e um peso aparente p_{fluido} quando está totalmente imersa em um fluido desconhecido. a) Mostre que a densidade relativa do fluido é dada por $(p - p_{fluido})/(p - p_{água})$. b) Esse resultado é razoável para os três casos (p_{fluido} maior, menor ou igual a $p_{água}$)? c) O peso aparente da peça de aço em água com densidade 1000 kg/m³ é 87,2% do seu peso. Que porcentagem do seu peso será o seu peso aparente se o corpo for mergulhado em ácido fórmico (densidade 1220 kg/m³)?

14.77 Você funde uma certa quantidade de metal com densidade ρ_m e o despeja em uma fôrma. Você está preocupado com a possibilidade de haver cavidades dentro do material fundido. Você mede o peso p do material fundido e a força de empuxo B quando o material está completamente cercado de água. a) Mostre que $V_v = B/(\rho_{água}g) - p/\rho_m g)$ é o volume total das eventuais cavidades formadas no interior do material fundido. b) Se o metal for o cobre, o peso p do material fundido for igual a 156 N e a força de empuxo for igual a 20 N, qual é o volume total das cavidades formadas no interior do material fundido? A que fração do volume total do material esse volume corresponde?

14.78 Um bloco cúbico de madeira com aresta de 0,100 m e densidade igual a 550 kg/m³ flutua em um recipiente com água. Óleo com densidade igual a 750 kg/m³ é derramado sobre a água até que a camada de óleo fique 0,035 m abaixo do topo do bloco. a) Qual é a profundidade da camada de óleo? b) Qual é a pressão manométrica na face inferior do bloco?

14.79 **Lançando uma âncora.** Uma âncora de ferro com massa igual a 35,0 kg e densidade igual a 7860 kg/m³ está sobre o convés de uma barca pequena que possui lados verticais e está flutuando sobre um rio de água doce. A área da parte inferior da barca é igual a 8,0 m². A âncora é lançada da parte lateral da barca, mas fica suspensa por uma corda de massa e volume desprezíveis. Depois que a âncora foi lançada e a barca parou de oscilar, a barca afundou ou subiu na água? Qual é o valor da distância vertical que ela afundou ou subiu?

14.80 Suponha que o petróleo de um superpetroleiro tenha densidade igual a 750 kg/m³. O navio fica encalhado em um banco de areia. Para fazer o navio flutuar novamente, sua carga é bombeada para fora e armazenada em barris, cada um deles com massa igual a 15,0 kg quando vazio e com capacidade para armazenar 0,120 m³ de petróleo. Despreze o volume ocupado pelo aço do barril. a) Se um trabalhador que está transportando os barris acidentalmente deixa um barril cheio e selado cair pelo lado do navio, o barril flutuará ou afundará na água do mar? b) Se o barril flutua, qual é a fração de seu volume que fica acima da superfície da água? Se ele afunda, qual deveria ser a tensão mínima na corda necessária para rebocá-lo desde o fundo do mar para cima? c) Repita as partes (a) e (b) supondo que o petróleo tenha densidade igual a 910 kg/m³ e que a massa de cada barril vazio seja igual a 32,0 kg.

14.81 Um bloco cúbico com densidade ρ_B e aresta de comprimento L flutua sobre um líquido de densidade maior ρ_L. a) Que fração do volume do bloco fica acima da superfície do líquido? b) O líquido é mais denso do que a água (densidade igual a ρ_A) e não se mistura com ela. Derramando-se água sobre a superfície do líquido, qual deve ser a camada de água para que a superfície livre da água coincida com a superfície superior do bloco? Expresse a resposta em termos de L, ρ_B, ρ_L e ρ_A. c) Calcule a profundidade da camada de água da parte (b) se o líquido for mercúrio e o bloco for de aço com aresta de 10,0 cm.

14.82 Uma barca está em uma eclusa retangular de um rio de água doce. O comprimento da eclusa é 60,0 m e a largura é 20,0 m. As comportas de aço das duas extremidades estão fechadas. Quando a barca está flutuando na eclusa, uma carga de $2,50 \times 10^5$ N de sucata de metal é colocada na barca. A densidade do metal é 9000 kg/m³. a) Depois que a carga de sucata de metal, que estava inicialmente nas margens da eclusa, é colocada na barca, em quanto se eleva verticalmente o nível da água da eclusa? b) A sucata de metal é agora despejada na água da eclusa pela parte lateral da barca. O nível da água da eclusa sobe, desce ou permanece inalterado? Caso ele suba ou desça, quanto varia verticalmente o nível da água da eclusa?

14.83 Um tubo em forma de U contendo um líquido possui uma seção horizontal de comprimento igual a l (Figura 14.40). Calcule a diferença de altura entre as duas colunas de líquido nos ramos verticais quando a) o tubo se desloca com uma aceleração a para a direita; b) o tubo gira em torno de um dos ramos verticais com uma velocidade angular ω. c) Explique por que a diferença de altura não depende da densidade do líquido nem da área da seção reta do tubo. A resposta seria a mesma se os tubos verticais tivessem áreas das seções retas diferentes? A resposta seria a mesma se a parte horizontal do tubo fosse afunilada, diminuindo sua seção reta de uma extremidade até a outra? Explique.

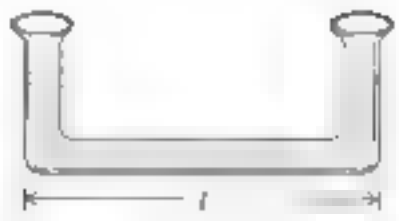


Figura 14.40 Problema 14.83

14.84 Um recipiente cilíndrico contendo um líquido incompressível de densidade ρ gira com velocidade angular ω constante em torno de seu eixo de simetria, o qual tomaremos como o eixo Oz (Figura 14.41). a) Mostre que a pressão a uma dada altura no interior do líquido cresce com a distância radial r (para fora do eixo de rotação) de acordo com $\partial p/\partial r = \rho\omega^2 r$. b) Integre essa equação diferencial parcial para achar a pressão em função da distância ao eixo de rotação ao longo de uma linha horizontal para $r = 0$. c) Combine a resposta da parte (b) com a Equação (14.5) para mostrar que a superfície do líquido que gira possui uma forma *parabólica*, ou seja, a altura do líquido é dada por $h(r) = \omega^2 r^2/2g$. (Essa técnica é usada para fabricar espelhos parabólicos para telescópios, o vidro líquido gira e depois é solidificado enquanto está girando.)

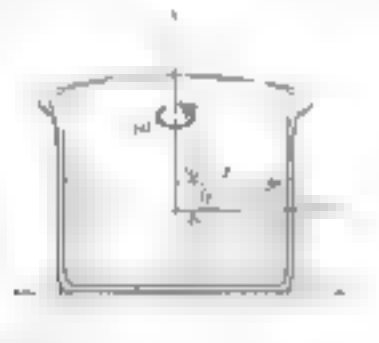


Figura 14.41 Problema 14.84

14.85 Um fluido incompressível com densidade ρ está em um tubo de teste horizontal com área da seção reta interna A. O tubo de teste gira com velocidade angular ω em uma ultracentrifugadora. As forças gravitacionais são desprezíveis. Considere um elemento de volume do fluido de área A e espessura dr situado a uma distância r do eixo de rotação. A pressão na superfície interna é P e a pressão na superfície externa é $P + dp$. a) Aplique a segunda lei de Newton ao elemento de volume para mostrar que $dp = \rho\omega^2 r'\,dr'$. b) Se a superfície do fluido está em um raio r_0 onde a pressão é P_0, mostre que a pressão p a uma distância $r \geq r_0$ é dada por $P = P_0 + \rho\omega^2 r_0^2 (r^2 - r_0^2)/2$. c) Um objeto de volume V e densidade ρ_{ob} possui o centro de massa a uma distância $R_{cm,ob}$ do eixo. Mostre que a força resultante horizontal sobre o objeto é dada por $\rho V\omega^2 R_{cm}$, onde R_{cm} é a distância entre o eixo e o centro de massa do fluido deslocado. d) Explique por que o objeto se move para o centro quando $\rho R_{cm} > \rho_{ob} R_{cm,ob}$ e para fora do centro quando $\rho R_{cm} < \rho_{ob} R_{cm,ob}$. e) Em pequenos objetos com densidade uniforme, $R_{cm} = R_{cm,ob}$. O que ocorre com uma mistura de pequenos objetos desse tipo com densidades diferentes em uma ultracentrifugadora?

14.86 Balões cheios de hélio, flutuando soltos no interior de um carro com janelas e ventanhas fechadas, movem-se no sentido da aceleração do carro; porém, balões soltos cheios de ar movem-se em sentido contrário ao da aceleração do carro. Para explicar por que isso acontece, considere somente as forças horizontais que atuam sobre os balões. Seja a o módulo da aceleração do carro. Considere um tubo de ar horizontal cuja seção reta possui área A, que tenha origem no pára-brisa, onde $x = 0$ e $P = P_0$, e se oriente para trás. Agora considere um elemento de volume de espessura dx ao longo deste tubo. A pressão em sua parte frontal é P e a pressão em sua parte traseira é $P + dp$. Suponha que a densidade do ar seja a constante ρ. a) Aplique a segunda lei de Newton ao elemento de volume e mostre que $dp = \rho a\,dx$. b) Integre o resultado da parte (a) para achar a pressão na superfície frontal em termos de a e de x. c) Para mostrar que é razoável considerar ρ constante, calcule a diferença de pressão em atm para uma distância tão longa quanto 2,5 m e para uma aceleração tão grande quanto 5,0 m/s^2. d) Mostre que a força horizontal resultante sobre um balão de volume V é igual a ρVa. e) Para forças de atrito desprezíveis, mostre que a aceleração do balão (densidade média $\rho_{méd}$) é dada por $(\rho/\rho_{méd})a$, de modo que a aceleração relativa é dada por $a_{rel} = [(\rho/\rho_{méd}) - 1]a$. f) Use a expressão da a_{rel} obtida na parte (e) para explicar o sentido do movimento dos balões.

14.87 A água de um grande tanque aberto com paredes verticais possui uma profundidade H (Figura 14.42). Um orifício é aberto na parede vertical a uma profundidade h abaixo da superfície da água. a) Qual é a distância R entre a base do tanque e o ponto onde a corrente atinge o solo? b) A qual distância acima da base do tanque devemos fazer um segundo furo para que a corrente que emerge dele tenha um alcance igual ao do primeiro furo?

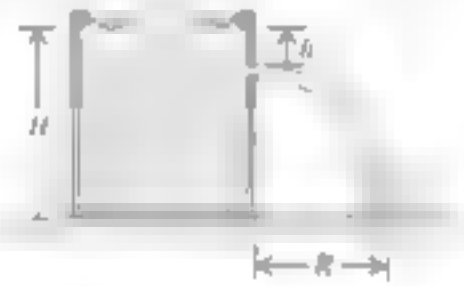


Figura 14.42 Problema 14.87

14.88 Um balde cilíndrico, aberto na parte superior, possui diâmetro de 10,0 cm e altura igual a 25,0 cm. Um orifício circular com área da seção reta igual a 1,50 cm^2 é feito no centro da base do balde. A água flui para dentro do balde por um tubo acima dele com uma vazão igual a $2{,}40 \times 10^{-4}$ m^3/s. Até que altura a água subirá no balde?

14.89 A água flui continuamente de um tanque aberto, como indicado na Figura 14.43. A altura do ponto 1 é 10,0 m e os pontos 2 e 3 estão a uma altura de 2,0 m. A área da seção reta no ponto 2 é igual a 0,0480 m^2, no ponto 3 ela é igual a 0,0160 m^2. A área do tanque é muito maior do que a área da seção reta do tubo. Supondo que a equação de Bernoulli seja aplicável, calcule a) a vazão volumétrica em metros cúbicos por segundo; b) a pressão manométrica no ponto 2.

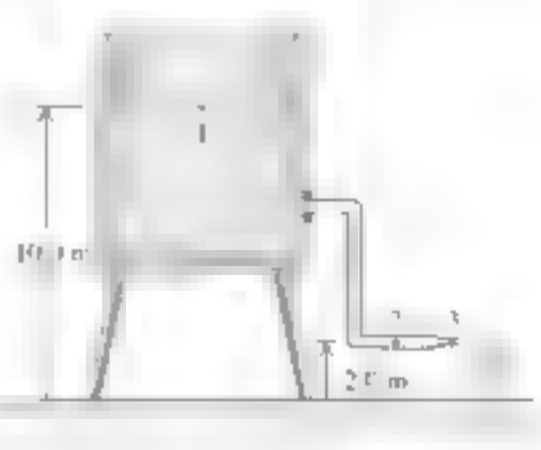


Figura 14.43 Problema 14.89

14.90 O furacão Emily, ocorrido em 1993, apresentava um raio de aproximadamente 350 km. A velocidade do vento ao redor do centro (o "olho") do furacão, de raio 30 km, atingiu 200 km/h. A

medida que o ar formava redemoinhos no sentido do olho, o momento angular permanecia praticamente constante. a) Estime a velocidade do vento na periferia do furacão. b) Estime a diferença de pressão na superfície terrestre entre o olho e a periferia do furacão. (*Sugestão*: Consulte a Tabela 14.1.) Onde a pressão é maior? c) Se a energia cinética do ar em redemoinho no olho pudesse ser convertida totalmente em energia potencial gravitacional, até que altura o ar se elevaria? d) Na realidade, o ar no olho se eleva até altitudes de diversos quilômetros. Como você concilia esse fato com sua resposta do item (c)?

14.91 Dois grandes tanques abertos *A* e *F* (Figura 14.44) contêm o mesmo líquido. Um tubo horizontal *BCD*, que tem uma constrição *C* e é aberto ao ar no ponto *D*, sai da base do tanque *A*, e um tubo vertical *E* parte da constrição *C* e mergulha no líquido do tanque *F*. Suponha um escoamento com linhas de corrente e despreze a viscosidade. Sabendo que a área da seção reta da constrição *C* é a metade da área em *D* e que *D* está a uma distância h_1 abaixo do nível do líquido no tanque *A*, até que altura h_2 o líquido subirá no tubo *E*? Expresse sua resposta em termos de h_1.

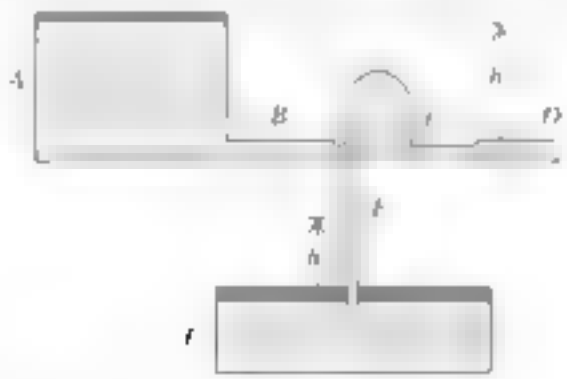


Figura 14.44 Problema 14.91

14.92 O tubo horizontal mostrado na Figura 14.45 apresenta seção reta com área igual a 40,0 cm² em sua parte mais larga e 10,0 cm² em sua constrição. A água flui no tubo, e a vazão volumétrica é igual a $6,0 \times 10^{-3}$ m³/s (6,0 L/s). Calcule a) a velocidade do escoamento na parte mais larga e na constrição; b) a diferença de pressão entre essas duas partes; c) a diferença de altura entre os dois níveis do mercúrio existente no tubo em *U*.

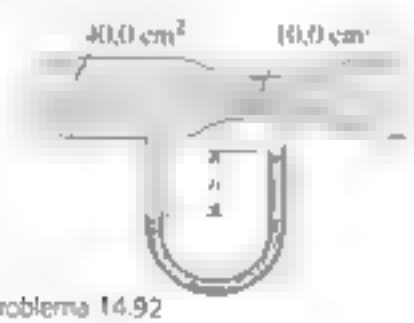


Figura 14.45 Problema 14.92

14.93 Um líquido escoando por um tubo vertical apresenta uma forma definida durante o escoamento. Para obter a equação para essa forma, suponha que o líquido esteja em queda livre quando sai do tubo. No exato momento em que ele sai, o líquido possui velocidade v_0 e o raio da corrente é r_0. a) Encontre uma expressão para a velocidade do líquido em função da distância *y* de sua queda. Combinando essa relação com a da continuidade, ache uma expressão para o raio da corrente em função de *y*. b) Se a água escoa de um tubo vertical com velocidade de 1,20 m/s, a que distância da saída do tubo o raio será igual à metade do seu valor na corrente original?

Problemas desafiadores

14.94 Uma pedra com massa $m = 3,0$ kg é pendurada no teto de um elevador com uma corda leve. A pedra está totalmente imersa na água de um balde apoiado no piso do elevador, porém a pedra não toca nem o fundo nem as paredes do balde. a) Quando o elevador está em repouso, a tensão na corda é igual a 21,0 N. Calcule o volume da pedra. b) Deduza uma expressão para a tensão na corda quando o elevador está *subindo* com uma aceleração constante *a*. Calcule a tensão na corda quando $a = 2,50$ m/s² de baixo para cima. c) Deduza uma expressão para a tensão na corda quando o elevador está *descendo* com uma aceleração constante *a*. Calcule a tensão na corda quando $a = 2,50$ m/s² de cima para baixo. d) Qual é a tensão na corda quando o elevador está em queda livre com uma aceleração de cima para baixo igual a *g*?

14.95 Suponha que um bloco de isopor, $\rho = 180$ kg/m³, seja mantido totalmente submerso na água (Figura 14.46). a) Qual é a tensão na corda? Faça o cálculo usando o princípio de Arquimedes. b) Use a fórmula $P = P_0 + \rho gh$ para calcular diretamente a força exercida pela água sobre as duas faces inclinadas e sobre a base do isopor, a seguir mostre que a soma vetorial dessas forças é a força de empuxo.

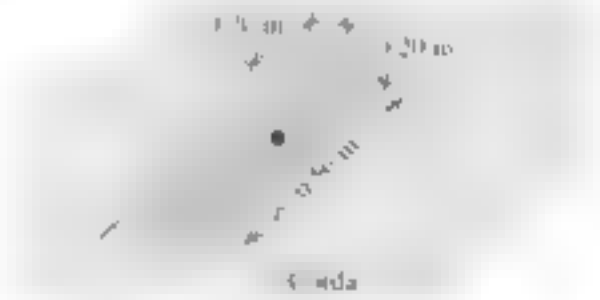


Figura 14.46 Problema desafiador 14.95

14.96 Um grande tanque de diâmetro *D* está aberto para a atmosfera e contém água até uma altura *H*. Um pequeno orifício com diâmetro *d* ($d << D$) é feito na base do tanque. Desprezando qualquer efeito da viscosidade, calcule o tempo necessário para drenar completamente o tanque.

14.97 Um *sifão*, mostrado na Figura 14.47, é um dispositivo conveniente para remover o líquido de um recipiente. Para efetuar o escoamento, devemos encher completamente o tubo com líquido. Suponha que o líquido possua densidade ρ e que a pressão atmosférica seja P_{atm}. Suponha que a seção reta do tubo seja a mesma em todas as suas partes. a) Se a extremidade inferior do sifão está a uma distância *h* abaixo da superfície do líquido no recipiente, qual é a velocidade do líquido quando ele sai pela extremidade inferior do sifão? (Suponha que o recipiente tenha um diâmetro muito grande, e despreze qualquer efeito da viscosidade.) b) Uma característica curiosa de um sifão é que o líquido inicialmente sobe no tubo. Qual é a altura máxima *H* que o ponto mais alto do tubo pode ter para que o escoamento ainda ocorra?

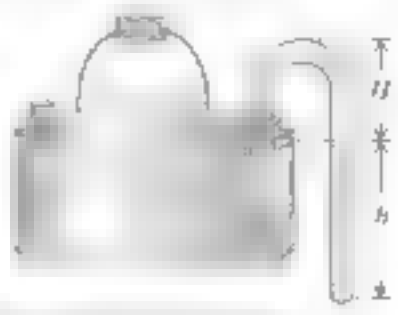


Figura 14.47 Problema desafiador 14.97

14.98 O trecho seguinte foi copiado de uma carta. *Para nivelar as fundações de edifícios relativamente grandes, os carpinteiros da região costumam usar uma mangueira de jardim cheia de água mantendo em suas extremidades dois tubos de vidro com comprimentos da ordem de 25 a 30 cm. A teoria é que a água, procurando manter o mesmo nível, atinge a mesma altura nos dois tubos, servindo de referência para o nivelamento. Há, no entanto, uma dúvida sobre o que ocorre quando existe uma bolha no interior da mangueira. Nossos velhos profissionais afirmam que o ar não afeta a leitura da altura de uma extremidade para a outra. Outros alegam que a bolha pode causar importantes imprecisões.* Você é capaz de dar uma resposta relativamente simples para essa pergunta, com uma explicação? A Figura 14.48 mostra um esquema para ilustrar a situação que causou a controvérsia.

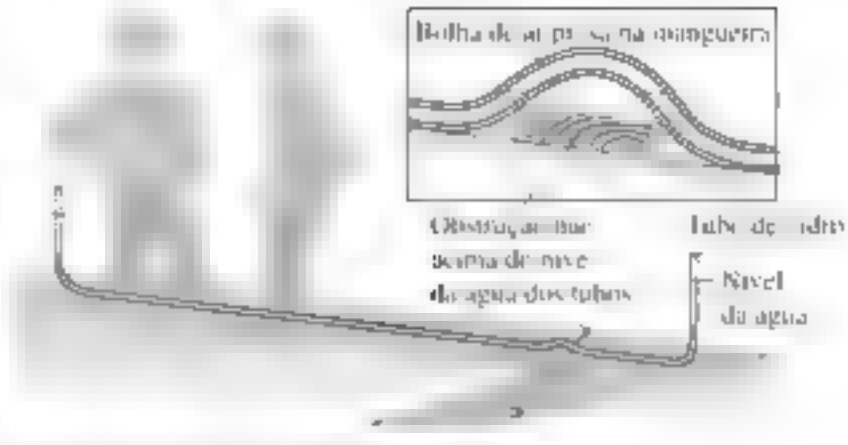


Figura 14.48 Problema desafiador 14.98.

ONDAS MECÂNICAS

15

Quando ocorre um terremoto, os efeitos do evento se propagam pela Terra sob a forma de ondas sísmicas. Quais aspectos de uma onda sísmica determinam a potência que é carregada pela onda?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O que é uma onda mecânica, e os diferentes tipos de ondas mecânicas
- Como usar a relação entre velocidade, frequência e comprimento de onda em uma onda periódica
- Como interpretar e usar a expressão matemática para uma onda periódica senoida
- Como calcular a velocidade da onda em um fio ou uma corda
- Como calcular a taxa de transferência de energia em uma onda mecânica
- O que acontece quando há superposição e interferência de ondas mecânicas
- As propriedades das ondas estacionárias em uma corda, e como analisar essas ondas
- Como instrumentos de corda produzem sons de frequências específicas

Ondulações em um lago, sons musicais que você pode ouvir e outros sons que você *não pode* ouvir — estes são exemplos de fenômenos *ondulatórios*. Uma onda surge quando um sistema é deslocado de sua posição de equilíbrio e a perturbação se desloca ou se *propaga* de uma região para outra do sistema. Quando uma onda se propaga, ela carrega energia. A energia do sol em ondas de luz aquece a superfície de nosso planeta; a energia em ondas sísmicas pode rachar a sua crosta.

Neste capítulo e nos dois capítulos seguintes estudaremos as ondas mecânicas, as ondas que se propagam dentro de algum material denominado *meio*. (O Capítulo 16 trata de som, um tipo importante de onda mecânica.) Começaremos deduzindo as equações básicas para descrever as ondas, incluindo o caso especial das ondas *periódicas* para as quais a configuração da onda se repete à medida que a onda se propaga. Para auxiliar na compreensão das ondas em geral, estudaremos o caso simples das ondas que se propagam em um fio ou corda esticados. As ondas nas cordas desempenham um papel fundamental na música. Quando um músico toca guitarra ou violino, cria ondas que se deslocam em sentidos opostos ao longo das cordas do instrumento. Quando essas ondas de sentidos opostos se superpõem, ocorre o que se chama de *interferência*. Aprenderemos que as ondas periódicas podem ocorrer em uma guitarra ou violino apenas em certas frequências especiais, chamadas frequências de *modo normal*, determinadas pelas propriedades da corda. As frequências de modo normal de um instrumento de cordas determinam a altura do som musical que ele produz. (No próximo capítulo veremos que a interferência também ajuda a explicar a afinação dos instrumentos de *sopro*, como flautas e órgãos de tubo.)

Na natureza nem todas as ondas são mecânicas. As ondas *eletromagnéticas* — que incluem a luz, as ondas de rádio, a radiação infravermelha, a radiação ultravioleta e os raios X — propagam-se até no espaço vazio, onde não há nenhum *meio*. Voltaremos a falar de ondas eletromagnéticas e outras ondas não mecânicas em capítulos posteriores.

15.1 Tipos de ondas mecânicas

Uma **onda mecânica** é uma perturbação que se desloca através de um material chamado de **meio**, no qual a onda se propaga. À medida que a onda se propaga através do meio, as partículas que constituem o meio sofrem deslocamentos de diversas espécies, dependendo da natureza da onda.

A Figura 15.1 mostra três variedades de ondas mecânicas. Na Figura 15.1a, o meio é um fio ou uma corda esticada sob tensão. Quando agitamos ou balançamos a extremidade esquerda da corda, a agitação se propaga através do comprimento da corda. As seções sucessivas da corda sofrem o mesmo tipo de movimento que aplicamos em sua extremidade, mas em tempos sucessivamente posteriores. Como os deslocamentos do meio são perpendiculares ou *transversais* à direção de propagação da onda ao longo do meio, este tipo de movimento é chamado de **onda transversal**.

Na Figura 15.1b, o meio é um líquido ou gás no interior de um tubo com uma parede rígida na extremidade direita do tubo e com um pistão móvel na extremidade esquerda. Se fizermos o pistão oscilar para a frente e para trás, uma perturbação de deslocamento e uma flutuação de pressão se propagam ao longo do meio. Nesse caso, as partículas do meio oscilam para a frente e para trás ao longo da *mesma* direção de propagação da onda e este movimento denomina-se **onda longitudinal**.

Na Figura 15.1c, o meio é a água em um tanque, tal como um canal ou um canal de irrigação. Quando fazemos uma placa achatada oscilar para a frente e para trás na extremidade esquerda, uma perturbação ondulatória se propaga ao longo do tanque. Nesse caso, o deslocamento da água possui os *dois* componentes, o transversal e o longitudinal.

Cada um dos sistemas descritos anteriormente possui um estado de equilíbrio. Para a corda, o equilíbrio corresponde ao estado em que a pessão é uniforme em todos os seus pontos, e para a água o equilíbrio corresponde a uma situação em que a superfície da água permanece no nível horizontal. Em cada um desses casos o movimento ondulatório é produzido por uma perturbação do estado de equilíbrio que se propaga de uma região para outra do meio. Em cada um desses casos existem forças restauradoras que tendem a fazer o sistema retornar para sua posição de equilíbrio, de modo análogo ao efeito da força gravitacional que tende a fazer um pêndulo retornar para sua posição de equilíbrio na vertical, quando ele é deslocado dessa posição.

Esses exemplos possuem três coisas em comum. Primeiro, em cada caso a perturbação se desloca ou se *propaga* com uma velocidade definida através do meio. O módulo dessa velocidade denomina-se velocidade de propagação da onda, ou simplesmente **velocidade da onda**. Ela é determinada em cada caso pelas propriedades mecânicas do meio. Usaremos o símbolo v para a velocidade da onda. (A velocidade da onda *não é* a mesma velocidade da partícula deslocada pelo movimento ondulatório. Voltaremos a comentar este ponto na Seção 15.3.) Segundo, o próprio meio não se desloca no espaço; as partículas individuais do meio oscilam em torno das respectivas posições de equilíbrio. A configuração global da onda é que se propaga. Terceiro, para produzir o movimento de qualquer um desses sistemas é necessário fornecer energia mediante um trabalho realizado sobre o sistema. O movimento ondulatório transfere esta energia de uma região para outra do meio. *As ondas transmitem energia, mas não transportam matéria de uma região para outra do meio* (Figura 15.2).

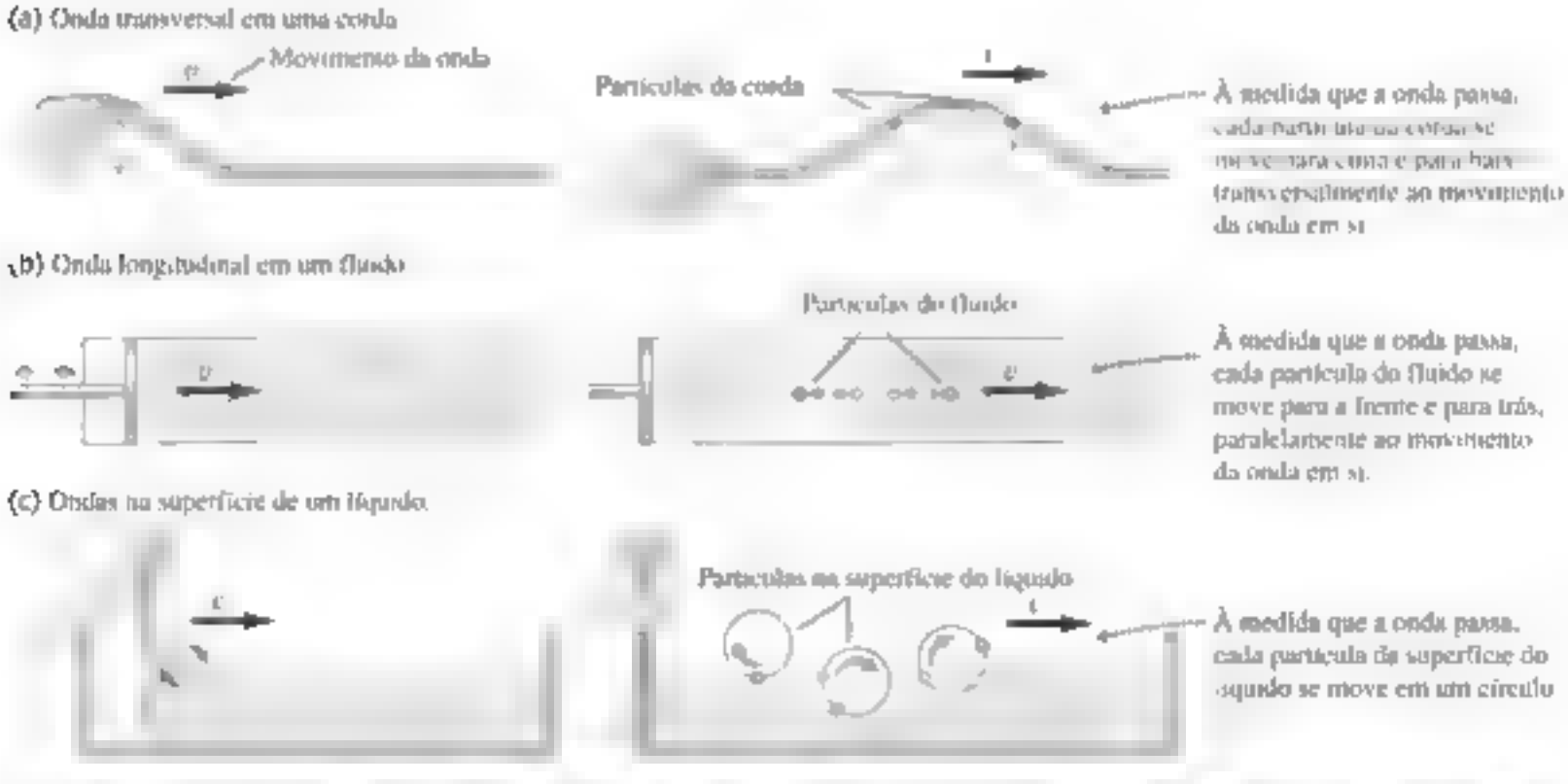

(a) Onda transversal em uma corda
Movimento da onda
Partículas da corda
À medida que a onda passa, cada parte da corda se move para cima e para baixo transversalmente ao movimento da onda em si.
(b) Onda longitudinal em um fluido
Partículas do fluido
À medida que a onda passa, cada partícula do fluido se move para a frente e para trás, paralelamente ao movimento da onda em si.
(c) Ondas na superfície de um líquido
Partículas na superfície do líquido
À medida que a onda passa, cada partícula da superfície do líquido se move em um círculo

Figura 15.1 Três modos de criar uma onda que se desloca para a direita. (a) A mão move a extremidade da corda para cima e depois retorna à posição inicial, produzindo uma onda transversal. (b) Um pistão empurra para a frente e depois retira para trás, produzindo a superposição de uma onda longitudinal com uma onda transversal. Nos três casos uma onda senoidal se propaga para a direita.

Figura 15.2 "Fazer a ola" em um estádio é um exemplo de onda mecânica: a perturbação se propaga pela multidão, mas não há transporte de matéria (nenhum dos espectadores se move de um assento para outro).

Teste sua compreensão da Seção 15.1 Que tipo de onda é a "ola" mostrada na Figura 15.2? (i) transversal, (ii) longitudinal; (iii) uma combinação de transversal e longitudinal. ∎

15.2 Ondas periódicas

A onda transversal na corda esticada indicada na Figura 15.1a é um exemplo de *pulso ondulatório*. A mão balança a corda para cima e para baixo apenas uma vez, exercendo sobre ela uma força transversal com esse movimento. O resultado é uma única 'ondulação', ou pulso, que se propaga ao longo do comprimento da corda. A tensão na corda restaura sua posição de equilíbrio em linha reta depois que o pulso termina de passar.

Uma situação mais interessante ocorre quando balançamos a extremidade da corda com um movimento repetitivo ou *periódico*. (Talvez você queira fazer uma revisão da discussão sobre movimento periódico no Capítulo 13 antes de prosseguir.) Neste caso, cada partícula da corda também executará um movimento periódico à medida que a onda se propaga e o resultado é uma **onda periódica**.

Onda periódica transversal

Em particular, suponha que você balance a corda com um *movimento harmônico simples* (MHS) com amplitude A, frequência f, frequência angular $\omega = 2\pi f$ e período $T = 1/f = 2\pi/\omega$. A Figura 15.3 mostra como fazer isso. A onda resultante é uma sequência simétrica de cristas e ventres. Como veremos, uma onda periódica produzida por um MHS é particularmente fácil de analisar; ela é chamada de **onda senoidal**. Veremos também que *qualquer* onda mecânica pode ser representada pela superposição de

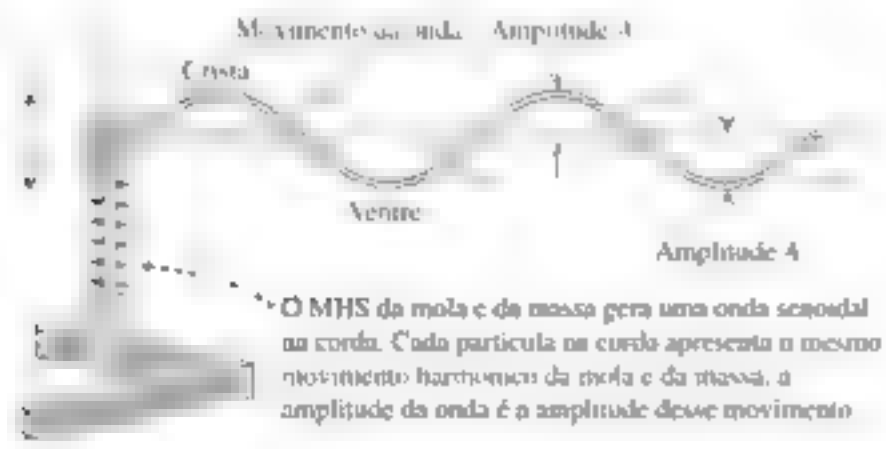

Movimento da onda
Amplitude A
Crista
Ventre
Amplitude A
O MHS da mola e da massa gera uma onda senoidal na corda. Cada partícula na corda apresenta o mesmo movimento harmônico da mola e da massa; a amplitude da onda é a amplitude desse movimento

Figura 15.3 Um bloco de massa m está preso a uma mola e executa um movimento harmônico simples, produzindo uma onda transversal senoidal que se propaga para a direita ao longo da corda. (Em um sistema real, seria necessário aplicar uma força motriz ao bloco de massa m para compensar a energia que é transportada pela onda.)

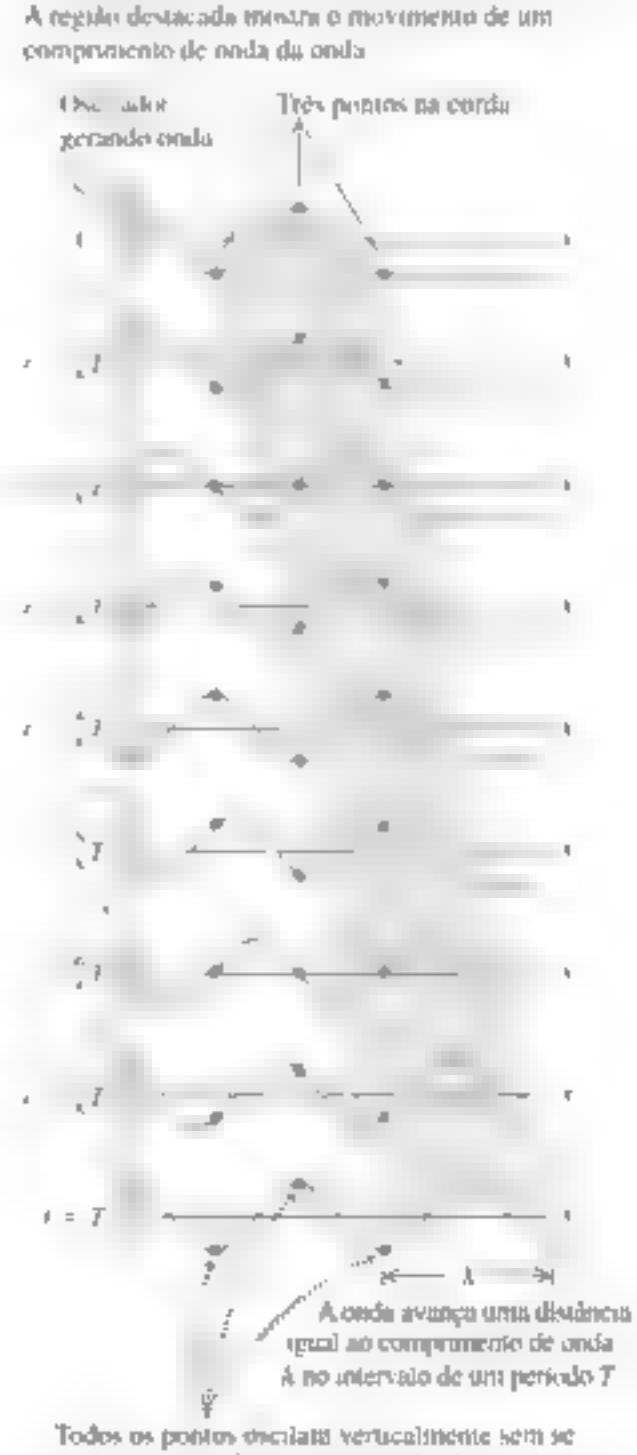

A corda é indicada em intervalos de 1/8 do período T
A região destacada mostra o movimento de um comprimento de onda da onda
Três pontos na corda
t = 0
t = T/8
t = 2T/8
t = 3T/8
t = 4T/8
t = 5T/8
t = 6T/8
t = 7T/8
t = T
λ
A onda avança uma distância igual ao comprimento de onda λ no intervalo de um período T
Todos os pontos oscilam verticalmente sem se deslocar para a frente ou para trás. As partículas com um comprimento de distância entre si se movem em fase uma com a outra.

Figura 15.4 Uma onda senoidal transversal se propaga para a direita ao longo de uma corda. A escala vertical está exagerada.

ondas senoidais. Portanto, esse tipo particular de onda merece uma atenção especial.

Na Figura 15.3 a onda que avança ao longo da corda é uma *sucessão contínua* de perturbações senoidais transversais. A Figura 15.4 mostra a forma de uma parte da corda próxima de sua extremidade esquerda em intervalos de tempo iguais a $\frac{1}{8}$ do período, completando um tempo igual a um período. A forma da onda avança uniformemente para a direita, conforme indicado pela região sombreada. À medida que a onda se propaga, qualquer ponto sobre a corda oscila verticalmente com MHS em torno da posição de equilíbrio. *Quando uma onda senoidal se propaga em um meio, cada partícula do meio executa um movimento harmônico simples com a mesma frequência.*

ATENÇÃO Movimento de onda x movimento de partícula Tome cuidado para não confundir o movimento de uma *onda transversal* ao longo da corda com o movimento de uma *partícula* da corda. A onda se desloca com uma velocidade v *ao longo* da corda, enquanto o movimento da partícula é um MHS *transversal* (perpendicular) à direção da propagação da onda.

Para uma onda periódica, a forma da corda em um dado instante é uma configuração que se repete sempre. O comprimento de uma dessas configurações completas é a distância entre duas cristas sucessivas ou entre dois ventres consecutivos. Chamamos essa distância de **comprimento de onda** do movimento ondulatório e para designá-la usamos a letra grega λ ("lambda"). A configuração da onda se desloca com velocidade constante v avançando uma distância λ no intervalo de um período T. Logo, a velocidade da onda v é dada por $v = \lambda/T$ ou, como $f = 1/T$,

$$v = \lambda f \quad \text{(onda periódica)} \tag{15.1}$$

A velocidade da onda é igual ao produto do comprimento de onda pela frequência. A frequência é uma propriedade *global* do movimento periódico porque todos os pontos da corda oscilam com a mesma frequência f.

Figura 15.5 Diversas gotas caindo verticalmente sobre a água produzem uma onda periódica que se espalha radialmente a partir do centro da fonte. As cristas e os ventres formam círculos concêntricos. O comprimento de onda é a distância entre duas cristas sucessivas ou entre dois ventres consecutivos.

Ondas em uma corda se propagam em apenas uma dimensão (na Figura 15.4, ao longo do eixo x). Mas as idéias de frequência, comprimento de onda e amplitude se aplicam igualmente bem à ondas que se propagam em duas ou três dimensões. A Figura 15.5 mostra uma onda se propagando em duas dimensões sobre a superfície de um tanque de água. Como as ondas em uma corda, o comprimento de onda é a distância de uma crista à próxima, e a amplitude é a altura de uma crista em relação ao nível de equilíbrio.

Em muitas situações importantes, a velocidade da onda v é inteiramente determinada pelas propriedades mecânicas do meio. Neste caso, o aumento de f produz uma diminuição de λ de modo que o produto $v = \lambda f$ permanece constante e as ondas com *todas* as frequências se propagam com a mesma velocidade. Neste capítulo consideraremos *somente* ondas deste tipo. (Em capítulos posteriores estudaremos a propagação de uma onda luminosa em um meio material no qual a velocidade da onda depende da frequência; é por isso que um prisma decompõe a luz branca formando um espectro e as gotas da chuva produzem um arco-íris.)

Ondas periódicas longitudinais

Para entender os mecanismos de uma onda periódica *longitudinal*, consideramos um tubo longo repleto de fluido, com um pistão em sua extremidade esquerda, como indicado na Figura 15.1b. Quando empurramos o pistão, comprimimos o fluido nas suas vizinhanças, fazendo aumentar a pressão nessa região. A seguir essa região empurra a região vizinha do fluido, e assim por diante, fazendo um pulso ondulatório se propagar ao longo do tubo.

Suponha agora que o pistão seja movido para a frente e para trás executando um movimento harmônico simples ao longo de uma linha paralela ao eixo do tubo (Figura 15.6). Esse movimento produz regiões com densidades e pressões maiores ou menores do que seus respectivos valores no equilíbrio. Uma *compressão* corresponde a uma região com densidade mais elevada, uma região de densidade reduzida é chamada de *expansão*. A Figura 15.6 mostra compressões como regiões sombreadas e expansões como regiões som-

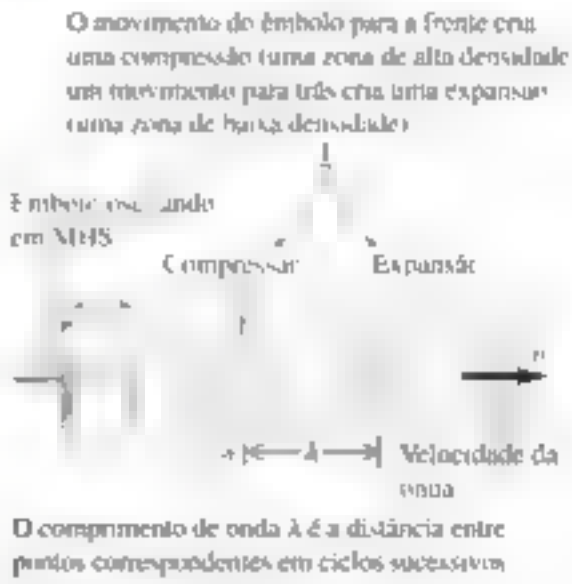


Figura 15.6 Usando um pistão oscilante para criar uma onda senoidal longitudinal em um fluido.

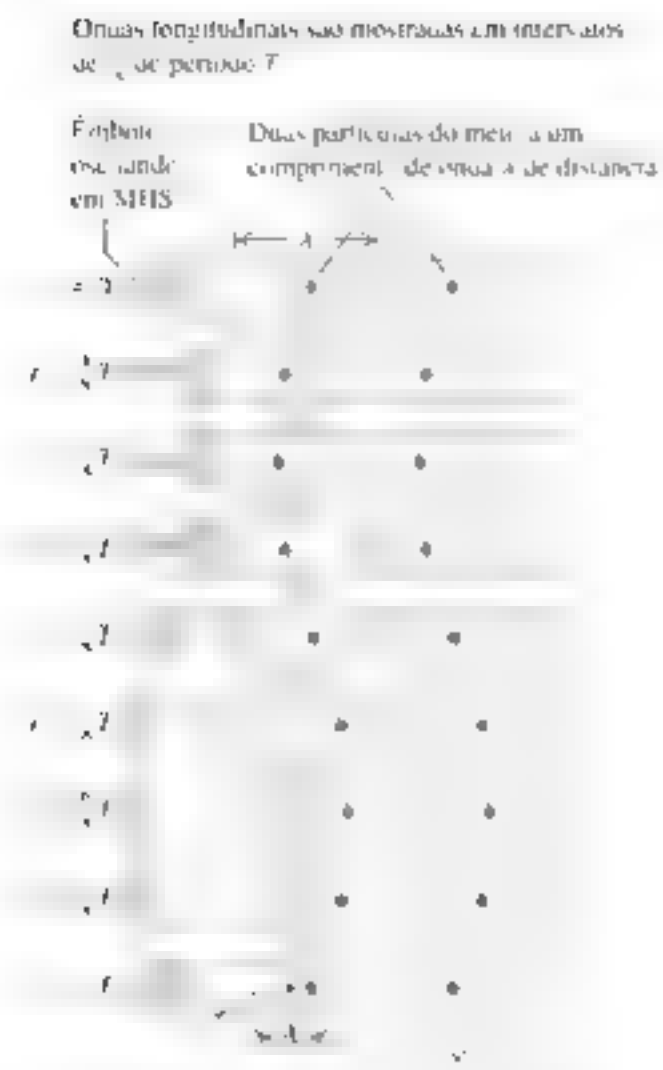

Ondas longitudinais são mostradas em intervalos de $\frac{1}{8}$ de período T
Exibido oscilando em MHS
Duas partículas do meio a um comprimento de onda λ de distância
λ
As partículas oscilam com amplitude A.
A onda se desloca uma distância λ durante o período T

Figura 15.7 Uma onda senoidal longitudinal se propagando para a direita ao longo de um fluido. A onda tem a mesma amplitude A e período T que a oscilação do pistão.

brendas claras. O comprimento de onda é a distância de uma compressão à próxima, ou de uma expansão à próxima.

A Figura 15.7 mostra a onda se propagando no tubo preenchido pelo fluido em intervalos de tempo de $\frac{1}{8}$ de um período pelo tempo total de um período. A configuração de compressões e expansões desloca-se constantemente para a direita, exatamente como a configuração de cristas e ventres em uma onda senoidal transversal (compare com a Figura 15.4). Cada partícula no fluido oscila em MHS paralelamente à direção da propagação da onda (ou seja, esquerda e direita) com a mesma amplitude A e período T que o pistão. As partículas indicadas pelos dois pontos pretos na Figura 15.7 estão a um comprimento de onda de distância e, assim, oscilam em fase uma com a outra.

Assim como a onda senoidal transversal mostrada na Figura 15.4, em um período T a onda longitudinal que vemos na Figura 15.7 se propaga um comprimento de onda λ para a direita. Portanto, a equação fundamental $v = \lambda f$ é válida para ondas longitudinais tanto quanto para ondas transversais, e também para *todos* os tipos de ondas periódicas. Assim como no caso das ondas transversais, neste capítulo e no próximo estudaremos apenas situações em que a velocidade das ondas longitudinais não depende da freqüência.

Exemplo 15.2

COMPRIMENTO DE ONDA DE UM SOM MUSICAL Ondas sonoras são ondas longitudinais que se propagam no ar. A velocidade do som depende da temperatura; a 20 °C é igual a 344 m/s. Qual é o comprimento de onda de uma onda sonora no ar a 20 °C sabendo que a freqüência é $f = 262$ Hz (uma frequência aproximadamente igual à do C médio do piano)?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve a relação entre a velocidade da onda, o comprimento de onda e a freqüência de uma onda periódica. A variável que buscamos é o comprimento de onda λ.

PREPARAR: a velocidade da onda $v = 344$ m/s e a freqüência da onda $f = 262$ Hz são dadas, então podemos usar na Equação (15.1) a relação entre v, λ e f.

EXECUTAR: resolvemos a Equação (15.1) para a variável λ:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{344 \text{ m/s}}{262 \text{ Hz}} = \frac{344 \text{ m/s}}{262 \text{ s}^{-1}} = 1.31 \text{ m}$$

Observe que as unidades de freqüência são o hertz (Hz) ou o inverso do segundo (s^{-1}).

AVALIAR: o que acontece com o comprimento de onda se a frequência varia? A velocidade das ondas sonoras não é afetada por mudanças na freqüência, então a relação $\lambda = v/f$ nos diz que o comprimento de onda irá variar na proporção inversa da freqüência. Como exemplo, um 'C alto' cantado por uma soprano está duas oitavas acima do C médio. Cada oitava corresponde a um fator dois na freqüência; logo, a freqüência do C alto é quatro vezes maior do que a freqüência do C médio, ou seja, $f = 4(262 \text{ Hz}) = 1048$ Hz. Portanto, o *comprimento de onda* correspondente a um C alto é *quatro vezes* menor: $\lambda = (1.31 \text{ m})/4 = 0.328$ m.

Teste sua compreensão da Seção 15.2 Se dobrarmos o comprimento de onda de uma onda em uma determinada corda, o que acontece com a velocidade v e a freqüência f da onda? (i) v dobra e f não se altera; (ii) v não se altera e f dobra; (iii) v passa a ser a metade da original e f não se altera; (iv) v não se altera e f passa a ser a metade da original; (v) nenhuma das anteriores. ∎

15.3 Descrição matemática das ondas

Muitas características das ondas periódicas podem ser descritas mediante os conceitos de velocidade da onda, amplitude, período, freqüência e comprimento de onda. Contudo, frequentemente necessitamos de uma descrição mais detalhada das posições e movimentos de partículas individuais do meio em função do tempo durante a propagação da onda. Para esta descrição, precisamos do conceito de *função de onda*, uma função que descreve a posição de qualquer partícula do meio em função do tempo. Concentraremos os estudos em ondas *senoidais*, para as quais qualquer partícula executa um MHS em torno de sua posição de equilíbrio.

Como um exemplo específico, vamos examinar ondas em uma corda esticada. Desprezando o pequeno encurvamento provocado pelo peso da corda, a posição de equilíbrio corresponde a uma linha reta. Vamos usar um sistema de coordenadas com o eixo Ox ao longo dessa posição de equilíbrio. As ondas ao longo de uma corda são *transversais*, durante o movimento da onda uma partícula na posição de equilíbrio x é deslocada até uma distância y perpendicular ao eixo Ox. O valor de y depende da partícula específica (isto é, y depende de x) e também é função do tempo t. Resumidamente, y é uma *função* de x e de t; $y = y(x, t)$. Dizemos que $y(x, t)$ é a **função de onda** que descreve a onda. Quando conhecemos essa função para uma dada onda, podemos usá-la para achar o deslocamento (a partir do equilíbrio) de qualquer partícula em qualquer instante. A partir desse resultado, podemos calcular a velocidade e a aceleração de qualquer partícula, a forma da corda e qualquer outro tipo de informação que desejarmos saber sobre o comportamento da corda em qualquer instante.

Função de onda de uma onda senoidal

Vamos mostrar como se determina a função de onda de uma onda senoidal. Suponha que uma onda senoidal se propague da esquerda para a direita (no sentido do aumento de x) ao longo da corda, como indicado na Figura 15.8. Cada partícula da corda oscila executando um MHS com a mesma frequência e a mesma amplitude. Porém, as oscilações das partículas em pontos diferentes da corda *não* estão todas sincronizadas. A partícula assinalada pelo ponto B na Figura 15.8 ocupa um valor de y máximo para $t = 0$ e retorna para o valor mínimo $y = 0$ para $t = \frac{1}{2}T$; esses mesmos eventos ocorrem com uma partícula no ponto A ou no ponto C em $t = \frac{1}{4}T$ e $t = \frac{3}{4}T$. Para qualquer par de partículas sobre a corda, o movimento da partícula da direita (em relação à onda, a partícula "corrente abaixo") se atrasa em relação ao movimento da partícula da esquerda um valor proporcional à distância entre as partículas.

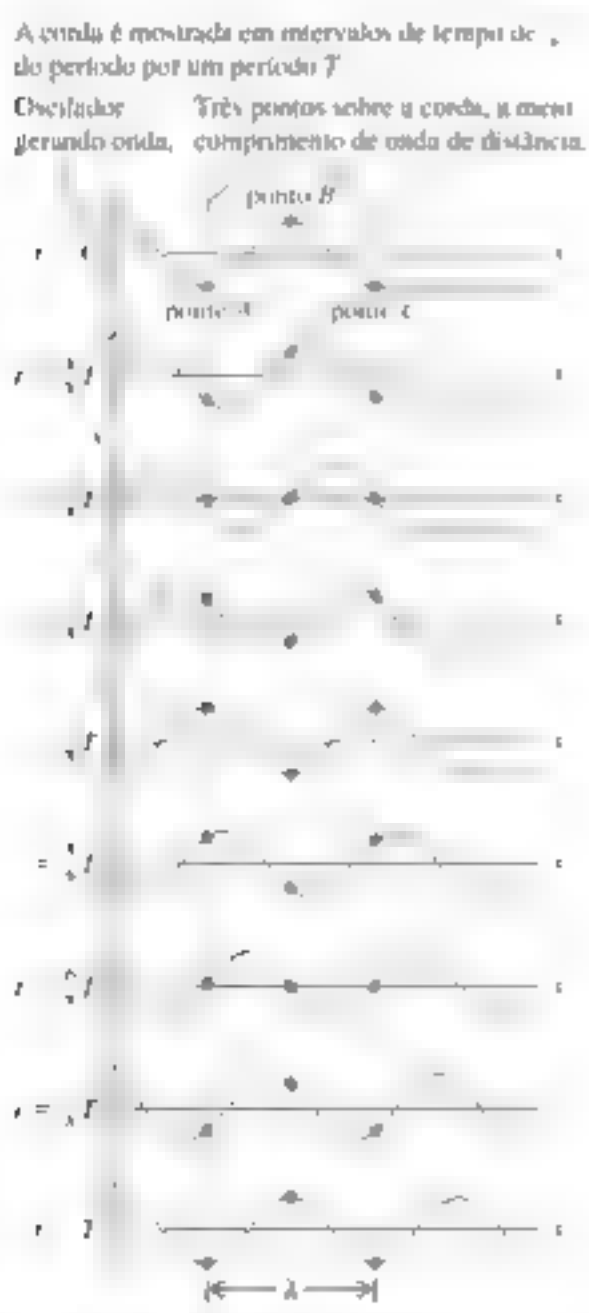

A corda é mostrada em intervalos de tempo de $\frac{1}{8}$ do período por um período T
Oscilador gerando onda
Três pontos sobre a corda, a mesmo comprimento de onda de distância
ponto B
ponto A
ponto C
$t = 0$
$t = \frac{1}{8}T$
$t = \frac{2}{8}T$
$t = \frac{3}{8}T$
$t = \frac{4}{8}T$
$t = \frac{5}{8}T$
$t = \frac{6}{8}T$
$t = \frac{7}{8}T$
$t = T$
λ

Figura 15.8 Acompanhando as oscilações de três pontos em uma corda à medida que uma onda senoidal se propaga por ela.

Portanto, existem diferenças de sincronia entre os diversos pontos oscilantes da corda correspondentes a várias frações do ciclo durante seus movimentos cíclicos. Chamamos de *diferenças de fase* a essas diferenças de sincronia e dizemos que cada ponto possui uma *fase* durante o movimento. Por exemplo, quando um ponto possui seu deslocamento positivo máximo enquanto outro ponto possui seu deslocamento negativo máximo, os dois pontos se encontram em uma diferença de fase equivalente a meio ciclo. (Este caso é exemplificado pelos pontos A e B, ou pelos pontos B e C.)

Suponha que o deslocamento de uma partícula na extremidade esquerda da corda ($x = 0$), onde a onda começa, seja dado por

$$y(x = 0, t) = A \cos \omega t = A \cos 2\pi f t \qquad (15.2)$$

Ou seja, a partícula oscila executando um MHS com amplitude A, frequência f e frequência angular $\omega = 2\pi f$. A notação $y(x = 0, t)$ serve para lembrar que o deslocamento dessa partícula é um caso particular da função $y(x, t)$ que descreve o movimento ondulatório inteiro. Para $t = 0$, a partícula no ponto $x = 0$ está em seu deslocamento positivo máximo ($y = A$) e está instantaneamente em repouso (porque o valor de y é um máximo).

A perturbação ondulatória se propaga de $x = 0$ até um ponto x à direita da origem em um intervalo de tempo x/v, onde v é a velocidade da onda. Portanto, o movimento do ponto x no instante t é igual ao movimento do ponto $x = 0$ no instante $t - x/v$. Logo, podemos achar o deslocamento x no instante t simplesmente substituindo t na Equação (15.2) por $(t - x/v)$. Fazendo isso, encontramos a seguinte expressão para a função de onda.

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, podemos reescrever a função da onda como

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] = A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right)$$

(onda senoidal movendo-se no sentido + x) (15.3)

O deslocamento $y(x, t)$ é uma função da posição x e do tempo t. Poderíamos generalizar a Equação (15.3) levando em conta os diferentes ângulos de fase, como fizemos no caso do movimento harmônico simples discutido na Seção 13.2, contudo, não faremos isso neste momento.

Podemos reescrever a função de onda dada pela Equação (15.3) de diversos modos úteis diferentes. Podemos expressá-la em termos do período $T = 1/f$ e do comprimento de onda $\lambda = v/f$.

$$y(x, t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

(onda senoidal movendo-se no sentido $+x$) (15.4)

Podemos obter outra forma útil da função de onda se definirmos uma grandeza k, denominada **número de onda**.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(número de onda)} \tag{15.5}$$

Substituindo $\lambda = 2\pi/k$ e $f = \omega/2\pi$ na relação frequência × comprimento de onda $v = \lambda f$ obtemos

$$\omega = vk \quad \text{(onda periódica)} \tag{15.6}$$

A seguir podemos reescrever a Equação (15.4) na forma

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

(onda senoidal movendo-se no sentido $+x$) (15.7)

Qual das diferentes formas da função de onda $y(x, t)$ devemos usar para um problema específico é uma questão de conveniência. Note que ω possui unidades de rad/s, de modo que, para que as unidades das equações (15.6) e (15.7) sejam consistentes, o número de onda k deve possuir unidades de rad/m. (Alguns físicos definem o número de onda como $k = 1/\lambda$ em vez de $k = 2\pi/\lambda$. Quando você estiver lendo outros textos, verifique qual é a definição usada para o número de onda.)

Gráfico da função de onda

Um gráfico da função de onda $y(x, t)$ em função de x para um tempo fixo t é indicado na Figura 15.9a. Esse gráfico fornece o deslocamento y de uma partícula a partir de sua posição de equilíbrio em função da coordenada x da partícula. No caso de uma onda transversal se propagando em uma corda, o gráfico indicado na Figura 15.9a representa a forma da onda em cada instante, como uma fotografia instantânea da corda. Em particular, para o tempo $t = 0$,

$$y(x, t = 0) = A\cos kx = A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

Um gráfico da função de onda em função do tempo t para uma coordenada x fixa é mostrado na Figura 15.9b. Esse gráfico fornece o deslocamento y de uma partícula para essa coordenada em função do tempo. Ou seja, ele descreve o movimento da partícula. Em particular, para $x = 0$,

$$y(x = 0, t) = A\cos(-\omega t) = A\cos\omega t = A\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

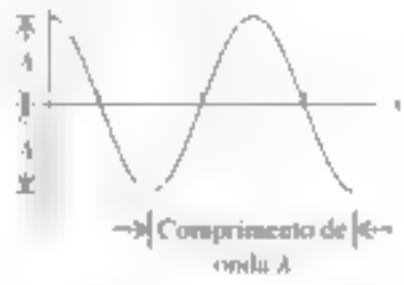
Este resultado é consistente com a nossa afirmação inicial sobre o movimento para $x = 0$, Equação (15.2).

ATENÇÃO Gráficos de ondas Embora possam parecer iguais à primeira vista, a Figura 15.9a e a Figura 15.9b *não* são idênticas. A Figura 15.9a é a fotografia da forma da corda em $t = 0$, enquanto a Figura 15.9b é um gráfico do deslocamento y de uma partícula para $x = 0$ em função do tempo.

Mais sobre função de onda

Podemos modificar as equações (15.3) a (15.7) para representar uma onda se propagando no sentido *negativo* do eixo Ox. Nesse caso, o deslocamento do ponto x para um tempo t é o mesmo que o deslocamento do ponto $x = 0$ para um tempo *posterior* $(t + x/v)$. Logo, substituindo t na Equação (15.2) por $(t + x/v)$, obtemos para uma onda se propagando no sentido *negativo* do eixo Ox,

(a) Se usarmos a Equação (15.7) para fazer o gráfico de y em função de x para o tempo $t = 0$, a curva mostra a *forma* da corda em $t = 0$.



(b) Se usarmos a Equação (15.7) para fazer o gráfico de y em função de t para a posição $x = 0$, a curva mostra o *deslocamento* y da partícula em $x = 0$ em função do tempo.

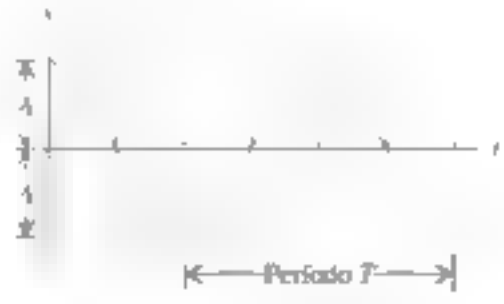


Figura 15.9 Dois gráficos da função de onda $y(x, t)$ na Equação (15.7). a) Gráfico do deslocamento y em função de x para um tempo $t = 0$. b) Gráfico do deslocamento y em função do tempo t quando $x = 0$. A escala vertical está etageada em (a) e em (b).

$$y(x, t) = A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} + t\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)$$

$$= A\cos(kx + \omega t)$$

(onda senoidal movendo-se no sentido $-x$) (15.o

Na expressão $y(x, t) = A\cos(kx \pm \omega t)$ para uma onda se propagando no sentido $-x$ ou no sentido $+x$, a grandeza $(kx \pm \omega t)$ denomina-se **fase**. Ela desempenha o papel de uma grandeza angular (sempre medida em radianos) na Equação (15 7) ou na Equação (15.8), e seu valor para qualquer x e para qualquer tempo t determina qual é a parte do ciclo senoidal que está ocorrendo em um dado ponto e em um determinado tempo. Para uma crista (onde $y = A$ e a função cos = 1), a fase poderia ser igual a 0, 2π, 4π, e assim por diante; para um vente (onde $y = -A$ e o cos = -1), poderia ser igual a π, 3π, 5π, e assim por diante.

A velocidade da onda é a velocidade com a qual temos de nos deslocar ao longo da onda para que a fase de um determinado ponto permaneça constante, tal como uma crista particular de uma onda que se propaga ao longo de uma corda. Para uma onda se propagando no sentido $+x$, isso significa que $kx - \omega t$ permanece constante Derivando em relação ao tempo t, obtemos $\omega = k\, dx/dt$ ou

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Comparando esse resultado com a Equação (15.6), vemos que dx/dt é a velocidade da onda v. Por essa relação, algumas vezes v é chamada de *velocidade de fase* da onda (um nome me hor seria *módulo da velocidade de fase* da onda).

ONDAS MECÂNICAS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: os problemas sobre ondas pertencem a duas grandes categorias. Nos problemas de *cinemática* estamos interessados apenas na descrição do movimento. as grandezas relevantes são a velocidade da onda v, o comprimento de onda λ (ou o número de onda k), a frequência f (ou a frequência angular ω), a amplitude A, bem como a posição, a velocidade e a aceleração de partículas individuais no meio. Os problemas de *dinâmica* também usam conceitos das leis de Newton. como força e massa. Como exemplo, encontraremos posteriormente neste capítulo problemas que envolvem a relação da velocidade da onda com as propriedades mecânicas do meio

Não deixe de identificar a variável procurada, ou as variáveis procuradas, no problema. Em alguns casos, o problema pedirá que você encontre uma expressão para a função da onda.

PREPARAR *usando as seguintes passos.*

1 Faça uma lista das grandezas cujos valores são fornecidos Para ajudá-lo a visualizar a situação, é útil esboçar gráficos de y em função de x (como na Figura 15 9a) e de y em função de t (como na Figura 15 9b).

Anote os valores das grandezas conhecidas nos gráficos

2. Decida que equações precisará usar. Quando conhecemos qualquer par de grandezas do conjunto v f e λ, podemos usar a Equação (15. 1) ($v = \lambda f$) para achar a terceira grandeza (veja Exemplo 15 1). Se o problema envolver a frequência angular ω e ou o número de onda k, use as definições dessas grandezas e a Equação (15.6) ($\omega = vk$) Você também pode precisar das várias formas de função de onda dadas nas equações (15.3), (15.4) e (15.7).

3 Quando a velocidade da onda não for conhecida e você não tiver informações suficientes para determiná-la usando $v = \lambda f$ você poderá usar a relação entre v e as propriedades mecânicas do sistema. (Na próxima seção, deduziremos essa relação para ondas em uma corda.)

EXECUTAR o problema para as grandezas desconhecidas usando as equações que você selecionou. em alguns problemas tudo o que você precisa fazer é encontrar o valor de uma das variáveis da onda.

Se o problema pedir para determinar a função da onda, você precisa conhecer A e mais duas grandezas entre v, λ e f (ou v, k e ω). Assim que obtiver essa informação, você poderá usá-la nas equações (15 3), (15.4) ou (15.7) para achar a função de onda específica para o problema em questão. Assim que o fizer você poderá encontrar o valor de y em qualquer ponto (valor de x) e em qualquer tempo, substituindo na função de onda

AVALIAR a sua resposta. olhe para os resultados com um olhar crítico. Verifique se os valores de v λ e f (ou v ω e k) estão de acordo com as relações dadas na Equação (15.1) ou na Equação (15.6). Se você tiver calculado a função da onda, verifique um ou mais casos especiais para os quais você pode adivinhar quais serão os resultados.

Exemplo

ONDA NA CORDA DE UM VARAL Seu primo Tobias está brincando com a corda do seu varal de roupas. Ele desamarra uma das extremidades da corda, mantém a corda esticada e faz essa extremidade oscilar para cima e para baixo senoidalmente com uma amplitude de 0,075 m e uma frequência igual a 2,0 Hz A velocidade da onda é $v = 12,0$ m/s. No instante $t = 0$ a extremidade possui um deslocamento positivo máximo e está em repouso. Suponha que nenhuma onda seja refletida na extremidade afastada para perturbar a configuração. a) Ache a amplitude. a frequência angular, o período, o comprimento de onda e o número de onda desta onda. b) Escreva uma função de onda que descreva a onda. c) Escreva equações para o deslocamento em função do tempo na extremidade da corda que Tobias segura e em um ponto situado a 3,0 m dessa extremidade

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR *este é um problema de cinemática sobre o movimento da corda do varal.* Como Tobias move a mão de uma forma senoidal, ele produz uma onda senoidal que se propaga pela corda. Assim. podemos usar todas as expressões que deduzimos nesta seção. As variáveis que queremos encontrar no item (a) são a amplitude A, a frequência angular ω, o período T o comprimento de onda λ e o número de onda k, então. precisaremos usar as equações que relacionam essas grandezas. Nos itens (b) e (c) as 'variáveis que queremos encontrar são, na verdade. expressões para o deslocamento. para encontrá-las, usamos as equações gerais da função de onda de uma onda senoidal.

PREPARAR uma fotografia da corda do varal no tempo $t = 0$ se pareceria com a Figura 15.9a, com o deslocamento máximo em $x = 0$ (a extremidade que Tobias segura em sua mão). Tomamos o sentido $+x$ como o sentido em que a onda se propaga, então podemos usar as equações (15.4) e (15.7) para descrever o deslocamento da corda em função da posição x e do tempo t. Podemos também usar as relações $f = 1/T$, $\omega = 2\pi f$, $k = \pi/\lambda$, $v = \lambda f$ e $\omega = kv$.

EXECUTAR (a) A amplitude A da onda é a amplitude do movimento da extremidade da corda, $A = 0{,}075$ m. Da mesma forma, a frequência da onda f é igual a 2,0 Hz, assim como a frequência da extremidade da corda. A frequência angular é dada por

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad/ciclo})(2{,}0 \text{ ciclos/s}) = 4{,}0\pi \text{ rad/s}$$
$$= 12{,}6 \text{ rad/s}$$

O período é $T = 1/f = 0{,}5$ s. Obtemos o comprimento de onda pela Equação (15.1):

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3{,}0 \text{ m/s}}{2{,}0 \text{ s}^{-1}} = 6{,}0 \text{ m}$$

Achamos o número de onda pela Equação (15.5) ou (15.6):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{6{,}0 \text{ m}} = 1{,}05 \text{ rad/m} \qquad \text{ou}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{4{,}0\,\pi \text{ rad/s}}{12{,}0 \text{ m/s}} = 1{,}05 \text{ rad/m}$$

(b) Como encontramos os valores de A, T e λ no item (a), podemos escrever a função de onda usando a Equação (15.4):

$$y(x,t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$
$$= (0{,}075 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{x}{6{,}0 \text{ m}} - \frac{t}{0{,}5 \text{ s}}\right)$$
$$= (0{,}075 \text{ m})\cos[(1{,}05 \text{ rad/m})x - (12{,}6 \text{ rad/s})t]$$

Poderíamos também ter obtido essa mesma relação partindo da Equação (15.7) e usando os valores de ω e de k obtidos no item (a).

(c) Com a nossa escolha do sentido positivo do eixo Ox, os dois pontos em questão são $x = 0$ e $x = +3{,}0$ m. Para cada ponto podemos obter uma expressão para o deslocamento em função do tempo substituindo esses valores na função de onda encontrada no item (b):

$$y(x = 0, t) = (0{,}075 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{0}{6{,}0 \text{ m}} - \frac{t}{0{,}5 \text{ s}}\right)$$
$$= (0{,}075 \text{ m})\cos(12{,}6 \text{ rad/s})t$$

$$x = +3{,}0 \text{ m}, t \qquad (0{,}075 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{3{,}0 \text{ m}}{6{,}0 \text{ m}} - \frac{t}{0{,}5 \text{ s}}\right)$$
$$(0{,}075 \text{ m})\cos[\pi - (12{,}6 \text{ rad/s})t]$$
$$= -(0{,}075 \text{ m})\cos(12{,}6 \text{ rad/s})t$$

AVALIAR No item (b), a quantidade $(1{,}05 \text{ rad/m})x - (12{,}6 \text{ rad/s})t$ é a *fase* de um ponto x na corda no tempo t. A diferença de fase entre esses dois pontos no item (c) é de meio comprimento de onda ($\lambda/2 = 6{,}0 \text{ m}/2 = 3{,}0$ m). Os dois pontos oscilam em MHS com a mesma frequência e amplitude, porém as oscilações estão defasadas de metade do ciclo. Assim, embora um gráfico de y em função de t para o ponto $x = 0$ seja uma curva em co-seno (como a Figura 15.9b), um gráfico de y em função de t para o ponto $x = 3{,}0$ m é um co-seno *negativo* (o mesmo que uma curva de co-seno deslocada em meio ciclo).

Usando a relação anterior para $y(x = 0, t)$ no item (c), você é capaz de mostrar que a extremidade da corda $x = 0$ no instante $t = 0$ está em repouso conforme afirmamos no início deste exemplo? (*Sugestão*: calcule a velocidade de y nesse ponto derivando y em relação a t.)

Velocidade e aceleração de uma partícula em uma onda senoidal

Conhecendo a função de onda, podemos obter uma expressão para a velocidade transversal de qualquer *partícula* em uma onda transversal. Vamos designá-la por v_y, para distingui-la da velocidade v da onda. Para achar a velocidade transversal v_y em um ponto particular x derivamos a função de onda $y(x, t)$ em relação a t mantendo x constante. Se a função de onda for

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

então

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad (15.9)$$

O símbolo nesta relação é um ∂ modificado, usado para lembrar que $y(x,t)$ é uma função de *duas* variáveis e que somente uma das duas variáveis (t) está variando. A outra variável (x) permanece constante porque estamos considerando um ponto particular da corda. Este tipo de derivada chama-se *derivada parcial*. Caso você ainda não tenha estudado esse assunto em seu curso de cálculo, não se preocupe: esse conceito é muito simples.

A Equação (15.9) mostra que a velocidade transversal de uma partícula varia com o tempo, como era de se esperar para um movimento harmônico simples. A velocidade máxima da partícula é igual a ωA; esse valor pode ser igual, menor ou maior do que a velocidade de propagação da onda v, dependendo da amplitude e da frequência da onda.

A *aceleração* de uma partícula é dada pela derivada parcial de *segunda* ordem de $y(x,t)$ em relação a t:

$$a_y(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t)$$
$$= -\omega^2 y(x,t) \qquad (15.10)$$

A aceleração de uma partícula é igual a $-\omega^2$ vezes o seu deslocamento, resultado igual ao obtido na Seção 13.2 para um MHS.

Podemos também calcular as derivadas parciais de $y(x, t)$ em relação a x, enquanto t permanece constante. Esse procedimento permite estudar a forma da corda em qualquer instante, como em uma sucessão de fotografias

instantâneas. A primeira derivada $\partial y(x,t)/\partial x$ fornece a *inclinação* da corda em qualquer ponto. A segunda derivada em relação a x fornece a *curvatura* da corda.

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t) = -k^2 y(x,t) \quad (15.11)$$

Pelas equações (15.10) e (15.11) e usando a relação $\omega = vk$, concluímos que

$$\frac{\partial^2 y(x,t)/\partial t^2}{\partial^2 y(x,t)/\partial x^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

(equação de onda) (15.12)

Derivamos a Equação (15.12) para uma onda se propagando no sentido $+x$. Você pode usar os mesmos passos para mostrar que a função de onda para uma onda senoidal se propagando no sentido $-x$ — $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$ — também satisfaz essa equação. A função de onda também satisfaz esta relação; convidamos você a verificar isso.

A Equação (15.12), denominada **equação de onda**, é uma das mais importantes da física. Quando ela ocorre, sabemos que existe uma onda se propagando ao longo do eixo Ox com velocidade v. A perturbação não precisa ser necessariamente uma onda senoidal; na próxima seção veremos que *qualquer* onda se propagando ao longo de uma corda é descrita pela Equação (15.12), quer ela seja periódica ou não (ver o Problema 15.61). No Capítulo 32 mostraremos que os campos elétricos e magnéticos satisfazem a equação de onda; verifica-se que a velocidade da onda é a velocidade da luz, o que nos leva a concluir que a luz é uma onda eletromagnética.

A Figura 15.10a mostra a velocidade v_y e a aceleração a_y, fornecidas pelas equações (15.9) e (15.10) para diversos pontos ao longo de uma corda à medida que uma onda senoidal se propaga. Observe que, nos pontos em que a curvatura da corda é voltada para cima ($\partial^2 y/\partial x^2 > 0$), a aceleração do ponto é positiva ($a_y = \partial^2 y/\partial t^2 > 0$); isso decorre da equação de onda, Equação (15.12). Pelo mesmo motivo, a aceleração é negativa ($a_y = \partial^2 y/\partial t^2 < 0$) nos pontos em que a curvatura da corda é voltada para baixo ($\partial^2 y/\partial x^2 < 0$) e a aceleração é igual a zero ($a_y = \partial^2 y/\partial t^2 = 0$) nos pontos de inflexão, em que a curvatura da corda é igual a zero ($\partial^2 y/\partial x^2 = 0$). Enfatizamos novamente que v_y e a_y são, respectivamente, a velocidade e a aceleração transversais de pontos sobre a corda; esses pontos se movem ao longo da direção y e não ao longo da direção da propagação da onda. A Figura 15.10b indica os movimentos transversais de diversos pontos sobre a corda.

O conceito de equação de onda é igualmente útil no estudo da propagação de ondas *longitudinais* e tudo o que foi dito anteriormente sobre a equação de onda pode ser adaptado a esse caso. A grandeza y continua a medir o deslocamento da partícula do meio a partir da sua posição de equilíbrio; a diferença é que no caso de uma onda longitudinal esse deslocamento é *paralelo* ao eixo Ox em vez de perpendicular a ele. No Capítulo 16 estudaremos ondas longitudinais de modo mais detalhado.

Teste sua compreensão da Seção 15.3 A Figura 15.8 mostra uma onda senoidal de período T em uma corda nos tempos $0, \frac{1}{8}T, \frac{2}{8}T, \frac{3}{8}T, \frac{4}{8}T, \frac{5}{8}T, \frac{6}{8}T, \frac{7}{8}T$ e T. a) Em que momento o ponto A da corda está se movendo para cima com velocidade máxima? b) Em que momento o ponto B da corda possui a maior aceleração para cima? c) Em que momento o ponto C da corda possui aceleração para baixo, mas velocidade para cima? ●

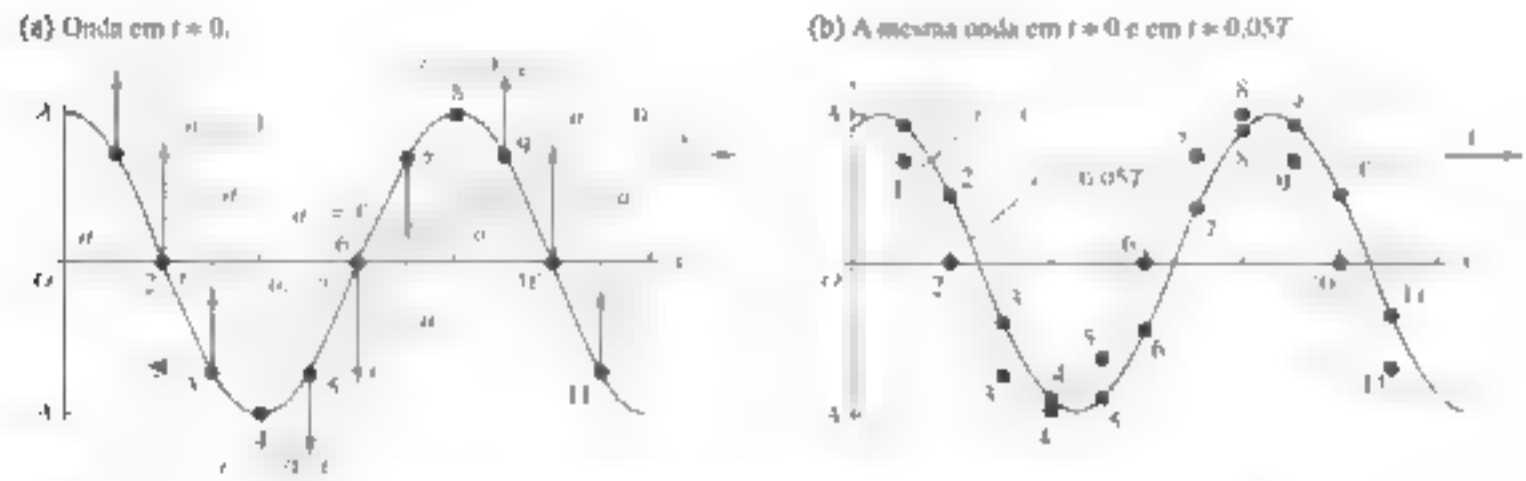

(a) Onda em t = 0.
(b) A mesma onda em t = 0 e em t = 0,05T
0,05T
• A aceleração a_y em cada ponto da corda é proporcional ao deslocamento y naquele ponto.
• A aceleração é para cima quando a corda se curva para cima; para baixo quando a corda se curva para baixo.

Figura 15.10 (a) Quatro instantâneos de uma onda senoidal se propagando no sentido $+x$ com velocidade v. Os pontos assinalados mostram o movimento transversal (ou seja, de diversos pontos sobre a corda. (b) Uma partícula no ponto 1 é deslocada para o ponto 1′, uma partícula no ponto 2 é deslocada para o ponto 2′ e assim por diante.

15.4 Velocidade de uma onda transversal

Uma das principais propriedades de qualquer onda é sua velocidade de propagação. A velocidade da luz no ar é muito maior do que a velocidade do som no ar (3.0×10^8 m/s contra 344 m/s); essa diferença explica por que você ouve o som da trovoada algum tempo depois de ver a luz do relâmpago. Nesta seção estudaremos o que determina a velocidade de propagação de um tipo particular de onda: as ondas transversais em uma corda vibrante. O estudo da velocidade dessas ondas é importante, pois constitui uma parte essencial da análise de instrumentos musicais que possuem cordas esticadas, conforme veremos posteriormente neste mesmo capítulo. Além disso, verificou-se que as velocidades de muitos tipos de ondas mecânicas possuem expressões matemáticas basicamente iguais à expressão da velocidade da onda em uma corda.

As grandezas físicas que determinam a velocidade de uma onda transversal em uma corda são a *tensão* na corda e sua *massa por unidade de comprimento* (também chamada de *massa específica linear* ou *densidade linear*). Podemos supor que o aumento da tensão produz um aumento da força restauradora que tende a esticar a corda quando ela é perturbada, provocando um aumento na velocidade da onda. Podemos supor também que o aumento da massa deve fazer o movimento ficar mais lento, causando uma diminuição da velocidade da onda. Verificou-se que essas duas hipóteses estão certas. Deduziremos a relação que envolve a velocidade da onda, a tensão e a densidade linear usando dois métodos diferentes. O primeiro se baseia em conceitos simples e considera uma forma de onda específica, o segundo é mais geral e também mais formal. Você pode escolher qual deles prefere.

Velocidade da onda em uma corda: primeiro método

Considere uma corda perfeitamente flexível (Figura 15.11). Na posição de equilíbrio, a tensão é F e a densidade linear (massa por unidade de comprimento) é igual a μ. (Quando uma parte da corda é deslocada de sua posição de equilíbrio, a massa por unidade de comprimento diminui um pouco e a tensão aumenta um pouco.) Podemos desprezar o peso da corda, de modo que, quando ela está na posição de equilíbrio, forma uma linha reta perfeita, como indicado na Figura 15.11a.

Começando em $t = 0$, aplicamos uma força transversal constante F_y na extremidade esquerda da corda. Poderíamos esperar que essa extremidade se movesse com aceleração constante; isso ocorreria se a força fosse aplicada a uma partícula *puntiforme*. Porém, neste caso, o efeito da força F_y é aumentar sucessivamente a quantidade de massa que entra em movimento. Conforme indicado na Figura 15.11b, a onda se desloca com velocidade constante v; portanto, o ponto P que

(a) A corda está em equilíbrio.

(b) Uma parte da corda está em movimento.

Esta parte da corda está se movendo para cima com velocidade v_y.
Esta parte da corda ainda está em repouso.
A perturbação se propaga com velocidade de onda v
v
vt
P

Figura 15.11 Propagação de uma onda transversal em uma corda.

separa a parte da onda que está em repouso da parte em movimento se desloca com a mesma velocidade constante v.

Como indicado na Figura 15.11b, todos os pontos da parte da corda que está em movimento deslocam-se com uma *velocidade* v, constante, e não com aceleração constante. Para entender como isso ocorre, notamos que o *impulso* da força F_y até o instante t é dado por $F_y t$. De acordo com o teorema do impulso-momento linear (Seção 8.1), o impulso é igual à variação total do componente transversal do momento ($mv_y - 0$) da parte da corda que está em movimento. Como o sistema não possuía *nenhum* momento linear o impulso é igual ao momento linear total no instante t:

$$F_y t = mv_y$$

Portanto, o momento linear total deve crescer proporcionalmente com o tempo. Mas, como o ponto P que separa as duas partes se desloca com velocidade constante, o comprimento da corda que está em movimento e a massa total m em movimento são proporcionais ao tempo t durante o qual a força atua. Assim, a *variação* do momento linear deve estar intimamente associada com a massa crescente que está em movimento e não com a velocidade crescente de um elemento de massa individual. Ou seja, mv_y varia em virtude da variação da massa m e não por causa de v_y.

No tempo t, a extremidade esquerda da corda se deslocou uma distância $v_y t$, e o ponto P da fronteira se deslocou uma distância vt. A força total sobre a extremidade esquerda da corda possui componentes F e F_y. Por que F? Não existe nenhum movimento ao longo da direção da corda, portanto não existem forças desequilibradas na direção horizontal. Logo, o módulo F do componente da força na direção horizontal não varia quando a corda é deslocada. Na posição fora do equilíbrio, a tensão é dada por $(F^2 + F_y^2)^{1/2}$ (maior do que F) e a corda está ligeiramente

Para deduzir uma expressão para a velocidade da onda v, aplicamos novamente o teorema do impulso-momento linear no instante t para a parte da corda que está em movimento, ou seja, para a parte situada ao lado esquerdo do ponto P na Figura 15.11b. O *impulso* transversal (força transversal vezes o tempo) é igual à variação do *momento linear* transversal (massa vezes a componente transversal da velocidade) da parte da corda que está em movimento. O impulso da força transversal F_y até o instante t é dado por $F_y t$. Na Figura 15.11b, o triângulo retângulo que possui vértice no ponto P com lados $v_y t$ e vt é semelhante ao triângulo retângulo cujo vértice está no ponto onde se encontra a mão e possui lados F_y e F. Portanto,

$$\frac{F}{F_y} = \frac{vt}{v_y t} \qquad F_y = F\frac{v_y}{v}$$

e

$$\text{Impulso transversal} = F_y t = F\frac{v_y}{v}t$$

A massa da parte da corda que está em movimento é igual ao produto da densidade linear μ vezes o comprimento vt, ou seja, μvt. O momento linear transversal é o produto da massa pela velocidade transversal v_y:

$$\text{Momento linear transversal} = (\mu vt)v_y$$

Observamos novamente que o momento linear cresce com o tempo *não* porque a massa se move com velocidade maior, conforme o caso usual descrito no Capítulo 8, mas porque *mais massa* entra em movimento. Porém, o impulso da força F ainda é igual à variação do momento linear total do sistema. Aplicando essa relação, encontramos

$$F\frac{v_y}{v}t = \mu v t v_y$$

Explicitando v, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

(velocidade de uma onda transversal em uma corda) (15.13)

A Equação (15.13) confirma nossa previsão de que a velocidade da onda v deve aumentar quando a tensão F aumenta, porém deve diminuir quando a densidade linear μ aumenta (Figura 15.12).

Note que v_y não aparece na Equação (15.13), portanto, a velocidade da onda não depende de v_y. Nossos cálculos consideraram apenas um tipo especial de pulso, porém podemos considerar que uma perturbação ondulatória com qualquer forma seja uma superposição de pulsos com diferentes valores de v_y. Assim, embora a Equação (15.13) tenha sido deduzida para este caso particular, ela vale para quaisquer movimentos de uma onda transversal em uma corda, incluindo a onda senoidal e outras formas de onda estudadas na Seção 15.3. Note que a velocidade não depende nem da amplitude nem da frequência da onda, concordando com a hipótese da Seção 15.3.

Figura 15.12 Estes cabos possuem uma densidade linear μ grande e uma tensão F relativamente pequena. Portanto, quando um cabo é perturbado — por exemplo, quando um pássaro pousa sobre ele —, uma onda transversal se propaga ao longo de seu comprimento com uma velocidade muito pequena: $v = \sqrt{F/\mu}$.

Velocidade da onda em uma corda segundo método

Faremos agora uma dedução alternativa da Equação (15.13). Caso não esteja familiarizado com o conceito de derivada parcial, você pode omitir o estudo desta dedução. Aplicamos a segunda lei de Newton, $\sum F = ma$, a um pequ

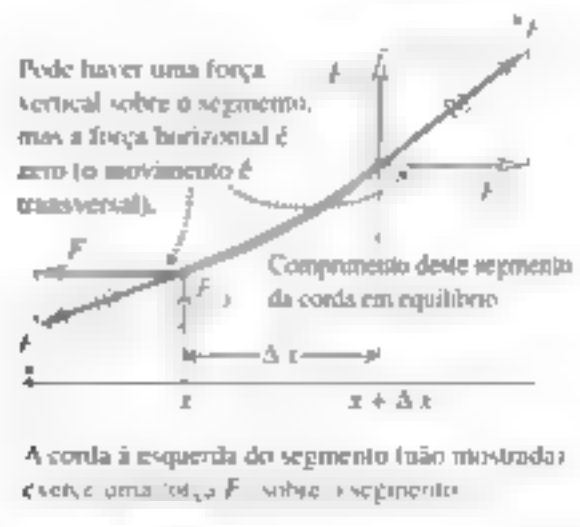

A corda à direita do segmento (não mostrada) exerce uma força F sobre o segmento
Pode haver uma força vertical sobre o segmento, mas a força horizontal é zero (o movimento é transversal).
Comprimento deste segmento da corda em equilíbrio
Δx
x
x + Δx
A corda à esquerda do segmento (não mostrada) exerce uma força F sobre o segmento

Figura 15.13 Diagrama do corpo livre para um segmento da corda. A [illegible] da corda é tangente à corda no ponto onde a [illegible]

no segmento da corda em equilíbrio cujo comprimento é igual a Δx (Figura 15.13). A massa do segmento é dada por $m = \mu \Delta x$, as forças nas extremidades são decompostas nos componentes x e y. Os componentes na direção x possuem o mesmo módulo F e a resultante é igual a zero porque o movimento é transversal e não existe nenhum componente da aceleração na direção x. Para obter F_{1y} e F_{2y} notamos que a razão F_{1y}/F é igual ao módulo da *inclinação* da corda no ponto x, e que F_{2y}/F é igual ao módulo da inclinação da corda no ponto $x + \Delta x$. Levando em conta os sinais apropriados, obtemos

$$\frac{F_{1y}}{F} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x \qquad \frac{F_{2y}}{F} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \tag{15.14}$$

A notação com índices serve para lembrar que as derivadas são calculadas nos pontos x e $x + \Delta x$, respectivamente. Pela Equação (15.14), verificamos que o componente y da força é dado por

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] \tag{15.15}$$

Igualamos agora F_y da Equação (15.15) com a massa $\mu \Delta x$ vezes o componente y da aceleração $\partial^2 y/\partial t^2$. Obtemos

$$F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.16}$$

ou, dividindo por $F \Delta x$,

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.17}$$

Tomamos agora o limite quando $\Delta x \to 0$. Nesse limite, o lado esquerdo da Equação (15.17) fornece a derivada de $\partial y/\partial x$ em relação a x (para t constante), ou seja, a derivada (parcial) de segunda ordem de y em relação a x:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.18}$$

Finalmente, chegamos ao ponto mais importante da nossa dedução. A Equação (15.18) possui exatamente a mesma forma da *equação de onda*, Equação (15.12), que foi deduzida no final da Seção 15.3. Aquela equação e a Equação (15.18) descrevem exatamente o mesmo movimento ondulatório, portanto elas devem ser idênticas. Comparando essas duas equações, para que elas sejam idênticas, devemos ter

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{15.19}$$

que é a mesma relação da Equação (15.13).

No decorrer da dedução, não fizemos nenhuma hipótese acerca da forma da onda. Como a dedução nos levou a obter novamente a Equação (15.12), a equação de onda, concluímos que ela é válida para qualquer tipo de forma de onda que se propaga em uma corda.

Velocidade das ondas mecânicas

As Equações (15.13) ou (15.19) fornecem a velocidade da onda só para o caso especial de ondas mecânicas sobre um fio ou corda esticados. É interessante que, para muitos tipos de ondas mecânicas, inclusive ondas em uma corda, a expressão para a velocidade de onda possui a mesma forma geral

$$v = \sqrt{\frac{\text{Força restauradora devolvendo o sistema ao equilíbrio}}{\text{Inércia resistindo à volta ao equilíbrio}}}$$

Para interpretar essa expressão, vamos estudar o caso já visto das ondas sobre uma corda. A tensão F na corda desempenha o papel da força restauradora, tendendo a levar a corda de volta à sua configuração sem perturbações em equilíbrio. A massa da corda — ou, mais exatamente, a densidade linear — fornece a inércia que impede a corda de voltar instantaneamente ao equilíbrio. Obtemos, assim, $v = \sqrt{F/\mu}$ para velocidade de ondas em uma corda.

No Capítulo 16 veremos uma expressão semelhante para a velocidade das ondas sonoras em um gás. Podemos dizer, grosso modo, que a pressão do gás fornece a força que tende a devolver o gás a seu estado de equilíbrio quando uma onda sonora passa por ele. A inércia é dada pela densidade, ou massa por unidade de volume, do gás.

Exemplo

CALCULANDO A VELOCIDADE DA ONDA Uma das extremidades de uma corda de náilon está presa a um suporte fixo no topo de um poço vertical de uma mina com profundidade igual a 80,0 m (Figura 15.14). A corda fica esticada pela ação do peso de uma caixa de minérios com massa igual a 20,0 kg presa na extremidade inferior da corda. A massa da corda é igual a 2,0 kg. Um geólogo no fundo da mina, balançando a corda lateralmente, envia um sinal para seu colega que está no topo da mina. a) Qual é a velocidade da onda transversal que se propaga na corda? b) Sabendo que um ponto da corda executa um MHS com frequência igual a 2,0 Hz, qual é o comprimento de onda da onda?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: no item (a) a variável procurada é a velocidade da onda. Essa parte envolve *dinâmica*, ou seja, a relação entre a velocidade da onda e as propriedades da corda (tensão e densidade linear). O item (b) envolve cinemática, pois precisamos saber a relação entre velocidade da onda, frequência da onda e comprimento da onda. (A variável procurada é, na verdade, o número de comprimentos de onda que cabem na extensão da corda.)

Vamos supor que a tensão na corda seja dada pelo peso da caixa de minérios. Na verdade, o peso da própria corda contribui para a tensão, o que significa que a tensão é diferente na parte superior e

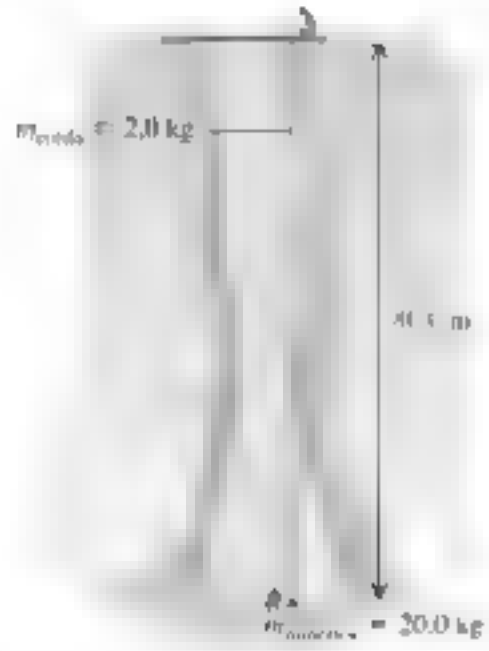


Figura 15.14 Enviando um sinal por meio de uma onda transversal em uma corda vertical.

na parte inferior da corda. Desprezaremos esse efeito aqui, já que o peso da corda é pequeno se comparado ao dos minérios.

PREPARAR usaremos a relação $v = \sqrt{F/\mu}$ no item (a). Se desprezarmos o peso da própria corda, a tensão F é exatamente igual ao peso da caixa. No item (b), usaremos a equação $v = f\lambda$ para achar o comprimento de onda, que então compararemos com a extensão de 80,0 m da corda.

EXECUTAR (a) A tensão na corda (devido à caixa de minérios) é

$$F = m_{caixa}g = (20{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2) = 196\ \text{N}$$

e a massa por unidade de comprimento da corda é

$$\mu = \frac{m_{corda}}{l} = \frac{2{,}0\ \text{kg}}{80{,}0\ \text{m}} = 0{,}0250\ \text{kg/m}$$

Assim, substituindo na Equação (15.13), a velocidade da onda é

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{196\ \text{N}}{0{,}0250\ \text{kg/m}}} = 88{,}5\ \text{m/s}$$

(b) Substituindo na Equação (15.1),

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{88{,}5\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{s}^{-1}} = 44{,}3\ \text{m}$$

A extensão da corda é 80,0 m, então o número de ciclos de onda na corda é

$$\frac{80{,}0\ \text{m/s}}{44{,}3\ \text{m/ciclo}} = 1{,}81\ \text{ciclos}$$

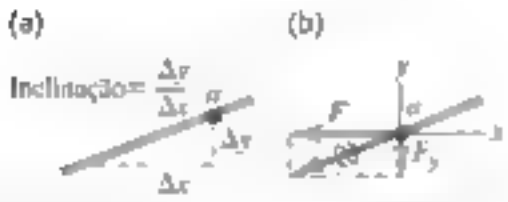


Figura 15.15 (a) O ponto a de uma corda na qual se propaga uma onda da esquerda para a direita. (b) Componentes da força exercida pela parte da direita da corda sobre a parte que está à esquerda do ponto a.

AVALIAR: se levássemos em consideração o peso da corda, a tensão seria maior na parte superior da corda do que na parte inferior. Assim, a velocidade aumentaria e o comprimento de onda diminuiria à medida que a onda fosse subindo na corda. Você é capaz de verificar que a velocidade da onda é igual a 92,9 m/s no topo da mina?

Teste sua compreensão da Seção 15.4 As seis cordas de uma guitarra são de mesmo comprimento e quase a mesma tensão, mas possuem espessuras diferentes. Em qual das cordas as ondas se propagam mais rápido? (i) na corda mais espessa; (ii) na corda mais fina; (iii) a velocidade de onda é a mesma em todas as cordas. ∎

15.5 Energia no movimento ondulatório

Todo movimento ondulatório possui uma *energia* associada a ele. São exemplos a energia que nós recebemos da luz solar e os efeitos destrutivos dos terremotos e das grandes ondas de uma ressaca. Para produzir qualquer um dos movimentos ondulatórios discutidos neste capítulo, devemos aplicar força a uma parte do meio onde a onda se propaga; o ponto sobre o qual a força é exercida se move, portanto realizamos *trabalho* sobre o sistema. À medida que a onda se propaga, cada porção do meio exerce uma força e realiza um trabalho sobre a porção adjacente. Desse modo, a onda pode transportar energia de uma região do espaço para outra.

Para exemplificar o conceito de energia no movimento ondulatório vamos examinar novamente uma onda transversal em uma corda. Como a energia é transferida de uma porção da corda para outra? Imagine uma onda se propagando da esquerda para a direita (no sentido positivo do eixo Ox) ao longo da corda e considere um ponto particular a sobre a corda (Figura 15.15a). A corda do lado esquerdo de a exerce uma força sobre o lado direito e vice-versa. Na Figura 15.15b a corda do lado esquerdo de a foi removida e a força que ela exerce em a é representada pelas componentes F e F_y, do mesmo modo que fizemos nas figuras 15.11 e 15.13. Note que F_y/F é igual ao valor negativo da *inclinação* da corda no ponto a, que também é dada por $\partial y/\partial x$. Levando em conta essas relações, obtemos

$$F_y(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \qquad (15.20)$$

Utilizamos o valor negativo porque F_y é negativa quando a inclinação é positiva. Escrevemos a força vertical na forma $F_y(x, t)$ para lembrar que esse valor pode se alterar em pontos diferentes ao longo da corda e em instantes diferentes.

Quando o ponto a se move ao longo da direção y, a força F_y realiza um *trabalho* sobre este ponto e, portanto, transfere energia para a parte da corda que está à direita do ponto a. A potência correspondente P (taxa de reali-

zação do trabalho) no ponto a é a força transversal $F_y(x, t)$ no ponto a vezes a velocidade transversal $v_y(x, t) = \partial y(x, t)/\partial t$ nesse ponto:

$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \quad (15.21)$$

Esta potência é a taxa *instantânea* com a qual a energia é transferida ao longo da corda. Esse valor depende da posição x da corda e do tempo t. Note que a energia é transferida somente nos pontos em que a inclinação é diferente de zero ($\partial y/\partial x$ diferente de zero), de modo que existe uma componente transversal da força de tensão, e quando a corda possui uma velocidade transversal diferente de zero ($\partial y/\partial t$ diferente de zero), de modo que a força transversal possa realizar trabalho.

A Equação (15.21) é válida para *qualquer* onda se propagando em uma corda, senoidal ou não. Quando a onda for senoidal, podemos usar a função de onda dada pela Equação (15.7), então obtemos

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A\cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} &= kA\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} &= \omega A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \\ P(x, t) &= Fk\omega A^2\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (15.22)$$

Usando as relações $\omega = vk$ e $v^2 = F/\mu$ podemos também escrever a Equação (15.22) na forma alternativa

$$P(x, t) = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t) \quad (15.23)$$

A função sen^2 nunca pode ser negativa, portanto a potência instantânea de uma onda senoidal ou é positiva (de modo que a energia flui no sentido positivo do eixo Ox), ou então é igual a zero (nos pontos onde não existe transferência de energia). A energia não pode nunca ser transferida no sentido oposto ao da propagação da onda (Figura 15.16).

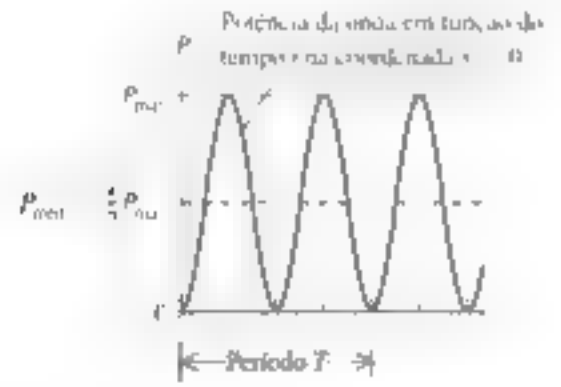


Figura 15.16 A potência instantânea $P(x, t)$ em uma onda senoidal é dada pela Equação (15.23), mostrada em função do tempo na coordenada $x = 0$. A potência nunca é negativa, o que significa que a energia nunca flui no sentido contrário à propagação da onda.

O valor máximo da potência instantânea $P(x,t)$ ocorre quando a função sen^2 atinge o valor igual a um:

$$P_{máx} = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \quad (15.24)$$

Para obter a potência *média* a partir da Equação (15.23) notamos que o valor *médio* da função sen^2 é igual a $\frac{1}{2}$, tomando-se a média em um ciclo completo. Portanto, a potência *média* é dada por

$$P_{méd} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2$$

(potência média, onda senoidal em uma corda) (15.25)

A potência média é apenas a metade da potência instantânea máxima (veja a Figura 15.16).

A taxa de transferência de energia é proporcional ao quadrado da amplitude e ao quadrado da frequência. Essa proporção é um resultado geral para ondas mecânicas de todos os tipos, inclusive ondas sísmicas (veja a fotografia no início deste capítulo). Para uma onda longitudinal, a taxa de transferência de energia quadruplica se a frequência for dobrada (para a mesma amplitude) ou se a amplitude for dobrada (para a mesma frequência).

O processo para as ondas eletromagnéticas é um pouco diferente. Embora a taxa média de transferência de energia seja proporcional ao quadrado da amplitude, assim como ocorre com as ondas mecânicas, ela independe do valor de ω.

Exemplo 15.5

POTÊNCIA EM UMA ONDA a) No Exemplo 15.2, qual é a taxa de transferência de energia máxima que Tobias fornece à corda? Ou seja, qual é a potência instantânea máxima? Suponha que a densidade linear da corda do varal seja $\mu = 0{,}250$ kg/m e que Tobias aplique uma tensão $F = 36{,}0$ N. b) Qual é a potência média? c) À medida que Tobias vai se cansando, a amplitude diminui. Qual é a potência média quando a amplitude diminui para 7,50 mm?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a variável que buscamos no item (a) é a potência instantânea máxima, enquanto nos itens (b) e (c) é a potência média. Como já vimos, as duas grandezas possuem valores diferentes para uma onda senoidal. Poderemos calcular os valores de ambas as grandezas porque no Exemplo 15.2 vimos todas as outras propriedades da onda.

PREPARAR: no item (a), usaremos a equação (15.24), e nos itens (b) e (c), usaremos a Equação (15.25).

EXECUTAR: (a) A potência instantânea máxima é

$$\begin{aligned} P_{máx} &= \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \\ &= \sqrt{(0{,}250\ \mathrm{kg/m})(36{,}0\ \mathrm{N})}\,(4{,}0\ \pi\ \mathrm{rad/s})^2(0{,}075\ \mathrm{m})^2 \\ &= 2{,}66\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

(b) Usando as equações (15.24) e (15.25), a potência média é a metade da potência instantânea máxima, portanto

$$P_{méd} = \frac{1}{2}(2{,}66\ \mathrm{W}) = 1{,}33\ \mathrm{W}$$

(c) A nova amplitude é igual a 1/10 do valor que usamos nos itens (a) e (b). A potência média é proporcional ao *quadrado* da amplitude, então a nova potência média é

$$P_{\text{med}} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 (1{,}33\ \text{W}) = 0{,}0133\ \text{W} = 13{,}3\ \text{mW}$$

AVALIAR a potência instantânea máxima no item (a) ocorre quando a grandeza $\text{sen}^2(kx - \omega t)$ na Equação (15.23) é igual a 1. Para qualquer valor dado de x, isso acontece duas vezes a cada período de onda — uma vez quando a função seno é igual a +1 e outra vez quando é igual a −1. A potência instantânea *mínima* é zero: isso ocorre quando $\text{sen}(kx - \omega t) = 0$, o que também acontece duas vezes a cada período.

Será que você consegue confirmar que os valores dados de μ e F produzem a velocidade de onda mencionada no Exemplo 15.2?

Intensidade de onda

Ondas em uma corda transportam energia em apenas uma dimensão do espaço (ao longo do sentido da corda). Mas outros tipos de ondas, inclusive ondas sonoras no ar e ondas sísmicas no corpo da Terra, transportam energia em todas as três dimensões do espaço. Para ondas que se propagam em três dimensões, definimos a **intensidade** (simbolizada pela letra I) como *a taxa média de tempo em que a energia é transportada pela onda, por unidade de área*, sobre uma superfície perpendicular à direção de propagação. Ou seja, a intensidade I é a potência média por unidade de área, geralmente medida em watts por metro quadrado (W/m^2).

Se as ondas se expandem igualmente em todas as direções a partir de uma fonte, a intensidade a uma distância r da fonte é inversamente proporcional a r^2 (Figura 15.17). Isso decorre diretamente da conservação da energia. Se a potência fornecida pela fonte é P, então a intensidade média I_1 por uma esfera com um raio r_1 e uma área de superfície $4\pi r_1^2$ é

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

A intensidade média I_2 através de uma esfera com um raio r_2 diferente é dada por uma expressão similar. Se nenhuma energia é absorvida entre as duas esferas, a potência P deve ser igual para ambas, e

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

(lei do quadrado inverso para a intensidade) (15.26)

A intensidade I em qualquer distância r é, portanto, inversamente proporcional a r^2. Essa relação é chamada de *lei do inverso do quadrado* para a intensidade.

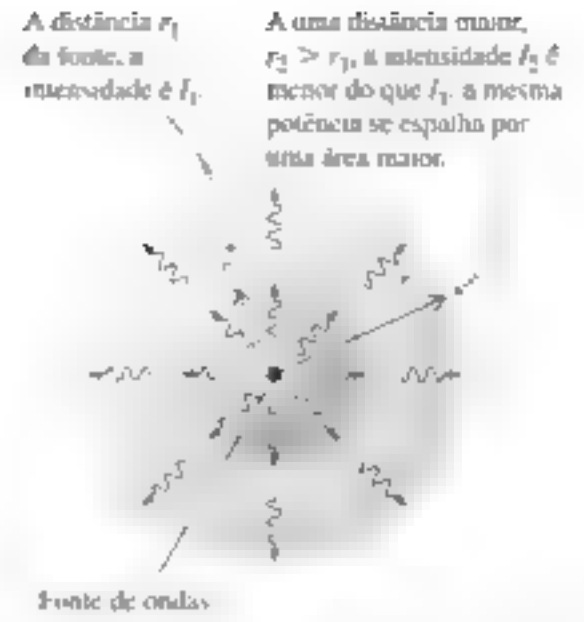

A distância r_1 da fonte, a intensidade é I_1.
A uma distância maior, $r_2 > r_1$, a intensidade I_2 é menor do que I_1, a mesma potência se espalha por uma área maior.
Fonte de ondas

Figura 15.17 Quanto maior a distância de uma fonte de ondas, maior a área sobre a qual a potência da onda é distribuída e menor a intensidade da onda.

Exemplo

A LEI DO INVERSO DO QUADRADO Uma sirene de alarme de tornado instalada sobre um alto poste irradia ondas sonoras uniformemente em todas as direções. A uma distância de 15,0 m a intensidade do som é 0,250 W/m^2. A que distância da sirene a intensidade é 0,010 W/m^2?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. como as ondas se espalham uniformemente em todas as direções, podemos usar a lei do inverso do quadrado. A variável procurada é a distância da fonte de ondas.

PREPARAR a relação a ser usada é a Equação (15.26). Em dado a distância $r_1 = 15{,}0$ m em que a intensidade é $I_1 = 0{,}250\ \text{W/m}^2$. Queremos descobrir a distância em que a intensidade é $I_2 = 0{,}010\ \text{W/m}^2$.

EXECUTAR resolvemos a Equação (15.26) para r_2:

$$r_2 = r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = (15{,}0\ \text{m})\sqrt{\frac{0{,}250\ \text{W/m}^2}{0{,}010\ \text{W/m}^2}} = 75{,}0\ \text{m}$$

AVALIAR para verificarmos nossa resposta, observe que ela é cinco vezes maior do que r_1. Pela lei do inverso do quadrado, a intensidade I_2 deveria ser $1/5^2 = 1/25$ de I_1, e, na verdade, é.

Ao usarmos a lei do inverso do quadrado, supusemos que o som se propagasse em linhas retas desde a sirene. Uma solução mais realista deste problema levaria em conta a reflexão das ondas sonoras a partir do solo. Contudo, tal solução está além dos nossos objetivos.

Teste sua compreensão da Seção 15.5 Cada uma de quatro cordas idênticas transporta uma onda senoidal de frequência 10,0 Hz. A tensão na corda e a amplitude da onda são diferentes para cordas diferentes. Liste as seguintes cordas em ordem do maior para o menor valor da potência média da onda. (i) tensão 10 N, amplitude 1,0 mm; (ii) tensão 40 N, amplitude 1,0 mm; (iii) tensão 10 N, amplitude 4,0 mm; (iv) tensão 20 N, amplitude 2,0 mm. ∎

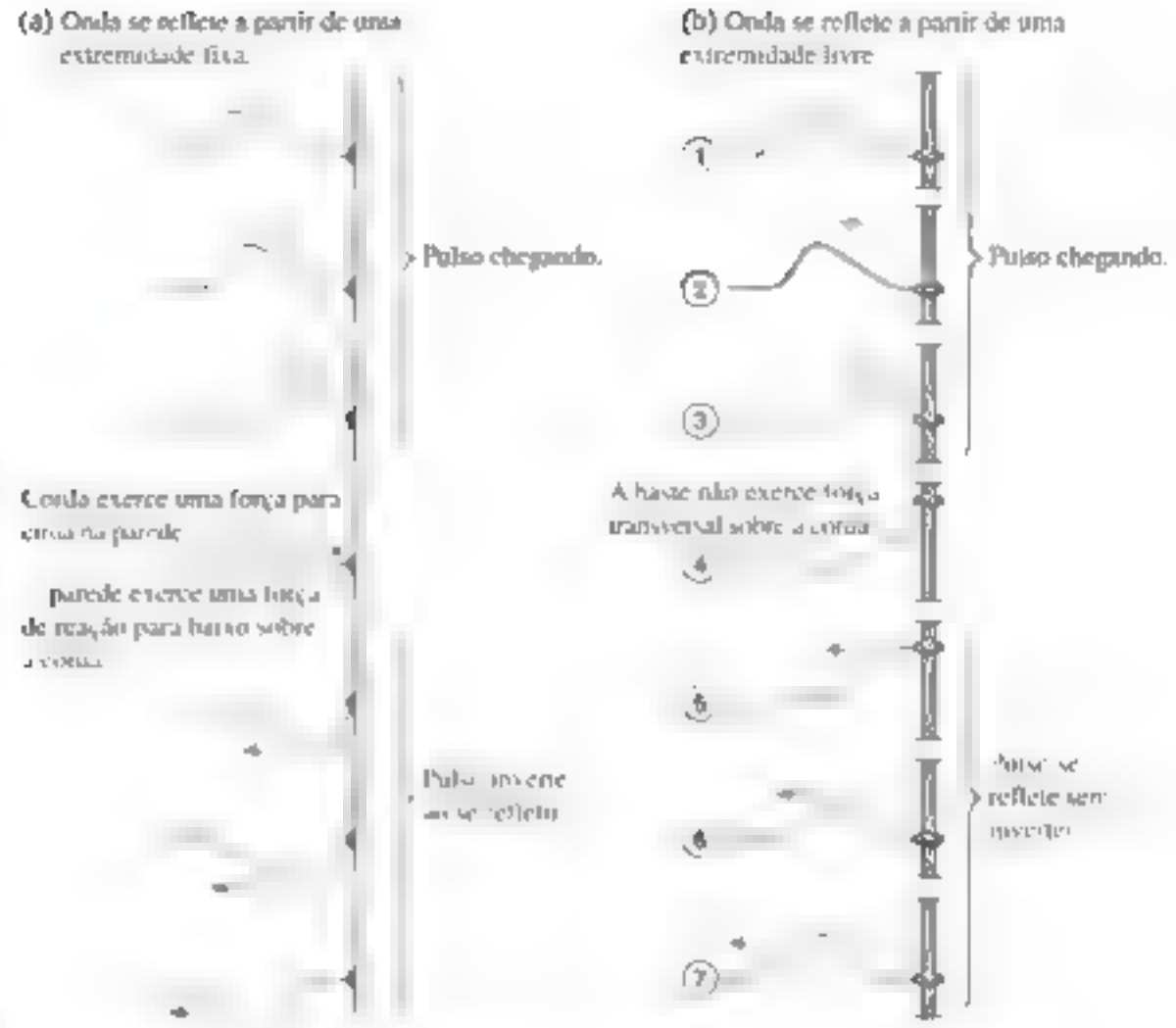

(a) Onda se reflete a partir de uma extremidade fixa.
Pulso chegando.
A parede exerce uma força de reação para baixo sobre a corda.
Pulso invertido se reflete
(b) Onda se reflete a partir de uma extremidade livre
Pulso chegando.
A haste não exerce força transversal sobre a corda
Pulso se reflete sem inversão

Figura 15.18 Uma série de [illegible] um pulso ondulatório, para intervalos de [illegible]

Figura 15.19 [illegible]

15.6 Interferência de ondas, condições de contorno de uma corda e princípio da superposição

Até agora, estudamos ondas que se propagam continuamente na mesma direção. Mas quando uma onda atinge as fronteiras de um meio, ocorre *reflexão* da onda inteira ou de uma parte da onda. Quando você grita perto da parede de um edifício ou a certa distância da encosta de um morro, a onda sonora se reflete na superfície rígida e um eco retorna para você. Quando você balança a extremidade de uma corda que possui a outra extremidade presa em um suporte rígido, um pulso se propaga ao longo da corda e se reflete retornando para você. Nesses dois exemplos ocorre superposição entre a onda incidente e a onda refletida na mesma região do meio. Essa superposição denomina-se **interferência**. (Em geral, o termo 'interferência' refere-se ao que acontece quando duas ou mais ondas passam pela mesma região ao mesmo tempo.)

Como exemplo de reflexão de uma onda e o papel desempenhado pela fronteira do meio no qual a onda se propaga, vamos novamente analisar uma onda transversal em uma corda esticada. O que ocorre quando uma onda atinge a *extremidade* da corda?

Quando a extremidade está presa a um suporte rígido, trata-se de uma extremidade *fixa* que não pode se mover. A onda que chega exerce uma força sobre o suporte; a reação dessa força, exercida *pelo* suporte *sobre* a corda, "reage de volta" sobre a corda e produz um pulso refletido, ou onda que se propaga no sentido oposto. A Figura 15.18 apresenta uma série de fotografias mostrando a reflexão de um pulso na extremidade fixa de uma mola longa com muitas espiras. O pulso refletido se move no sentido oposto ao sentido do pulso *incidente* e seu deslocamento também é oposto. Essa situação também é ilustrada para um pulso ondulatório se propagando na corda indicada na Figura 15.19a.

A situação oposta de uma extremidade fixa é uma extremidade livre, aquela que está completamente livre e pode se mover em uma direção perpendicular ao comprimento da corda. Por exemplo, a corda poderia estar amarrada em um anel leve que deslize ao longo de uma haste perpendicular à corda, como indicado na Figura 15.19b. O anel e a haste mantêm a tensão ao longo da barra, mas não exercem forças transversais. Quando uma onda atinge essa extremidade livre, o anel desliza ao longo da haste. Quando o anel atinge seu deslocamento máximo, a corda e o anel atingem momentaneamente o equilíbrio, como indicado no quarto desenho, a partir do topo da Figura 15.19b. Porém, neste momento a corda está mais esticada, submetida a

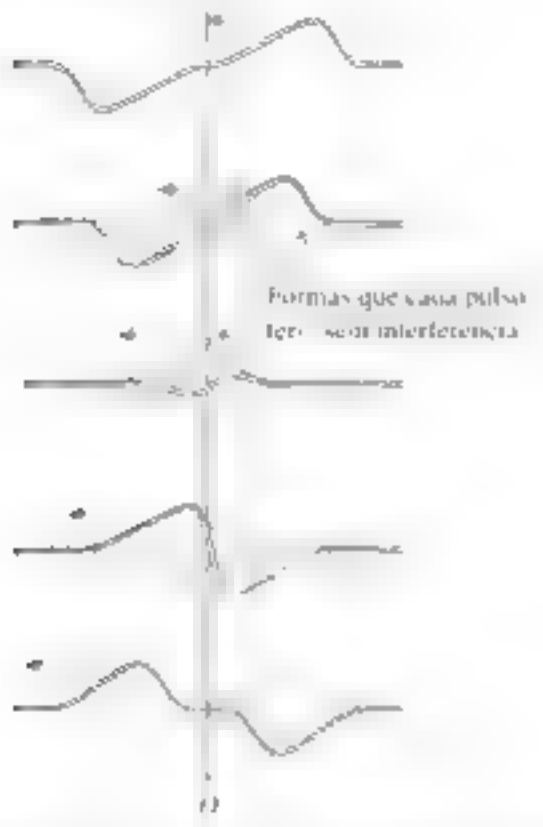

À medida que os pulsos se superpõem, o deslocamento da corda em qualquer ponto é a soma algébrica do deslocamento devido aos pulsos individuais
Formas que cada pulso teria sem interferência

Figura 15.20 Superposição de dois pulsos ondulatórios se deslocando em sentidos opostos, sendo um pulso invertido em relação ao outro. O tempo aumenta de cima para baixo.

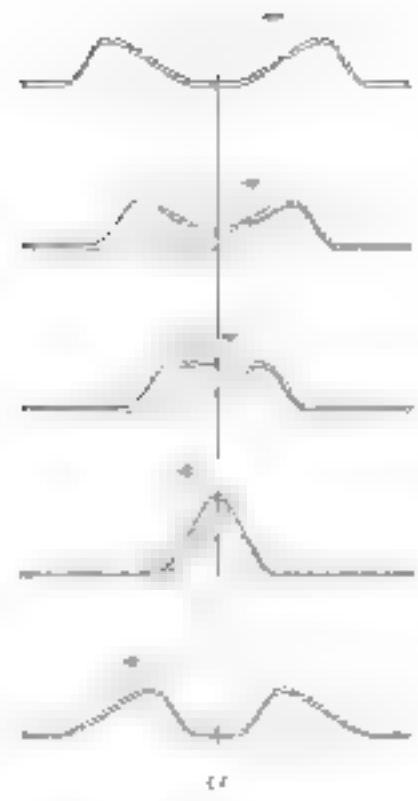


Figura 15.21 Superposição de dois pulsos ondulatórios se deslocando em sentidos opostos, sendo que um pulso não está invertido em relação ao outro. O tempo aumenta de cima para baixo. Compare com a Figura 15.20.

uma tensão máxima, de modo que a extremidade livre da corda é puxada para baixo, e novamente se produz um pulso refletido (desenho 7). Como no caso da extremidade fixa, o pulso refletido se desloca no sentido contrário ao do pulso inicial, porém agora o pulso se reflete por cima da corda, ou seja, o deslocamento ocorre no mesmo sentido do deslocamento do pulso incidente. As condições na extremidade de uma corda, tal como a extremidade fixa e a extremidade livre, denominam-se **condições de contorno**.

A formação de um pulso refletido é semelhante à superposição de dois pulsos que se deslocam em sentidos opostos. A Figura 15.20 mostra dois pulsos com a mesma forma, um invertido em relação ao outro, se deslocando em sentidos opostos. Quando os dois pulsos se superpõem e um passa sobre o outro, o deslocamento total da corda é a *soma algébrica* dos deslocamentos dos pulsos individuais no ponto onde eles se encontram. Como os dois pulsos possuem a mesma forma, o deslocamento total no ponto O no centro da figura é sempre igual a zero. Portanto, o movimento na metade direita da corda seria igual ao obtido caso a corda fosse cortada no ponto O, retirando-se a metade da esquerda e mantendo-se a outra metade fixa no ponto O. Então, os dois pulsos do lado direito correspondem ao pulso incidente e ao pulso refletido, combinados de tal modo que o deslocamento no ponto O seja *sempre* zero. Para que isso ocorra, o pulso refletido deve sempre ser invertido em relação ao pulso incidente.

A Figura 15.21 mostra dois pulsos com a mesma forma, deslocando-se em sentidos inversos, mas eles *não* estão invertidos um em relação ao outro. O deslocamento no ponto O no meio da figura não é zero, mas a inclinação nesse ponto é sempre igual a zero. De acordo com a Equação (15.20), isso corresponde a uma ausência de qualquer força transversal nesse ponto. Nesse caso, o movimento da metade da direita da corda seria o mesmo que o obtido se cortássemos a corda no ponto O e apoiássemos esse ponto em um anel deslizando sem atrito (Figura 15.19b), o qual mantém a tensão mas não exerce nenhuma força transversal. Em outras palavras, essa situação corresponde à reflexão de um pulso na extremidade livre de uma corda no ponto O. Nesse caso, o pulso refletido *não* é invertido.

O princípio da superposição

A combinação de dois pulsos separados em um mesmo ponto para obter um deslocamento resultante é um exemplo do **princípio da superposição**: quando duas ondas se superpõem, o deslocamento resultante em qualquer ponto da corda em qualquer instante é obtido somando-se os deslocamentos individuais que cada ponto deveria ter caso não existisse o outro deslocamento. Em outras palavras, a função de onda $v(x, t)$ que descreve o deslocamento resultante é obtida pela *soma* das duas funções de onda das duas ondas separadas.

$$v(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

(princípio da superposição) (15.27)

Matematicamente, essa propriedade aditiva das funções de onda decorre da forma da equação de onda, Equação (15.12) ou (15.18), que deve ser satisfeita por

Figura 15.22 Dois pulsos ondulatórios com formas diferentes

qualquer tipo de onda fisicamente possível. Especificamente, a equação de onda *é linear*; ela contém a função $y(x, t)$ elevada apenas a uma potência igual a um (não existem termos envolvendo potências $y(x, t)^2$, $y(x, t)^3$, etc.). Portanto, quando duas funções $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ satisfazem separadamente à equação de onda, a soma $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ também satisfaz a essa equação, sendo assim, um movimento fisicamente possível. Como esse princípio depende da linearidade da equação de onda e da propriedade correspondente da combinação linear das soluções, ele também é chamado de *princípio da superposição linear*. Para alguns sistemas físicos, tal como um fio que não segue a lei de Hooke, a equação de onda *não* é linear; esse princípio não se aplica a tais sistemas.

O princípio da superposição é de importância fundamental para todos os tipos de onda. Quando um amigo está falando com você enquanto você está ouvindo música, você distingue perfeitamente o som da conversa e o som da música. Isso ocorre precisamente porque o som total que chega aos seus ouvidos é a soma algébrica do som produzido pela voz do seu amigo e da onda produzida pelo alto-falante do seu estéreo. Caso os sons não se combinassem linearmente dessa forma simples, o som que você ouviria no caso desse exemplo seria imediatamente indistinguível. O princípio da superposição também se aplica para ondas eletromagnéticas (como no caso da luz) e muitos outros tipos de ondas.

Teste sua compreensão da Seção 15.6 A Figura 15.22 mostra dois pulsos ondulatórios com formas diferentes deslocando-se em sentidos diferentes ao longo de uma corda. Faça uma série de desenhos como os da Figura 15.21 mostrando a forma da corda enquanto os dois pulsos se aproximam, superpõem e passam um pelo outro. ❙

15.7 Ondas estacionárias em uma corda

Analisamos a reflexão de um *pulso* de onda em uma corda quando ele chega a um ponto de contorno (tanto no caso de uma extremidade fixa quanto no de uma extremidade móvel). Agora examinaremos o que ocorre quando uma onda *senoidal* é refletida pela extremidade fixa de uma corda. Vamos novamente considerar a superposição de duas ondas que se propagam através da corda, uma representando a onda incidente e a outra a onda refletida na extremidade fixa.

A Figura 15.23 mostra uma corda que está presa em sua extremidade esquerda. Sua extremidade direita oscila de cima para baixo em MHS e produz uma onda que se propaga para a esquerda; a onda refletida pela extremidade fixa se desloca para a direita. O movimento ondulatório resultante quando as duas ondas se combinam não mais se

(a) A corda tem meio comprimento de onda.

(b) A corda tem um comprimento de onda.

(c) A corda tem comprimento de onda de um e meio.

(d) A corda tem dois comprimentos de onda.

(e) A forma da corda em (b) em dois instantes diferentes

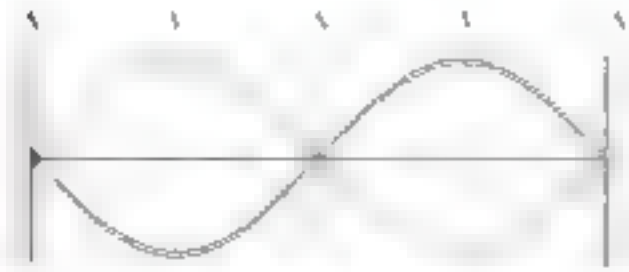


Figura 15.23 (a) ... (d) Fotografias feitas com tempo de exposição longo mostrando ondas estacionárias em uma corda esticada. De acordo com a frequência de oscilação produzida pela mão na extremidade esquerda da corda, o movimento da onda estacionária pode ter um ou mais comprimentos de onda. Os extremos dos movimentos da onda estacionária aparecem como regiões borradas nas extremidades e no centro. A extremidade direita se move muito pouco em comparação com os pontos localizados logo à esquerda e à direita.

parece com duas ondas que se propagam em sentidos opostos. A corda parece estar subdividida em diversos segmentos, conforme indicam as fotografias de longa exposição mostradas nas figuras 15.23a, 15.23b, 15.23c e 15.23d. A Figura 15.23e mostra duas formas instantâneas da corda esticada na Figura 15.23b. Vamos comparar esse comportamento com as ondas que estudamos nas seções 15.1 a 15.5. Em uma onda que se propaga ao longo de uma corda, a amplitude é constante e a configuração da onda se desloca com velocidade igual à velocidade da onda. No caso presente, ao contrário, a configuração da onda permanece inalterada ao longo da corda e sua amplitude flutua. Existem pontos particulares que nunca se movem; cada um desses pontos constitui um **nó** (indicado pela letra *N* na Figura 15.23e). No meio de dois nós consecutivos existe um ponto chamado **ventre** (indicado pela letra *V* na Figura 15.23e), onde a amplitude do movimento é máxima. Como a configuração da onda não parece mover-se ao longo da corda, ela é chamada **onda estacionária**. (Para acentuar a diferença, uma onda que se *move* ao longo da corda denomina-se **onda progressiva**.)

O princípio da superposição explica como a onda incidente e a onda refletida se superpõem formando uma onda estacionária. Na Figura 15.24, as curvas claras que começam abaixo do eixo *Ox* no topo da figura deslocam-se da direita para a esquerda. As curvas claras que começam acima do eixo *Ox* deslocam-se da esquerda para a direita. Todas as curvas claras possuem a mesma velocidade de propagação, o mesmo comprimento de onda e a mesma amplitude. As ondas são indicadas em nove instantes sucessivos, sendo que o intervalo de tempo entre dois instantes sucessivos é igual a $\frac{1}{16}$. Para cada ponto ao longo da corda, somamos os deslocamentos das

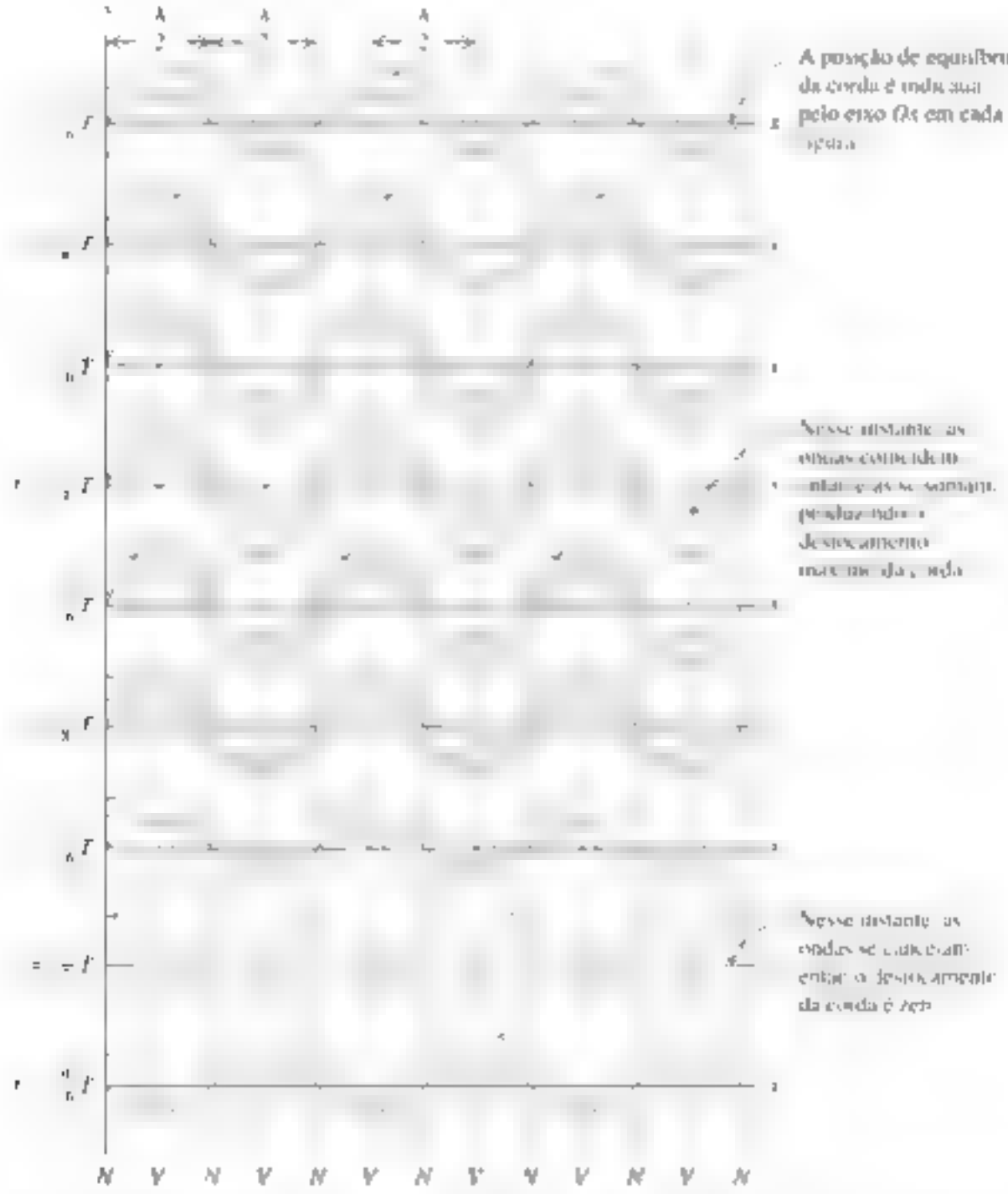

A posição de equilíbrio da corda é indicada pelo eixo Ox em cada figura.
Nesse instante as ondas começam a se somar, produzindo o deslocamento máximo da corda.
Nesse instante as ondas se cancelam, e a forma da corda é reta.
N V N V N V N V N V N V N V N

Figura 15.24 Formação de uma onda estacionária. Uma onda progressiva se deslocando para a esquerda (curva clara que começa embaixo do eixo Ox na primeira figura) se superpõe a uma onda progressiva se deslocando para a direita (curva clara que começa acima do eixo Ox na primeira figura), formando uma onda estacionária.

curvas claras (os valores de y); a superposição fornece a onda resultante, indicada pela curva preta.

Em certos instantes, tal como o instante $t = \frac{1}{4}T$, as duas ondas claras estão exatamente superpostas porque estão em fase, e a forma da onda é uma curva senoidal preta com uma amplitude igual ao dobro da amplitude de cada uma das duas ondas individuais componentes. Em outros instantes, tal como o instante $t = \frac{1}{2}T$, as duas ondas claras estão completamente defasadas entre si, e nesse instante a superposição das duas ondas fornece uma onda resultante igual a zero. O deslocamento resultante é *sempre* igual a zero em todos os pontos indicados pela letra N na parte inferior da Figura 15.24. Estes pontos são os *nós*. Em cada nó os deslocamentos das duas ondas claras são sempre iguais e opostos e a soma é igual a zero. Este cancelamento denomina-se **interferência destrutiva**. No ponto no meio da distância entre dois nós consecutivos ocorre uma amplitude *máxima* correspondente a um *ventre*, designado pela letra V. Nos ventres, os deslocamentos das duas curvas claras são iguais e possuem o mesmo sinal, dando origem a um deslocamento resultante máximo; esse fenômeno é conhecido como **interferência construtiva**. Vemos claramente na figura que a distância entre dois nós consecutivos ou a distância entre dois ventres consecutivos é igual a $\lambda/2$, ou metade do comprimento de onda.

Podemos deduzir uma função de onda para a onda estacionária da Figura 15.24 somando as funções de onda $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ para as duas ondas que se propagam em sentidos opostos, mas possuem valores iguais para a amplitude, o período e o comprimento de onda. Suponha que $y_1(x, t)$ represente uma onda *incidente* se propagando para a esquerda e atingindo o ponto $x = 0$ onde ela se reflete. $y_2(x, t)$ representa a curva *refletida* que se desloca para a direita. Vimos na Seção 15.6 que a curva refletida em uma extremidade fixa é invertida, de modo que usaremos um sinal negativo para indicar uma das ondas:

$$y_1(x, t) = -A \cos(kx + \omega t) \text{ (propagando-se para a esquerda)}$$

$$y_2(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \text{ (propagando-se para a direita)}$$

Note também que a troca do sinal corresponde a uma mudança de *fase* de 180° ou π radianos. Em $x = 0$, o movimento da onda incidente é $A \cos \omega t$ e o movimento da onda refletida é $-A \cos \omega t$, que também pode ser escrito na forma $A \cos(\omega t + \pi)$. Conforme a Equação (15.27), a função de onda da onda estacionária é obtida pela soma das funções de onda individuais:

$$y(x,t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$$

Podemos desenvolver essa soma usando identidades para o co-seno da soma e da diferença de dois ângulos, $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$. Usando essas relações e agrupando os termos, obtemos a função de onda para a onda estacionária

$$y(x,t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = (2A \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \text{ ou}$$

$$y(x, t) = (A_{ES} \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \quad (15.28)$$

(onda estacionária em uma corda, extremidade fixa em $x = 0$)

A amplitude da onda estacionária A_{ES} é igual ao dobro da amplitude A das duas ondas progressivas originais:

$$A_{ES} = 2A$$

A Equação (15.28) possui dois fatores: uma função de x e uma função de t. O fator $A_{ES} \operatorname{sen} kx$ mostra que em cada instante a forma da onda é uma senóide. Porém, diferentemente do caso de uma onda progressiva que se propaga ao longo de uma corda, a forma da onda permanece na mesma posição, oscilando verticalmente conforme descrito pelo fator $\operatorname{sen} \omega t$. Esse comportamento é indicado pela curva preta na Figura 15.24. Cada ponto da corda ainda executa um MHS, porém todos os pontos situados entre dois nós consecutivos oscilam *em fase*. Observe o contraste entre esse comportamento e as diferenças de fase que ocorrem entre as oscilações de pontos adjacentes durante a propagação de uma onda progressiva ao longo da direção da corda.

Podemos usar a Equação (15.28) para achar os nós; esses pontos são obtidos pela condição $\operatorname{sen} kx = 0$, de modo que o deslocamento desses pontos é *sempre* igual a zero. Os nós ocorrem quando $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, ou, usando $k = 2\pi/\lambda$,

$$x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k} \quad (15.29)$$

$$\text{ou } 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}$$

(nós de uma onda estacionária em uma corda, para $x = 0$)

Em particular, existe um nó para $x = 0$, como era de se esperar, visto que esse ponto é um ponto fixo da extremidade da corda.

Uma onda estacionária, ao contrário de uma onda progressiva, *não* transfere energia de uma extremidade para a outra da corda. As duas ondas que formam a onda estacionária transferem a mesma potência nos dois sentidos. Existe um fluxo de energia total de cada nó para o ventre adjacente e vice-versa, porém a taxa *média* de transferência de energia é igual a zero em todos os pontos. Convidamos você a calcular a potência da onda dada pela Equação (15.21) usando a função de onda da Equação (15.28) para demonstrar que a potência média é igual a zero (ver o Problema desafiador 15.84).

ONDAS ESTACIONÁRIAS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* como nas ondas progressivas, é conveniente distinguir as grandezas puramente cinemáticas, como velocidade de onda v, comprimento de onda λ e frequência f, e as grandezas dinâmicas envolvendo as propriedades do meio, tais como F e μ para ondas transversais em uma corda. Quando você descobrir qual é a variável procurada, tente perce-

ber se o problema é de natureza meramente cinemática ou se as propriedades do meio também estão implicadas.

PREPARAR *seguindo estes passos:*

1. Para visualizar nós e ventres em ondas estacionárias, sempre é útil desenhar diagramas. No caso de uma corda, você pode desenhar a forma em um determinado instante e indicar os nós N e ventres V. A distância entre dois nós adjacentes ou dos ventres adjacentes é sempre $\lambda/2$, e a distância entre um nó e o ventre adjacente é sempre $\lambda/4$.
2. Decida que equações irá utilizar. A função de onda para a onda estacionária, como na Equação (15.28), quase sempre é útil.
3. Você pode calcular a velocidade da onda se souber tanto λ quanto f (ou, de modo equivalente, $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi f$) ou as propriedades do meio (para uma corda, F e μ).

EXECUTAR *o problema encontrando as grandezas desconhecidas por meio das equações que você selecionou*. Assim que obtiver a função de onda, você pode encontrar o valor do deslocamento y em qualquer ponto no meio ondulatório (valor de x) e em qualquer momento. Você pode encontrar a velocidade de uma partícula no meio ondulatório calculando a derivada parcial de y em relação ao tempo. Para encontrar a aceleração dessa partícula, calcule a segunda derivada parcial de y em relação ao tempo.

AVALIAR *a sua resposta*: compare as respostas numéricas com o seu diagrama. Veja se a função de onda é compatível com as condições de contorno (por exemplo, o deslocamento deve ser zero em uma extremidade fixa).

Exemplo 15.6

ONDAS ESTACIONÁRIAS EM UMA CORDA DE GUITARRA Uma das cordas de uma guitarra está esticada ao longo do eixo Ox quando está em equilíbrio. A extremidade da corda em $x = 0$ (a ponte da guitarra) está presa. Uma onda senoidal incidente, correspondente às curvas mais claras na Figura 15.24, desloca-se pela corda no sentido $-x$ com uma velocidade de 143 m/s, uma amplitude de 0,750 mm e uma frequência de 440 Hz. Essa onda é refletida na extremidade fixa em $x = 0$ e a superposição da onda progressiva incidente e da onda progressiva refletida forma uma onda estacionária. a) Encontre a equação que fornece o deslocamento de um ponto na corda em função da posição e do tempo. b) Localize os pontos da corda que não se movem. c) Encontre a amplitude, a velocidade transversal máxima e a aceleração transversal máxima nos pontos de oscilação máxima.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR este é um problema de *cinemática* no qual se pede que descrevamos o movimento da corda (veja Estratégia de resolução de problemas 15.1 na Seção 15.3). As variáveis procuradas são a função da onda estacionária no item (a), os pontos que não se movem, ou nós, no item (b) e o deslocamento máximo, a velocidade transversal v_y e a aceleração transversal a_y no item (c). (Ondas em uma corda são transversais, o que significa que possuem a direção do deslocamento — ou seja, propagam-se na direção y.) Para encontrar essas grandezas, usamos a expressão que deduzimos nesta seção para uma onda estacionária com a extremidade fixa, assim como outras relações que vimos nas seções 15.2 e 15.3.

PREPARAR como há uma extremidade fixa em $x = 0$, podemos usar as equações (15.28) e (15.29) para descrever essa onda estacionária. Podemos também usar as relações entre ω, k, f, λ e a velocidade da onda v.

EXECUTAR: (a) Para usar a Equação (15.28) precisamos dos valores de A_{EE}, ω e k. A amplitude da onda incidente é $A = 0{,}750$ mm $= 7{,}50 \times 10^{-4}$ m; a onda refletida possui a mesma amplitude, e a amplitude da onda estacionária é $A_{EE} = 2A = 1{,}50 \times 10^{-3}$ m. A frequência angular ω e o número de onda k são

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad})(440 \text{ s}^{-1}) = 2760 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2760 \text{ rad/s}}{143 \text{ m/s}} = 19{,}3 \text{ rad/m}$$

Então, a Equação (15.28) fornece

$$y(x, t) = (A_{EE} \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t$$

$$= [(1{,}50 \times 10^{-3} \text{ m}) \operatorname{sen} (19{,}3 \text{ rad/m})x] \operatorname{sen} (2760 \text{ rad/s})t$$

(b) As posições dos nós são dadas pela Equação (15.29): $x = 0$, $\lambda/2$, λ, $3\lambda/2$, ... O comprimento de onda é

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{143 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 0{,}325 \text{ m}$$

então, os nós estão nas seguintes distâncias da extremidade fixa:

$$x = 0,\ 0{,}163 \text{ m},\ 0{,}325 \text{ m},\ 0{,}488 \text{ m},\ \ldots$$

(c) Pela expressão para $y(x, t)$, no item (a), vemos que o deslocamento máximo a partir do equilíbrio é $1{,}50 \times 10^{-3}$ m $= 1{,}50$ mm, que é exatamente o dobro da amplitude da onda incidente. Esse máximo ocorre nos ventres, que estão a meio caminho entre nós adjacentes (ou seja, em $x = 0{,}081$ m, 0,244 m, 0,406 m, ...).

Para uma partícula na corda em qualquer ponto x, a velocidade transversal (na direção y) é

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

$$= [(1{,}50 \times 10^{-3} \text{ m}) \operatorname{sen} (19{,}3 \text{ rad/m})x]$$

$$\times [(2760 \text{ rad/s}) \cos (2\,760 \text{ rad/s})\, t]$$

$$= [(4{,}15 \text{ m/s}) \operatorname{sen} (19{,}3 \text{ rad/m})x] \cos (2\,760 \text{ rad/s})t$$

Em um ventre, $\operatorname{sen} (19{,}3 \text{ rad/m})x = \pm 1$ e o valor da velocidade transversal varia de 4,15 m/s a −4,15 m/s. Como sempre acontece em um MHS, a velocidade máxima ocorre quando a partícula está passando pela posição de equilíbrio ($y = 0$).

A aceleração transversal $a_y(x, t)$ é a primeira derivada parcial de $v_y(x, t)$ em relação ao tempo (isto é, a segunda derivada parcial de $y(x, t)$ em relação ao tempo).
Deixaremos o cálculo a seu encargo; o resultado é

$$a_y(x, t) = \frac{\partial v_y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

$$= [(-1{,}15 \times 10^{4} \text{ m/s}^2) \operatorname{sen} (19{,}3 \text{ rad/m})x]$$

$$\times \operatorname{sen} (2760 \text{ rad/s})\, t$$

Nos ventres, o valor da aceleração transversal varia de $+1{,}15 \times 10^4$ m/s^2 e $-1{,}15 \times 10^4$ m/s^2.

AVALIAR: a velocidade transversal máxima em um ventre é considerável (em torno de 15 km/h). Mas a aceleração transversal

máxima é fenomenal, 1170 vezes a aceleração devida à gravidade! As cordas de guitarra são feitas de material resistente para suportarem tal aceleração.

Na verdade, as cordas de guitarra são presas em ambas as extremidades. Veremos as conseqüências disso na próxima seção.

Teste sua compreensão da Seção 15.7 Suponha que a frequência da corda estacionária no Exemplo 15.6 dobrasse de 440 Hz a 880 Hz. Será que todos os nós para $f = 440$ Hz também seriam nós para $f = 880$ Hz? Em caso afirmativo, haveria nós adicionais para $f = 880$ Hz? Em caso negativo, quais nós estariam ausentes para $f = 880$ Hz? ❚

15.8 Modos normais de uma corda

Quando descrevemos ondas estacionárias de uma corda com uma das extremidades mantidas fixas em certa extremidade rígida, como indicado na Figura 15.23, não fizemos nenhuma hipótese sobre o comprimento da corda ou sobre a extremidade que não está fixa. Vamos agora considerar uma corda com um comprimento fixo L, presa rigidamente a *ambas as* extremidades. Esse tipo de corda é encontrado em muitos instrumentos musicais, inclusive pianos, violinos e guitarras. Quando você puxa a corda de uma guitarra, uma onda se propaga na corda, essa onda se reflete sucessivamente nas duas extremidades, produzindo-se uma onda estacionária. Essa onda estacionária dá origem a uma onda sonora que se propaga no ar, com a frequência determinada pelas propriedades da corda. É por essa razão que os instrumentos com as duas extremidades fixas são muito úteis para produzir música.

Para entender as propriedades das ondas estacionárias produzidas em uma corda com as duas extremidades fixas, vamos inicialmente verificar o que ocorre quando produzimos uma onda estacionária nessa corda. A onda estacionária resultante deve possuir nós em *ambas as* extremidades da corda. Vimos na seção precedente que a distância entre dois nós adjacentes é igual a meio comprimento de onda ($\lambda/2$), de modo que o comprimento da corda deve ser igual a $\lambda/2$, ou $2(\lambda/2)$, ou $3(\lambda/2)$, ou de modo geral igual a um número inteiro múltiplo de meio comprimento de onda:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(corda fixa nas duas extremidades) (15.30)

Ou seja, se uma corda de comprimento L possui as duas extremidades fixas, uma onda estacionária só pode existir quando seu comprimento de onda satisfizer à Equação (15.30).

Explicitando λ nessa equação e identificando os valores possíveis de λ com o símbolo λ_n, encontramos

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(corda fixa nas duas extremidades) (15.31)

Figura 15.25 Cada corda de um violino oscila naturalmente com uma ou mais frequências harmônicas. Essas oscilações produzem no ar ondas sonoras que se propagam com a mesma frequência da corda.

É possível a existência de ondas na corda que *não* possuem esses comprimentos de onda, porém tais ondas não podem formar ondas estacionárias com nós e ventres, e a onda resultante não pode ser estacionária. A Equação (15.31) é ilustrada pelas ondas estacionárias mostradas nas figuras 15.23a, 15.23b, 15.23c e 15.23d; esses casos equivalem a $n = 1, 2, 3$ e 4, respectivamente.

Correspondendo a uma série de valores possíveis de λ_n há uma série de frequências f_n, cada uma delas relacionada aos respectivos comprimentos de onda por meio da relação $f_n = v/\lambda_n$. A menor frequência f_1 corresponde ao maior comprimento de onda (o caso $n = 1$), $\lambda_1 = 2L$.

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad \text{(corda fixa nas duas extremidades)} \quad (15.32)$$

Esse valor é chamado de **frequência fundamental**. As outras frequências das ondas estacionárias são $f_2 = 2v/2L$, $f_3 = 3v/2L$, e assim por diante. Esses valores são múltiplos inteiros da frequência fundamental f_1, tais como $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$ e assim por diante, e *todas* essas frequências podem ser expressas por

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(corda fixa nas duas extremidades) (15.33)

Essas frequências são chamadas de **harmônicos**, e a série desses valores denomina-se **série harmônica**. Algumas vezes os músicos chamam de **sobretom** cada uma das frequências f_2, f_3 e assim por diante; f_2 é o segundo harmônico

ou primeiro sobretom, f_3 é o terceiro harmônico ou segundo sobretom, e assim por diante. O primeiro harmônico corresponde à frequência fundamental (Figura 15.25).

Para uma corda fixa nas duas extremidades em $x = 0$ e $x = L$, a função de onda $y(x, t)$ da onda estacionária de ordem n é dada pela Equação (15.28) (a qual satisfaz à condição de que existe um nó para $x = 0$), com $\omega = \omega_n = 2\pi f_n$ e $k = k_n = 2\pi/\lambda_n$

$$y_n(x, t) = A_{ES} \operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} \omega_n t \qquad (15.34)$$

Convidamos você a mostrar que essa função de onda possui nós nas duas extremidades $x = 0$ e $x = L$ como é esperado.

Um **modo normal** de um sistema oscilante é um movimento no qual todas as partículas do sistema se movem senoidalmente com a mesma frequência. Para um sistema constituído por uma corda de comprimento L que possui as duas extremidades fixas, cada um dos comprimentos de onda fornecidos pela Equação (15.31) corresponde a uma configuração com um modo normal possível e uma dada frequência. Existe um número infinito de modos normais e cada um deles possui sua configuração de vibração e sua frequência característica. A Figura 15.26 mostra a configuração dos primeiros quatro modos normais e suas frequências e comprimentos de onda associados, esses valores correspondem aos obtidos pela Equação (15.34) com $n = 1$, 2, 3 e 4. Em contraste, um oscilador harmônico, que contém apenas uma partícula oscilante, possui apenas um modo normal e uma única frequência característica. Essa corda fixa nas duas extremidades possui um número infinito de modos normais porque ela é constituída por um número muito grande de partículas (um número infinito). Sistemas oscilantes mais complicados também possuem infinitos números de modos normais, embora com padrões de modo normal mais complexos do que em uma corda (Figura 15.27).

Ondas estacionárias complexas

Caso pudéssemos deslocar uma corda de tal modo que sua forma tivesse uma configuração igual a um dos modos normais de vibração e a corda fosse libertada a partir desta posição, ela passaria a vibrar com a mesma frequência desse modo normal. A corda vibrante faria o ar se deslocar com a mesma freqüência, produzindo uma onda sonora progressiva que você ouviria como um tom puro. Porém, quando você golpeia a corda (como no caso de um piano) ou puxa a corda (como no caso de uma guitarra), a forma da corda perturbada *não* é tão simples como as configurações indicadas na Figura 15.26. Na vibração resultante, o harmônico fundamental é acompanhado de muitos sobretons. Portanto, este movimento é uma *superposição* ou combinação de muitos modos normais. Diversos movimentos harmônicos simples com frequências diferentes surgem simultaneamente e o deslocamento de qualquer ponto da corda é a soma (ou superposição) de muitos modos normais. O som produzido por esta corda vibrante também é uma superposição de ondas sonoras senoidais progressivas que ouvimos como um tom complexo e rico com a frequência fundamental f_1. A onda estacionária na corda e a onda sonora progressiva no ar possuem a mesma **composição harmônica** (querendo dizer que frequências mais elevadas do que a frequência fundamental também estão presentes). A composição harmônica de uma corda depende da maneira como a corda foi inicialmente perturbada. Se você puxar uma corda de uma guitarra acústica em um local perto do buraco da guitarra, o som que você escuta possui uma composição harmônica diferente do ouvido quando você puxa a corda nas proximidades da extremidade fixa da guitarra.

É possível representar qualquer movimento da corda como uma superposição de modos normais. Achar esta representação para uma dada configuração de vibração é o objetivo da *análise harmônica*. A soma das funções

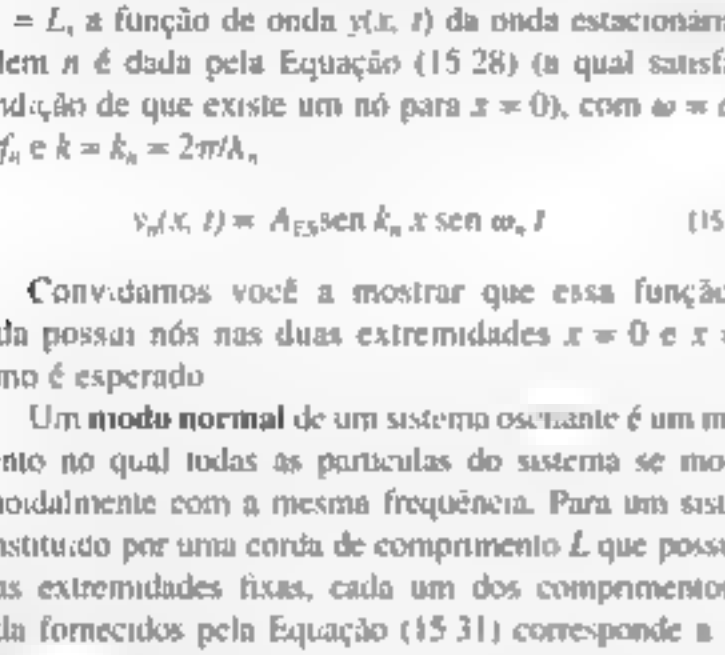

(a) n = 1
N V N
Frequência fundamental, f
(b) n = 2
N V N V N
Segundo harmônico, f Primeiro sobretom
(c) n = 3
N V N V N V N
Terceiro harmônico, f Segundo sobretom
(d) n = 4
N V N V N V N V N
Quarto harmônico, f4 Terceiro sobretom

Figura 15.26 Os quatro primeiros modos normais de uma corda com as duas extremidades fixas. (Compare estes valores com as fotografias mostradas na Figura 15.23.)

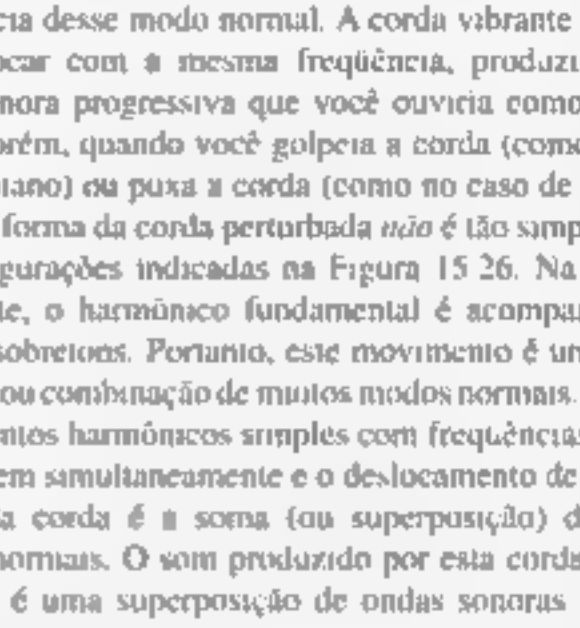

Seção transversal mostrando o interior do Sol
As partes claras indicam os locais onde o movimento ocorre para dentro do Sol.
As partes escuras indicam os locais nos quais a matéria se move para fora do Sol.

Figura 15.27 Os astrônomos descobriram que o Sol oscila com diversos modos normais. Esta simulação de computador mostra apenas um modo.

senoidais que representam uma onda complexa é chamada de *série de Fourier*. A Figura 15.28 mostra a combinação de funções senoidais equivalente a uma onda estacionária produzida em uma corda de comprimento L puxada em um ponto situado a uma distância $L/4$ da extremidade da corda.

Instrumentos de cordas e ondas estacionárias

Como vimos, a frequência fundamental de uma corda vibrante é $f_1 = v/2L$. A velocidade v de ondas ao longo da corda é determinada pela Equação (15.13), de modo que $v = \sqrt{F/\mu}$. Combinando estas relações, achamos

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (15.35)$$

Essa frequência é também a frequência fundamental da onda sonora criada no ar circundante pela corda vibrante. Instrumentos musicais familiares mostram como f_1 depende das propriedades da corda. A dependência inversa entre a frequência e o comprimento L é ilustrada pelas cordas longas do baixo ou da seção baixa do piano (baixa frequência) em comparação com as cordas curtas do violino ou da seção de sons agudos do piano (Figura 15.29). A altura do som de um violino ou de uma guitarra varia geralmente comprimindo-se a corda com os dedos de modo a fazer variar o comprimento L da parte da corda que vibra. Quando fazemos aumentar a tensão F produzimos o aumento da velocidade v da onda e, portanto, fazemos aumentar a frequência (e a altura). Todos os instrumentos de corda são 'afinados' para as frequências corretas fazendo-se variar a tensão, diminuindo o tamanho da corda para fazer aumentar a altura. Finalmente, quando a massa da corda por unidade de comprimento μ aumenta, ocorre a diminuição da velocidade da onda e, portanto, da frequência. As notas mais baixas da corda de aço de uma guitarra são produzidas por cordas mais grossas e uma técnica para se obter a baixa frequência desejada no piano consiste em enrolar as cordas dos sons graves do piano com um fio sem a necessidade de se usar uma corda excessivamente longa.

Instrumentos de sopro como saxofones e trombones também possuem modos normais. Como os instrumentos de corda, as frequências desses modos normais determinam a altura dos tons musicais que esses instrumentos produzem. Falaremos sobre esses instrumentos e muitos outros aspectos do som no Capítulo 16.

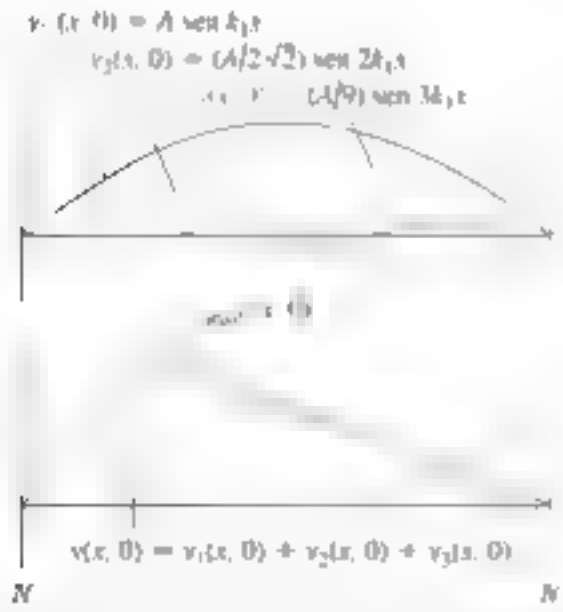


Figura 15.28 Quando a corda de uma guitarra é puxada (assumindo uma forma triangular) e solta, o resultado é uma onda estacionária. Essa onda estacionária é bem representada (com exceção do ponto máximo) pela soma de somente três funções senoidais. A inclusão de um maior número de funções senoidais melhora a representação.

Exemplo 15.7

UM BAIXO GIGANTESCO Em um esforço para ter seu nome no *Guinness Book of World Records* (livro dos recordes mundiais do *Guinness*), você deseja construir um baixo com uma corda de 5,0 m de comprimento entre os dois pontos fixos. O material da corda possui uma densidade linear de 40,0 g/m e uma frequência fundamental igual a 20,0 Hz (a menor frequência audível pelo ouvido humano). a) Calcule a tensão na corda. b) Calcule a frequência e o comprimento de onda para o segundo harmônico. c) Calcule a frequência e o comprimento de onda na corda para o segundo sobretom.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a variável procurada no item (a) é a tensão da corda: sabemos disso pela expressão para a frequência fundamental da corda, que envolve a tensão. Nos itens (b) e (c) as variáveis procuradas são a frequência e o comprimento de onda de diferentes harmônicos. Sabemos disso pelo comprimento e pela frequência fundamental fornecidos.

PREPARAR: no item (a), a equação que deve ser usada é a Equação (15.35), que envolve os valores conhecidos de f_1, L e μ, assim como a variável procurada F. Resolvemos os itens (b) e (c) usando as equações (15.31) e (15.33).

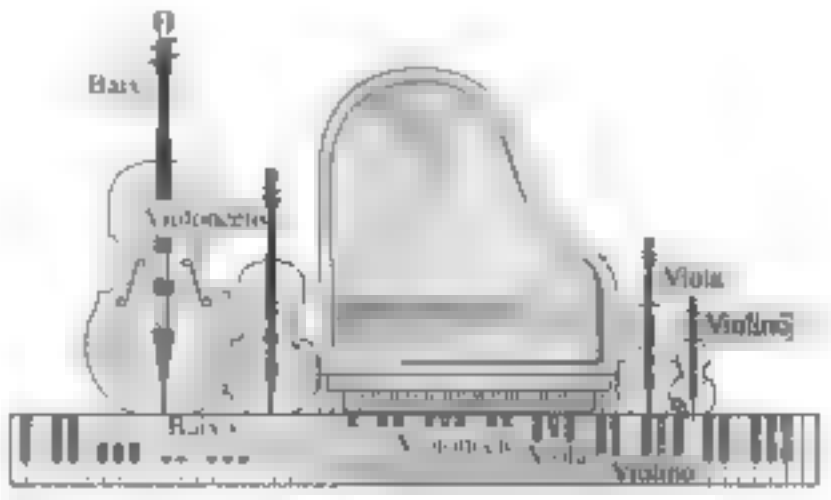


Figura 15.29 Comparação dos tamanhos das cordas de um piano, de um violino, de uma viola, de um violoncelo e de um baixo. Em todos os casos, cordas longas produzem notas baixas e cordas curtas produzem notas mais elevadas.

EXECUTAR a) Resolvemos a Equação (15.35) para a tensão da corda F:

$$F = +\mu L f_1^2 = 4(40{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(5{,}0\ \text{m})^2(20{,}0\ \text{s}^{-1})^2$$
$$= 1600\ \text{N}$$

b) Pela Equação (15.33), a freqüência do segundo harmônico ($n = 2$) é dada por

$$f_2 = 2f_1 = 2(20{,}0\ \text{Hz}) = 40{,}0\ \text{Hz}$$

Pela Equação (15.31), o comprimento de onda na corda referente ao segundo harmônico é dado por

$$\lambda = \frac{2L}{2} = 5{,}0\ \text{m}$$

c) O segundo sobretom é o 'segundo tom sobre' (acima) do fundamental, ou seja, $n = 3$. Sua freqüência e comprimento de onda são:

$$f_3 = 3f_1 = 3(20{,}0\ \text{Hz}) = 60{,}0\ \text{Hz}$$
$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = 3{,}33\ \text{m}$$

AVALIAR a tensão no item (a) é um pouco maior do que a de um baixo real, em que a tensão da corda costuma ser de poucas centenas de newtons. Os comprimentos de onda nos itens (b) e (c) são iguais ao comprimento da corda e dois terços do comprimento da corda, respectivamente; esses resultados estão de acordo com os desenhos de ondas estacionárias na Figura 15.26.

Exemplo 15.8

DAS ONDAS EM UMA CORDA ÀS ONDAS SONORAS NO AR Quais são a freqüência e o comprimento de onda das ondas sonoras produzidas no ar quando a corda do Exemplo 15.7 está vibrando com a freqüência do harmônico fundamental? A velocidade do som no ar a 20 °C é 344 m/s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as variáveis que procuramos são f e λ da onda sonora produzida pelo baixo, *não* da onda estacionária na corda. Todavia, quando a corda vibra com uma freqüência particular, o ar circundante é forçado a vibrar com a mesma freqüência. De modo que a freqüência da onda sonora é a mesma que a da onda estacionária na corda. A relação $\lambda = v/f$ mostra que o *comprimento de onda* da onda sonora será diferente do comprimento de onda da onda estacionária na corda porque as duas ondas possuem velocidades diferentes.

PREPARAR: a única equação de que necessitamos é $v = \lambda f$, que aplicamos tanto à onda estacionária na corda (velocidade v_{corda}) quanto à onda sonora que se desloca (velocidade v_{som}).

EXECUTAR a freqüência da onda sonora é a mesma que a freqüência fundamental da onda estacionária $f = f_1 = 20{,}0$ Hz. O comprimento de onda da onda sonora é

$$\lambda_{1\,(som)} = \frac{v_{som}}{f_1} = \frac{344\ \text{m/s}}{20{,}0\ \text{Hz}} = 17{,}2\ \text{m}$$

AVALIAR note que $\lambda_{1\,(som)}$ é maior do que o comprimento de onda da onda estacionária na corda, $\lambda_{1\,(corda)} = 2L = 2(5{,}0\ \text{m}) = 10{,}0$ m. Isso acontece porque a velocidade do som é maior do que a velocidade das ondas na corda, $v_{corda} = \lambda_{1\,(corda)} f = (10{,}0\ \text{m})(20{,}0\ \text{Hz}) = 200$ m/s. Assim, para *qualquer* modo normal na corda, a onda sonora produzida possui a mesma freqüência que a onda na corda, mas um comprimento de onda maior de um fator dado por $v_{som}/v_{corda} = (344\ \text{m/s})/(200\ \text{m/s}) = 1{,}72$.

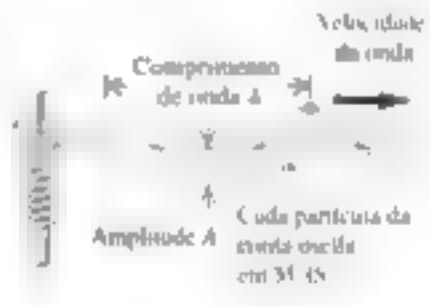
Teste sua compreensão da Seção 15.8 Enquanto a corda de uma guitarra está vibrando, você toca levemente em um ponto na metade da corda para garantir que a corda não vibre naquele ponto. Que modos normais *não podem* estar presentes na corda enquanto você a segura assim? ∎

Resumo

Ondas e suas propriedades: Onda é qualquer perturbação de uma condição de equilíbrio que se propaga de uma região para outra. Uma onda mecânica sempre se propaga no interior de um material denominado meio. A perturbação se propaga pela onda com uma velocidade de onda v que depende do tipo de onda e das propriedades do meio.

Em uma onda periódica, o movimento de cada ponto do meio é periódico. Uma onda senoidal é uma onda periódica especial em que cada ponto se move em MHS. Em qualquer onda periódica, a freqüência f é o número de ciclos por unidade de tempo e o período T é o tempo de um ciclo completo. O comprimento de onda λ é a distância em que a configuração da onda se repete, e a amplitude A é o deslocamento máximo de uma partícula no meio. O produto de λ e f fornece a velocidade da onda. (Veja Exemplo 15.1.)

$$v = \lambda f \qquad (15.1)$$



Funções de onda e dinâmica de onda: Uma função de onda $y(x, t)$ descreve o deslocamento das partículas individuais no meio. As equações (15.3), (15.4) e (15.7) fornecem a equação de onda para uma onda senoidal que se desloca no sentido $+x$. Se a onda estiver se deslocando no sentido $-x$, os sinais negativos nas funções co-seno são substituídos por sinais positivos. (Veja Exemplo 15.2.)

A função de onda obedece à equação diferencial parcial chamada equação de onda, Equação (15.12). A velocidade de uma onda transversal em uma corda depende da tensão F e da massa por unidade de comprimento, μ. (Veja Exemplo 15.3.)

$$y(x, t) = A\cos\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)$$
$$= A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right) \qquad (15.3)$$

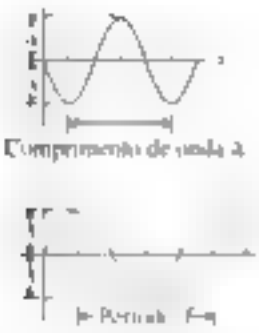
$$y(x, t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \qquad (15.4)$$

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{15.7}$$

Onde $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi f = vk$

$$= \tag{15.12}$$

$$= \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{(ondas em uma corda)} \tag{15.13}$$



Comprimento de onda λ

Período $T = \frac{1}{f}$

Potência de onda: O movimento ondulatório transporta energia de uma região para outra. Em uma onda senoidal mecânica, a potência média $P_{méd}$ é proporcional ao quadrado da amplitude de onda e ao quadrado da frequência. Para ondas que se propagam em três dimensões, a intensidade da onda I é inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. (Veja os exemplos 15.4 e 15.5.)

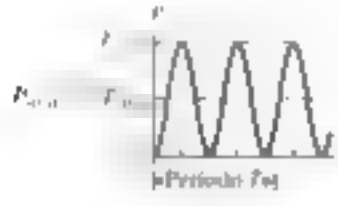
$$P_{méd} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \tag{15.25}$$

(potência média, onda senoidal)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \tag{15.26}$$

(lei do inverso do quadrado para a intensidade)

Potência da onda em função do tempo

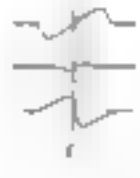


Período $T = \frac{1}{f}$

Superposição de onda: Uma onda é refletida quando atinge a fronteira do meio onde se propaga. O princípio da superposição afirma que o deslocamento total da onda no ponto onde duas ou mais ondas se superpõem é igual à soma dos deslocamentos das ondas individuais.

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \tag{15.27}$$

(princípio da superposição)



Ondas estacionárias em uma corda: Quando uma onda senoidal é refletida em uma extremidade livre ou fixa de uma corda esticada, a onda refletida se superpõe à onda incidente formando uma onda estacionária que contém nós e ventres. A distância entre dois nós adjacentes ou entre dois ventres consecutivos é igual a $\lambda/2$. (Veja exemplo 15.6.)

Quando as duas extremidades de uma corda de comprimento L são mantidas fixas, as ondas estacionárias só podem ocorrer quando L for um múltiplo inteiro de $\lambda/2$. Cada frequência e a configuração da vibração a ela associada constitui um modo normal. A menor frequência f_1 é chamada de frequência fundamental. (Veja os exemplos 15.7 e 15.8.)

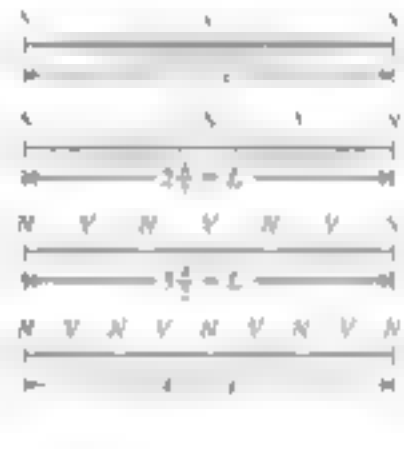
$$y(x, t) = (A_{ES}\operatorname{sen} kx)\operatorname{sen}\omega t \tag{15.28}$$

(onda estacionária em uma corda, extremidade fixa em $x = 0$)

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{15.33}$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{15.35}$$

(corda fixa em ambas as extremidades)



Principais termos

condições de contorno, 120
composição harmônica, 126
comprimento de onda, 106
equação de onda, 112
fase, 110
frequência fundamental, 125
função de onda, 108
harmônicos, 125
intensidade, 118
interferência construtiva, 123
interferência destrutiva, 123
interferência, 119
meio, 103
modo normal, 126
nó, 122
número de onda, 109
onda estacionária, 122
onda longitudinal, 102
onda mecânica, 103
onda periódica, 105
onda progressiva, 122
onda senoidal, 105
onda transversal, 104
princípio da superposição, 120
série harmônica, 125
sobretom, 125
velocidade da onda, 104
ventre, 122

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

A potência de uma onda mecânica depende de sua frequência e amplitude (veja a Equação (15.25)).

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

15.1 **Resposta: (i).** A 'ola' se desloca horizontalmente de um espectador ao seguinte ao longo de cada fileira do estádio, mas o deslocamento de cada espectador é verticalmente para cima. Como o deslocamento é perpendicular à direção em que a onda se propaga, a onda é transversal.

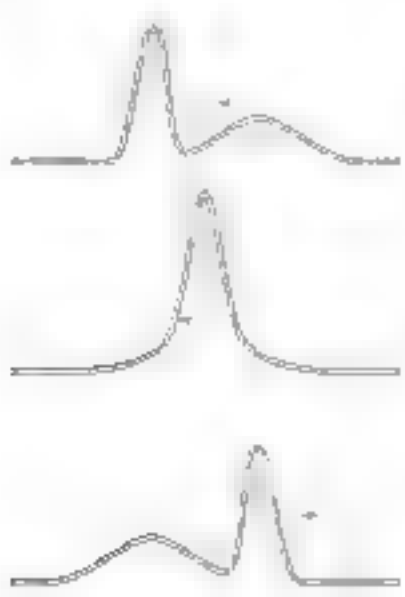
15.2 **Resposta: (iv).** A velocidade de uma onda em uma corda, v, não depende do comprimento de onda. Podemos reescrever a relação $v = \lambda f$ como $f = v/\lambda$, o que nos mostra que se o comprimento de onda dobrar, a frequência se reduzirá à metade.

15.3 **Respostas: (a)** $\frac{1}{2}T$, **(b)** $\frac{1}{2}T$, **(c)** $\frac{5}{2}T$. Como a onda é senoidal, cada ponto na corda oscila em MHS. Assim, podemos aplicar todas as idéias do Capítulo 13 sobre MHS à onda mostrada na Figura 15.8. a) Uma partícula em MHS tem velocidade máxima quando está passando pela posição de equilíbrio ($y = 0$ na Figura 15.8). A partícula no ponto A está passando por essa posição em movimento ascendente em $t = \frac{1}{2}T$. b) Em MHS vertical a maior aceleração *para cima* ocorre quando uma partícula está em seu deslocamento máximo *para baixo*. Isso acontece para a partícula no ponto B em $t = \frac{1}{2}T$. c) Uma partícula em MHS vertical tem uma aceleração *para baixo* quando seu deslocamento é *para cima* (ascendente). A partícula em C tem um deslocamento ascendente (para cima) e está se movendo para baixo em $t = \frac{1}{2}T$.

15.4 **Resposta: (ii).** A relação $v = \sqrt{F/\mu}$ [Equação (15.13)] diz que a velocidade da onda é maior na corda que possui a menor densidade linear, ou seja, a corda mais fina, com a menor quantidade de massa m e, portanto, a menor densidade linear $\mu = m/L$ (todas as cordas possuem o mesmo comprimento).

15.5 **Resposta: (iii), (iv), (ii), (i).** A Equação (15.25) diz que a potência média em uma onda senoidal é $P_{méd} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2$. Todas as quatro cordas são idênticas, então todas possuem a mesma massa, o mesmo comprimento e a mesma densidade linear μ. A frequência f é a mesma para todas as ondas, assim como a frequência angular $\omega = 2\pi f$. Assim, a potência média da onda em cada corda é proporcional à raiz quadrada da tensão da corda F e ao quadrado da amplitude A. Comparada à corda (i), a potência média em cada corda (ii) $\sqrt{4} = 2$ vezes maior, (iii) $4^2 = 16$ vezes maior (iv) $\sqrt{2}(2)^2 = 4\sqrt{2}$ vezes maior.

15.6 **Resposta:**



15.7 **Respostas: sim, sim.** Dobrar a frequência faz com que o comprimento de onda passe a ser a metade. Assim, o espaçamento entre os nós (igual a $\lambda/2$) também é a metade. Há nós em todas as posições anteriores, mas há também um novo nó entre cada par de nós antigos.

15.8 **Respostas: $n = 1, 3, 5...$** Quando se prende o centro da corda com o dedo, está se forçando a criação de um nó no centro. Assim, apenas ondas estacionárias com um nó em $x = L/2$ podem ser criadas. Veja na Figura 15.26 que os modos normais $n = 1, 3, 5...$ não podem estar presentes.

Questões para discussão

Q15.1 Duas ondas se deslocam na mesma corda. É possível que elas tenham a) frequências diferentes; b) comprimentos de onda diferentes; c) velocidades diferentes; d) amplitudes diferentes; e) a mesma frequência, mas comprimentos de onda diferentes? Explique o seu raciocínio.

Q15.2 Sob uma tensão F leva 2,0 s para um pulso se propagar pela extensão de um fio esticado. Que tensão é necessária (em função de F) para que o pulso leve 6,0 s?

Q15.3 Quais são os tipos de energia associados às ondas que se propagam em uma corda esticada? Como esses tipos de energia podem ser detectados experimentalmente?

Q15.4 A amplitude de uma onda diminui quando ela se propaga ao longo de uma corda esticada muito comprida. O que é feito com a energia perdida pela onda quando isso ocorre?

Q15.5 Para o movimento ondulatório descrito neste capítulo, a velocidade de propagação depende da amplitude? Como você pode afirmar isso?

Q15.6 A velocidade das ondas no oceano depende da profundidade da água, quanto maior for a profundidade, maior será a velocidade da onda. Use esse resultado para explicar por que as ondas do oceano aumentam suas cristas e "arrebentam" à medida que as ondas chegam à praia.

Q15.7 É possível a produção de uma onda longitudinal em uma corda esticada? Justifique sua resposta. É possível a produção de uma onda transversal em uma barra de aço? Justifique sua resposta. Caso suas respostas sejam positivas nas duas perguntas anteriores, explique como você poderia produzir tais ondas.

Q15.8 O eco é um som refletido por um objeto distante, tal como uma parede ou um monte. Explique como você pode determinar a distância entre você e o objeto medindo o tempo até ouvir o eco.

Q15.9 Por que você vê o relâmpago antes de ouvir a trovoada? Uma regra prática familiar consiste em começar a contar lentamente quando você vê o relâmpago e dividir o número obtido por 3 para estimar, em quilômetros, a distância entre você e o local onde caiu o raio. Por que isso está correto? Ou não está correto?

Q15.10 Considere uma onda transversal em uma corda. a velocidade dessa onda é igual à velocidade máxima de qualquer parte da corda? Explique a diferença entre essas duas velocidades. Qual delas é constante?

Q15.11 As crianças montam um telefone de brinquedo fazendo passar as extremidades de um fio através de um orifício feito em um copo de papel e amarrando-as de modo que o fio não saia do copo. Quando o fio é esticado, o som pode ser transmitido de um copo para outro. Como isso funciona? Por que o som transmitido pelo fio é mais intenso do que o som transmitido no ar através da mesma distância?

Q15.12 As quatro cordas de um violino possuem espessuras diferentes, porém as tensões nos fios são aproximadamente iguais. A velocidade das ondas é maior na corda mais grossa ou na corda mais fina? Por quê? A frequência de vibração fundamental se comporta de modo diferente quando a corda é espessa e quando a corda é fina?

Q15.13 Uma onda senoidal pode ser descrita por uma função cosseno, que é negativa tão frequentemente quanto positiva. Então, por que a potência média fornecida por essa onda é zero?

Q15.14 Duas cordas de massa diferente por unidade de comprimento μ_1 e μ_2 são amarradas uma à outra e esticadas com uma tensão F. Uma onda percorre a corda e passa pela descontinuidade em μ. Diga qual das seguintes propriedades será a mesma de ambos os lados da descontinuidade, e qual irá mudar: velocidade da onda, frequência, comprimento da onda. Explique o raciocínio físico que embasa as suas respostas.

Q15.15 Uma corda longa de massa m é pendurada no teto e pende verticalmente. Um pulso ondulatório é produzido na extremidade inferior da corda e se propaga para cima. A velocidade da onda se altera à medida que o pulso sobe a corda e, caso se altere, aumenta ou diminui?

Q15.16 Em uma onda transversal em uma corda, o movimento da corda é perpendicular ao seu comprimento. Então, como ocorre a transferência de energia através da corda?

Q15.17 Tanto a intensidade de onda quanto a gravidade obedecem a leis do quadrado inverso. Elas o fazem pelo mesmo motivo? Explique o motivo para cada uma dessas leis do quadrado inverso.

Q15.18 A energia pode ser transferida ao longo de uma corda por movimento ondulatório. Todavia, em uma onda estacionária em uma corda, nenhuma energia pode ser transferida além de um nó. Por que não?

Q15.19 Pode uma onda estacionária ser produzida em uma corda pela superposição de duas ondas que se propagam em sentidos opostos com a mesma frequência, porém com amplitudes diferentes? Justifique sua resposta. Pode uma onda estacionária ser produzida em uma corda pela superposição de duas ondas que se propagam em sentidos opostos com a mesma amplitude, porém com frequências diferentes? Justifique sua resposta.

Q15.20 Se você esticar uma tira de borracha e puxar verticalmente um dos seus pontos você ouvirá um som (ligeiramente) musical. Como a frequência desse tom irá variar quando você esticar ainda mais a tira? (Tente fazer isso!) Esse efeito concorda com a Equação (15.35) para uma corda fixa nas duas extremidades? Explique.

Q15.21 Um intervalo musical de uma *oitava* corresponde a um fator dois na frequência. Qual é o fator de aumento da tensão na corda de uma guitarra para que sua altura aumente de uma oitava? E para que ocorra um aumento de duas oitavas? Explique. Há algum risco nessas mudanças de tonalidade?

Q15.22 Ao tocar seu violino, um violinista pressiona suavemente o centro da corda para produzir uma nota uma oitava acima da nota com a qual a corda está afinada, ou seja, uma nota cuja frequência é exatamente igual ao dobro da frequência inicial. Como isso é possível?

Q15.23 Como vimos na Seção 15.1, as ondas na água são uma combinação de ondas longitudinais e transversais. Defenda a seguinte afirmação: "Quando ondas de água atingem uma parede vertical, a parede é um nó de deslocamento da onda longitudinal, porém é um ventre de deslocamento da onda transversal."

Q15.24 Violinos são instrumentos pequenos, enquanto violoncelos e baixos são instrumentos grandes. Em termos da frequência das ondas que produzem, explique por que esses instrumentos são assim.

Q15.25 Para que servem as palhetas de guitarra? Explique o seu uso em termos da frequência da vibração das cordas.

Exercícios

Seção 15.2 Ondas periódicas

15.1 A velocidade do som no ar a 20 °C é igual a 344 m/s. a) Qual é o comprimento de onda da onda sonora com frequência igual a 784 Hz, correspondente à nota G_5 de um piano, e quantos milissegundos leva cada vibração? b) Qual é o comprimento de onda de um som uma oitava mais alto do que a nota do item (a)?

15.2 **Som audível.** Desde que a amplitude seja suficientemente grande, o ouvido humano pode detectar ondas longitudinais no intervalo aproximado entre 20 Hz e 20000 Hz. a) Se você precisasse assinalar o início de cada configuração de onda completa com um ponto vermelho para o som de comprimento de onda longo e um ponto azul para o som de comprimento de onda curto, a que distância os pontos vermelhos estariam um do outro, e a que distância os pontos azuis estariam um do outro? b) Na realidade, os pontos adjacentes em cada conjunto estariam longe o suficiente para que você pudesse medir a distância com uma régua? c) Suponha que você repetisse o item (a) na água, onde o som se propaga a 1480 m/s. A que distância estariam os pontos um do outro em cada conjunto? Você poderia realmente medir essa distância com uma régua?

15.3 **Tsunami!** Em 26 de dezembro de 2004, um forte terremoto ocorreu na costa da Sumatra e provocou ondas imensas (tsunami) que mataram cerca de 200 mil pessoas. Os satélites que observavam essas ondas do espaço mediram 800 km de uma crista de onda para a seguinte, e um período entre ondas de 1 h. Qual era a velocidade dessas ondas em m/s e km/h? A sua resposta ajuda você a entender por que as ondas causaram tamanha devastação?

15.4 **Imagem de ultra-som.** Sons que possuem frequências acima da capacidade de audição humana (cerca de 20000 Hz) são chamados de *ultra-som*. Ondas acima dessa frequência podem ser usadas para penetrar no corpo e produzir imagens por meio da reflexão de superfícies. Em um típico exame de ultra-som, a onda atravessa os tecidos do corpo com uma velocidade de 1500 m/s. Para uma imagem boa e detalhada, o comprimento de onda deve ser menor do que 1,0 mm. Que frequência sonora é necessária para obter boas imagens?

15.5 **Luz visível.** A luz é uma onda, mas não é uma onda mecânica. As grandezas que oscilam são campos elétricos e magnéticos. A luz visível para os seres humanos possui comprimentos de onda entre 400 nm (violeta) e 700 nm (vermelho), e toda luz se propaga no vácuo à velocidade de 1500 m/s. a) Quais são os limites da frequência e do período da luz visível? b) Seria possível medir a duração de uma única vibração de luz com um cronômetro?

Seção 15.3 Descrição matemática das ondas

15.6 Uma certa onda transversal é descrita por

$$y(x,t) = (6{,}50\text{ mm})\cos 2\pi\left(\frac{x}{28{,}0\text{ cm}} - \frac{t}{0{,}0360\text{ s}}\right)$$

Determine para esta onda a) a amplitude; b) o comprimento de onda; c) a frequência; d) a velocidade de propagação; e) a direção de propagação.

15.7 Ondas transversais em uma corda possuem velocidade de 8,0 m/s, amplitude de 0,0700 m e comprimento de onda igual a 0,320 m. As ondas se movem no sentido $-x$, e em $t = 0$ a extremidade $x = 0$ da corda possui deslocamento máximo para cima. a) Ache a frequência, o período e o número de onda dessas

ondas. b) Ache a função de onda que descreve essa onda. c) Calcule o deslocamento transversal de uma partícula situada no ponto $x = 0{,}360$ m no instante $t = 0{,}150$ s. d) A partir do instante calculado no item (c), quanto tempo a partícula situada no ponto $x = 0{,}360$ m leva para atingir o deslocamento máximo para cima?

15.8 Uma onda se deslocando na água em linha reta sobre um lago é descrita pela equação

$$y(x, t) = (3{,}75\ \text{cm}) \cos (0{,}450\ \text{cm}^{-1} x + 5{,}40\ \text{s}^{-1} t)$$

onde y é o deslocamento perpendicular à superfície sem perturbações do lago. a) Quanto tempo leva para que uma configuração completa de onda passe por um pescador em um barco ancorado, e que distância horizontal a crista da onda percorre nesse tempo? b) Qual é o número da onda e o número de ondas por segundo que passam pelo pescador? c) Com que velocidade uma crista de onda se desloca ao passar pelo pescador, e qual a velocidade máxima de seu flutuador de cortiça quando a onda o faz oscilar para cima e para baixo?

15.9 Quais das seguintes funções satisfazem a função de onda dada pela Equação (15.12)? a) $y(x, t) = A \cos (kx + \omega t)$; b) $y(x, t) = A \operatorname{sen} (kx + \omega t)$; c) $y(x, t) = A (\cos kx + \cos \omega t)$; d) Para a onda do item (b), escreva a equação para a velocidade transversal e a aceleração transversal de uma partícula no ponto x.

15.10 a) Para uma onda descrita por $y(x, t) = A \cos (kx - \omega t)$, a) faça gráficos para y, v_y e a_y em função de x para $t = 0$. b) Considere os seguintes pontos sobre a corda: i) $x = 0$; ii) $x = \pi/4k$; iii) $x = \pi/2k$; iv) $x = 3\pi/4k$; v) $x = \pi/k$; vi) $x = 5\pi/4k$; vii) $x = 3\pi/2k$ e viii) $x = 7\pi/4k$. Para uma partícula em cada um destes pontos para $t = 0$, descreva em palavras se a partícula está em movimento, em que sentido ela se move e diga se a partícula está aumentando de velocidade, diminuindo de velocidade ou se a aceleração é instantaneamente igual a zero.

15.11 Uma onda senoidal propaga-se ao longo de uma corda esticada sobre o eixo Ox. O deslocamento da corda em função do tempo é indicado na Figura 15.30 para partículas nos pontos $x = 0$ e $x = 0{,}0900$ m. a) Qual é a amplitude da onda? b) Qual é o período da onda? c) Informamos a você que a distância entre os pontos $x = 0$ e $x = 0{,}0900$ m é menor do que o comprimento de onda. Determine a velocidade e o comprimento de onda quando ela se propaga no sentido $+x$. d) Supondo agora que a onda se propague no sentido $-x$, determine a velocidade e o comprimento de onda. e) Seria possível determinar de forma não ambígua o comprimento de onda calculado nos itens (c) e (d) se você não soubesse o dado de a distância entre os pontos ser menor do que o comprimento de onda? Justifique sua resposta.

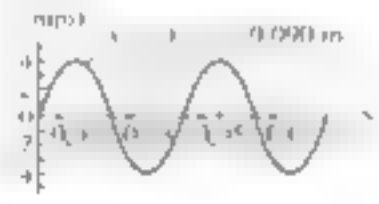


Figura 15.30 Exercício 15.11.

15.12 **Velocidade de propagação da onda versus velocidade de uma partícula.** a) Mostre que a Equação 15.3 pode ser escrita na forma

$$y(x, t) = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

b) Use $y(x, t)$ para encontrar uma expressão para a velocidade transversal v_y de uma partícula da corda onde a onda se propaga. c) Calcule a velocidade máxima de uma partícula da corda. Em que circunstâncias essa velocidade pode ser igual à velocidade v de propagação da onda? Quando ela pode ser menor do que v? E maior do que v?

15.13 Uma onda transversal em uma corda possui amplitude de 0,300 cm, comprimento de onda igual a 12,0 cm e velocidade de 6,0 cm/s. Ela é representada pela função $y(x, t)$ dada no Exercício 15.12. a) Para o tempo $t = 0$, calcule y para intervalos de x iguais a 1,5 cm (ou seja, $x = 0$, $x = 1{,}5$ cm, $x = 3{,}0$ cm, e assim por diante) desde $x = 0$ até $x = 12{,}0$ cm. Faça um gráfico dos resultados obtidos. Essa é a forma da corda para o tempo $t = 0$. b) Repita o cálculo para os mesmos intervalos de x para o tempo $t = 0{,}4$ s e para o tempo $t = 0{,}8$ s. Faça um gráfico da forma da corda para esses tempos. Qual é o sentido da propagação da onda?

Seção 15.4 Velocidade de uma onda transversa

15.14 Com que tensão uma corda de comprimento igual a 2,5 m e massa de 0,120 kg deve ser esticada para que uma onda transversal com frequência de 40,0 Hz possua um comprimento de onda igual a 0,750 m?

15.15 Uma das extremidades de um fio é presa a um dos ramos de um diapasão eletricamente excitado com uma frequência igual a 120 Hz. A outra extremidade passa sobre uma polia e suporta um objeto com massa igual a 1,50 kg. A densidade linear do fio é igual a 0,00550 kg/m. a) Qual é a velocidade de propagação de uma onda transversal na corda? b) Qual é o comprimento de onda? c) Como suas respostas dos itens (a) e (b) se modificam se a massa do objeto aumentar para 3,0 kg?

15.16 Uma corda de 1,5 m e de peso 1,25 N está amarrada ao teto pela sua extremidade superior, e a inferior sustenta um peso p. Quando a corda é puxada suavemente, as ondas que se deslocam para cima obedecem à equação

$$v(x, t) = (8{,}5\ \text{mm}) \cos (172\ \text{m}^{-1} x - 2730\ \text{s}^{-1} t)$$

a) Quanto tempo leva para um pulso percorrer toda a extensão da corda? b) Qual é o peso p? c) Quantos comprimentos de onda há sobre a corda em qualquer instante? d) Qual é a equação para ondas que se deslocam *para baixo* na corda?

15.17 Um fio fino, de 75,0 cm possui uma massa igual a 16,5 g. Uma extremidade está presa por um prego, e a outra está presa a um parafuso que pode ser ajustado para variar a tensão no fio. a) Para que tensão (em newtons) você deve ajustar o parafuso a fim de que uma onda transversal de comprimento de onda de 3,33 cm produza 875 vibrações por segundo? b) Com que rapidez essa onda se deslocará?

15.18 **Corda pesada.** Se, no Exemplo 15.3 (Seção 15.4), você *não* desprezasse a massa da corda, qual seria a velocidade da onda a) na extremidade inferior da corda; b) no meio da corda; c) na extremidade superior da corda?

15.19 Um oscilador harmônico simples no ponto $x = 0$ gera uma onda em uma corda. O oscilador opera em uma frequência de 40,0 Hz e com uma amplitude de 3,0 cm. A corda possui uma densidade linear de 50,0 g/m e está esticada a uma tensão de 5,0 N. a) Determine a velocidade da onda. b) Calcule o comprimento de onda. c) Escreva a função de onda dessa onda. Suponha que o oscilador tenha o seu deslocamento máximo para cima no tempo $t = 0$. d) Calcule a aceleração transversal máxima dos pontos na corda. e) Quando tratamos das ondas transversais neste capítulo, a força da gravidade foi ignorada. Essa aproximação é razoável para essa onda? Explique.

Seção 15.5 Energia no movimento ondulatório

15.20 O fio de um piano de massa igual a 3,0 g e comprimento de 80,0 cm é submetido a uma tensão de 25,0 N. Uma onda com freqüência de 120,0 Hz e amplitude igual a 1,6 mm desloca-se no fio. a) Ache a potência média transportada pela onda. b) O que ocorrerá com a potência média se a amplitude da onda for reduzida à metade?

15.21 Um avião a jato em decolagem pode produzir um som de intensidade 10,0 W/m^2 a 30,0 m de distância. Você, contudo, prefere o som tranqüilo de uma conversa normal, que é 1,0 μ W/m^2. Suponha que o avião se comporte como uma fonte sonora pontual. a) Qual é a mínima distância do aeroporto que a sua casa precisa ter para que você possa conservar a sua paz de espírito? b) Qual é a intensidade sonora que chega à sua amiga se ela mora duas vezes mais longe da pista do que você? c) Que potência sonora o jato produz ao decolar?

15.22 **Limite da dor.** Você está investigando um relatório de alerissagem de um OVNI em uma região deserta do Novo México, e encontra um objeto estranho que está irradiando ondas sonoras uniformemente em todas as direções. Suponha que o som venha de uma fonte pontual e que você possa desprezar as reflexões. Você está caminhando lentamente na direção da fonte. Quando chega a 7,5 m da fonte, você mede a intensidade e descobre que é 0,11 W/m^2. Uma intensidade de 1,0 W/m^2 costuma ser considerada o "limite da dor". Quão mais perto da fonte você conseguirá chegar antes que a intensidade sonora atinja esse limite?

15.23 **Fornecimento de energia.** Por meio de medições, você determina que ondas sonoras estão se propagando igualmente em todas as direções a partir de uma fonte pontual e que a intensidade é igual a 0,026 W/m^2 a uma distância de 4,3 m da fonte. a) Qual é a intensidade a uma distância de 3,1 m da fonte? b) Quanta energia sonora a fonte emite em uma hora se a potência fornecida permanecer constante?

15.24 Um colega estudante com queda para a matemática lhe diz que a função de onda de uma onda progressiva em uma corda fina é

$$y(x, t) = 2,30 \text{ mm} \cos[(6,98 \text{ rad/m})x + (742 \text{ rad/s})t]$$

Sendo mais prático, você mede a corda para que ela tenha um comprimento de 1,35 m e uma massa de 0,00338 kg. Pede-se, então, que você calcule: a) amplitude; b) freqüência; c) comprimento de onda; d) velocidade da onda; e) sentido em que a onda se desloca; f) tensão na corda; g) potência média transmitida pela onda.

15.25 Qual é a potência total fornecida pela sirene no Exemplo 15.5?

Seção 15.6 Interferência de ondas, condições de contorno de uma corda e princípio da superposição

15.26 **Reflexão.** Um pulso ondulatório deslocando-se sobre uma corda para $t = 0$ possui as dimensões indicadas na Figura 15.31. A velocidade da onda é igual a 40 cm/s. a) Se o ponto O for uma extremidade fixa, desenhe a onda total sobre a corda para $t = 15$ ms, 20 ms, 25 ms, 30 ms, 35 ms, 40 ms e 45 ms. b) Repita o item (a) quando o ponto O for uma extremidade livre.

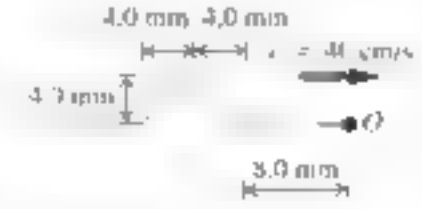


Figura 15.31 Exercício 15.26.

15.27 **Reflexão.** Um pulso ondulatório deslocando-se sobre uma corda para $t = 0$ possui as dimensões indicadas na Figura 15.32. A velocidade da onda é igual a 5,0 m/s. a) Se o ponto O for uma extremidade fixa, desenhe a onda total sobre a corda para $t = 1,0$ ms, 2,0 ms, 3,0 ms, 4,0 ms, 5,0 ms, 6,0 ms e 7,0 ms. b) Repita o item (a) quando o ponto O for uma extremidade livre.

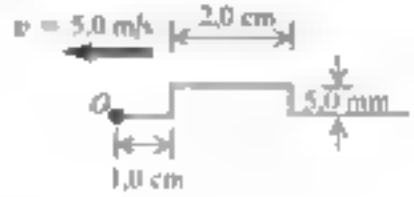


Figura 15.32 Exercício 15.27.

15.28 Dois pulsos ondulatórios triangulares estão se aproximando em uma corda esticada, como indicado na Figura 15.33. Os dois pulsos são idênticos e se deslocam com velocidade igual a 2,0 cm/s. A distância entre as extremidades dianteiras dos pulsos é igual a 1,0 cm para $t = 0$. Desenhe a forma da corda para $t = 0,250$ s, $t = 0,500$ s, $t = 0,750$ s, $t = 1,000$ s e $t = 1,250$ s.

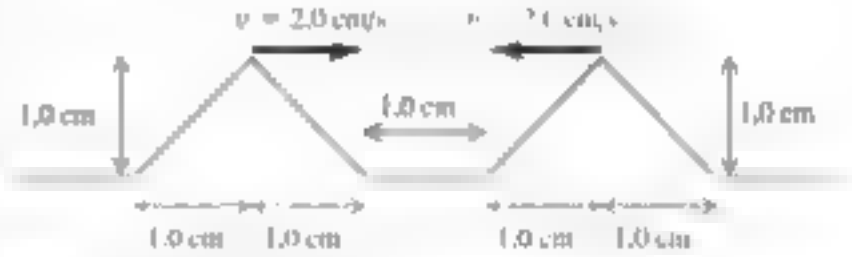


Figura 15.33 Exercício 15.28.

15.29 Suponha que o pulso que se desloca para a esquerda no Exercício 15.28 esteja *abaixo* do nível da corda não esticada, em vez de acima. Desenhe os mesmos diagramas que você desenhou naquele exercício.

15.30 Dois pulsos estão se deslocando em sentidos opostos em uma corda esticada, como mostra a Figura 15.34. Cada quadrado possui 1,0 cm de lado. Desenhe a forma da corda depois de a) 6,0 s; b) 7,0 s; c) 8,0 s.

Figura 15.34 Exercício 15.30.

15.31 A Figura 15.35 mostra dois pulsos ondulatórios retangulares se aproximando em sentidos contrários em uma corda esticada. A velocidade de cada pulso é igual a 1,0 mm/s, e a figura indica a largura e a altura de cada pulso. Se a distância entre a parte dianteira de um pulso e a frente do outro pulso for igual a 8,0 mm no instante $t = 0$, desenhe a onda na corda para $t = 4,0$ s, $t = 6,0$ s e $t = 10,0$ s.

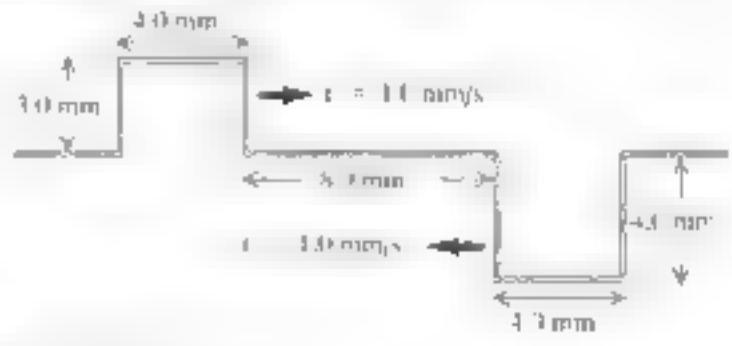


Figura 15.35 Exercício 15.31.

15.32 Duas ondas que se deslocam por uma corda são idênticas, a não ser por suas velocidades opostas. Ambas obedecem à equação $y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, onde o sinal de mais ou menos depende do sentido em que a onda se desloca. a) Mostre que a corda em vibração é descrita pela equação $y_{est}(x, t) = 2A \operatorname{sen} kx \cos \omega t$. (*Sugestão:* Use as fórmulas trigonométricas para sen (a ± b).) b) Mostre que a corda nunca se move nos lugares em que $x = n\lambda/2$, onde n é um número inteiro não negativo.

Seção 15.7 Ondas estacionárias em uma corda

15.33 As ondas estacionárias em um fio são descritas pela Equação (15.28), com $A_{ES} = 2{,}50$ mm, $\omega = 942$ rad/s e $k = 0{,}750\pi$ rad/m. A extremidade esquerda do fio está no ponto $x = 0$. Calcule as distâncias entre a extremidade esquerda do fio e a) os nós da onda estacionária; b) os ventres da onda estacionária.

15.34 A distância entre dois ventres adjacentes de uma onda estacionária sobre uma corda é igual a 15,0 cm. Uma partícula situada em um ventre oscila com MHS com amplitude igual a 0,850 cm e período igual a 0,0750 s. A corda está sobre o eixo Ox e se encontra fixa no ponto $x = 0$. a) Qual a distância entre nós adjacentes? b) Qual o comprimento de onda, a amplitude e a velocidade de duas ondas progressivas que adquirem essa configuração? c) Calcule as velocidades transversais máxima e mínima de um ponto em um ventre. d) Qual é a menor distância ao longo da corda entre um nó e um ventre?

15.35 **Equação de onda e ondas estacionárias.** a) Mediante substituição direta, prove que $y(x, t) = (A_{ES} \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t$ é uma solução da equação de onda, Equação (15.12), para $v = \omega/k$. b) Explique a razão pela qual a relação $v = \omega/k$ deduzida para ondas *progressivas* também se aplica para ondas *estacionárias*.

15.36 Forneça os detalhes da dedução da Equação (15.28) usando a relação $y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$.

15.37 Sejam $y_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega t)$ e $y_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega t)$ duas soluções da equação de onda, Equação (15.12), para a mesma velocidade v. Mostre que $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ também é uma solução da equação de onda.

Seção 15.8 Modos normais de uma corda

15.38 Uma corda de comprimento igual a 1,5 m é esticada entre dois suportes com uma tensão tal que a velocidade da onda transversal é igual a 48,0 m/s. Calcule o comprimento de onda e a frequência: a) do modo fundamental; b) do segundo sobretom; c) do quarto harmônico.

15.39 Um fio com massa igual a 40,0 g é esticado de modo que suas extremidades permanecem fixas a uma distância igual a 80,0 cm. O fio vibra de forma que a frequência do modo fundamental é igual a 60,0 Hz e a amplitude em um ventre é igual a 0,3 cm. a) Ache a velocidade de propagação de uma onda transversal no fio. b) Calcule a tensão no fio. c) Calcule a velocidade transversal máxima e a aceleração de partículas no fio.

15.40 Para afinar um piano, um músico estica os fios de aço do piano com uma tensão igual a 800 N. O comprimento do fio de aço é igual a 0,4 m e sua massa é igual a 3,0 g. a) Qual é a frequência do modo fundamental de vibração do fio? b) Qual é o número de harmônicos superiores que podem ser ouvidos por uma pessoa capaz de ouvir frequências de até 10000 Hz?

15.41 Uma corda fina, esticada, presa nas duas extremidades e oscilando em seu terceiro harmônico possui a forma descrita pela equação $y(x, t) = (5{,}60 \text{ cm}) \operatorname{sen}[(0{,}0340 \text{ rad/cm})x] \operatorname{sen}[(50{,}0 \text{ rad/s})t]$, onde a origem está na extremidade esquerda da corda, o eixo Ox está na corda e o eixo Oy é perpendicular à corda. a) Desenhe um diagrama que mostre a configuração da onda estacionária. b) Calcule a amplitude das duas ondas progressivas que compõem essa onda estacionária. c) Qual é o comprimento da corda? d) Calcule o comprimento de onda, a frequência, o período e a velocidade das ondas progressivas. e) Calcule a velocidade transversal máxima de um ponto na corda. f) Qual seria a equação $y(x, t)$ para essa corda se ela estivesse vibrando em seu oitavo harmônico?

15.42 A função da onda de uma onda estacionária é $y(x, t) = 4.44 \text{ mm} \operatorname{sen}[(32{,}5 \text{ rad/m})x] \operatorname{sen}[(754 \text{ rad/s})t]$. Para as duas ondas progressivas que compõem essa onda estacionária, calcule a) amplitude, b) comprimento de onda, c) frequência, d) velocidade da onda, e) funções da onda. (f) Pelas informações que foram fornecidas, você consegue descobrir qual é esse harmônico? Explique.

15.43 Considere novamente a corda e a onda progressiva do Exercício 15.24. Suponha que as extremidades da corda estejam presas e que a onda progressiva e a onda refletida se desloquem em sentidos opostos. a) Qual é a função de onda para a onda estacionária produzida? b) Em que harmônico a onda estacionária está oscilando? c) Qual é a frequência da oscilação fundamental?

15.44 Uma corda de certo instrumento musical tem 75,0 cm de comprimento e uma massa de 8,75 g. O instrumento está sendo tocado em uma sala onde a velocidade do som é 344 m/s. a) A que tensão é preciso ajustar a corda para que, ao vibrar em seu segundo sobretom, produza um som de comprimento de onda igual a 3,35 cm? b) Que frequência sonora essa corda produz em seu modo de vibração fundamental?

15.45 O segmento de uma corda de certo instrumento entre a ponte de apoio das cordas e a extremidade superior (a parte que vibra livremente) possui comprimento igual a 60,0 cm e massa igual a 2,0 g. Quando tocada, a corda emite uma nota A_4 (440 Hz). a) Em que ponto o violoncelista deve colocar o dedo (ou seja, qual é a distância x entre o ponto e a ponte de apoio das cordas) para produzir uma nota D_5 (587 Hz)? (Veja a Figura 15.36.) Nas duas notas A_4 e D_5 a corda vibra no modo fundamental. b) Sem afinar novamente, é possível produzir uma nota G_4 (392 Hz) nessa corda? Justifique sua resposta.

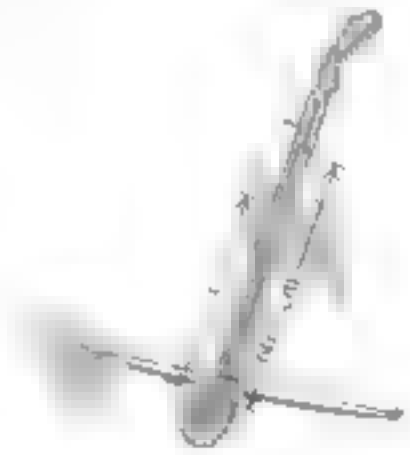


Figura 15.36 Exercício 15.45.

15.46 a) Uma corda horizontal amarrada nas duas extremidades vibra no modo fundamental. Uma onda estacionária possui velocidade v, frequência f, amplitude A e comprimento de onda igual a λ. Calcule a velocidade transversal máxima e a aceleração máxima nos pontos localizados em i) $x = \lambda/2$; ii) $x = \lambda/4$, e iii) $x = \lambda/8$, a partir da extremidade esquerda da corda. b) Em cada um dos pontos calculados no item (a), qual é a amplitude do movimento? c) Em cada um dos pontos calculados no item (a), quanto tempo a corda leva para ir do seu deslocamento máximo para cima até seu deslocamento máximo para baixo?

15.47 **Corda de guitarra.** Uma das cordas de uma guitarra de comprimento igual a 63,5 cm é afinada para produzir uma nota B_3 (frequência igual a 245 Hz) quando está vibrando no modo fundamental. a) Calcule a velocidade da onda transversal que percorre a corda. b) Se a tensão da corda aumentar de 1%, qual deve ser a nova frequência fundamental da corda? c) Se a velocidade do som no ar circundante for igual a 344 m/s, ache o comprimento de onda e a frequência da onda sonora produzida quando a corda vibra com a nota B_3. Como se compara este resultado com a frequência e com o comprimento de onda da onda estacionária da corda?

15.48 **Ondas em uma vareta.** Uma vareta flexível de 2,0 m de comprimento não está presa, encontrando-se completamente livre para vibrar. Desenhe de modo claro essa vareta vibrando em seus primeiros três harmônicos, depois use os seus desenhos para encontrar o comprimento de onda de cada um desses harmônicos. (*Sugestão:* As extremidades devem ser nós ou ventres?)

Problemas

15.49 Uma onda transversal senoidal com amplitude igual a 2,5 mm e comprimento de onda igual a 1,8 m propaga-se com velocidade de 36,0 m/s da esquerda para a direita ao longo de uma corda estirada horizontal. Considere a origem na extremidade esquerda da corda sem perturbação. No tempo $t = 0$ a extremidade esquerda está sobre a origem e se move de baixo para cima. a) Ache a frequência, a frequência angular e o número de onda desta onda. b) Qual é a função $y(x, t)$ que descreve a onda? c) Qual é a função $y(t)$ para uma partícula na extremidade esquerda da corda? d) Qual é a função $y(t)$ para uma partícula situada a 1,35 m à direita da origem? e) Qual é o módulo máximo da velocidade transversal de qualquer partícula da corda? f) Ache o deslocamento transversal e a velocidade transversal de uma partícula situada a 1,35 m à direita da origem para o tempo $t = 0{,}0625$ s.

15.50 Uma onda transversal sobre uma corda é dada por $y(x, t) = (0{,}750\text{ cm})\,\text{sen}\,[(250\text{ s}^{-1})t + (0{,}400\text{ cm}^{-1})x]$. a) Ache a amplitude, o período, a frequência, o comprimento de onda e a velocidade de propagação da onda. b) Faça um desenho da corda para os seguintes valores de t: 0,0005 s e 0,0010 s. c) A onda está se deslocando no sentido $+x$ ou no sentido $-x$? d) A massa por unidade de comprimento da corda é igual a 0,500 kg/m. Ache a tensão. e) Ache a potência média transportada por esta onda.

15.51 Três fios, cada um de comprimento L, são ligados em série por meio de suas extremidades formando um fio de comprimento igual a $3L$. As densidades lineares dos três fios são, respectivamente, μ_1, $\mu_2 = 4\mu_1$ e $\mu_3 = \mu_1/4$. a) Se o fio combinado está sob tensão F, quanto tempo leva uma onda transversal para percorrer o comprimento total $3L$? Forneça a resposta em função de L, F e de μ_1. b) A resposta do item (a) depende da ordem em que os fios são ligados? Explique.

15.52 Uma viga irregular de 1 750 N está pendurada horizontalmente por suas extremidades em um teto por dois fios verticais (A e B), cada um com 1,25 m de comprimento e pesando 2,5 N. O centro de gravidade dessa viga está a um terço da viga a partir da extremidade em que o fio A está amarrado. Se você puxar ambas as cordas ao mesmo tempo, qual será o intervalo de tempo entre a chegada dos dois pulsos ao teto? Que pulso chegará primeiro?

15.53 **Brincando com a formiga.** Você coloca a sua formiga de estimação, Carolina (massa m), sobre uma corda horizontal estacada, a que ela se agarra com firmeza. A corda tem massa M e comprimento L, e está sob a tensão F. Você provoca uma onda senoidal transversal de comprimento de onda λ e amplitude A, que se propaga ao longo da corda. O movimento da corda ocorre em um plano vertical. A massa de Carolina é tão pequena que a sua presença não tem efeito sobre a propagação da onda. a) Qual é a velocidade máxima de Carolina ao oscilar para cima e para baixo? b) Carolina gosta da brincadeira e pede mais. Você decide dobrar a sua velocidade máxima variando a tensão ao mesmo tempo em que mantém o valor do comprimento de onda e da amplitude. A tensão deve ser aumentada ou diminuída, e em que fator?

15.54 **Formiga sem peso.** Uma formiga de massa m está tranquilamente em repouso sobre uma corda esticada horizontalmente. A corda possui densidade linear μ e está sob tensão F. Sem avisar, Tobias produz uma onda transversal senoidal com um comprimento de onda λ que se propaga na corda. O movimento da corda está contido em um plano vertical. Qual é a amplitude máxima da onda que faz a formiga ficar repentinamente com um peso aparente igual a zero? Suponha que a massa m seja tão pequena que a presença da formiga não altere a propagação da onda.

15.55 Quando uma onda transversal senoidal propaga-se ao longo de uma corda, as partículas da corda executam um MHS. Esse movimento é o mesmo que ocorre no caso da massa m presa a uma mola ideal cuja constante é igual a k'. Para esse caso, verificamos no Capítulo 13 que a frequência angular das oscilações é dada por $\omega = \sqrt{k'/m}$. Considere uma corda com densidade linear μ sob tensão F ao longo da qual ocorre a propagação de uma onda transversal senoidal com amplitude A e comprimento de onda λ. a) Ache a "constante da mola" k da força restauradora que atua sobre um segmento curto da corda de comprimento igual a Δx (sendo $\Delta x \ll \lambda$). b) Como a "constante da mola" calculada no item a) é função de F, de μ, de A e de λ? Explique as razões físicas para este comportamento.

15.56 Um fio de 5,0 m e 0,732 kg é usado para sustentar dois postes uniformes de 235 N de igual comprimento (Figura 15.37). Suponha que o fio esteja na horizontal e que a velocidade do som seja 344 m/s. Um vento forte está soprando, fazendo com que o fio vibre em seu sétimo sobretom. Quais são a frequência e o comprimento de onda do som que esse fio produz?

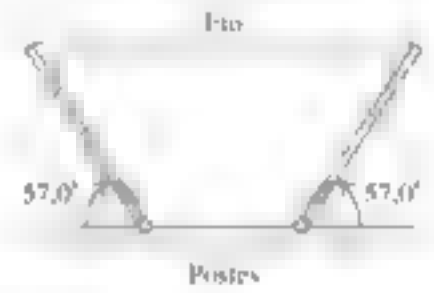


Figura 15.37 Problema 15.56

15.57 Uma onda não senoidal. A forma de uma onda em uma corda em um instante específico é mostrada na Figura 15.38. A onda está se deslocando para a direita, no sentido $+x$. a) Determine o sentido da *velocidade* transversal dos seis pontos assinalados sobre a curva. Quando a velocidade for nula, mencione esse fato. Explique seu raciocínio. b) Determine o sentido da *aceleração* transversal dos seis pontos assinalados sobre a curva. Explique seu raciocínio. c) Como suas respostas deveriam ser alteradas se a onda está se deslocando para a esquerda, no sentido $-x$?

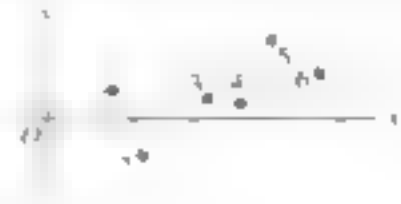


Figura 15.38 Problema 15.57

15.58 Uma sucessão contínua de pulsos ondulatórios senoidais é produzida em uma extremidade de uma corda bastante longa e se propaga por toda a extensão da corda. A onda possui uma frequência de 40,0 Hz, amplitude de 5,0 mm e comprimento de onda de 0,6 m. a) Quanto tempo a onda leva para percorrer uma distância de 8,0 m na corda? b) Quanto tempo um ponto na corda leva para percorrer a distância de 8,0 m, uma vez que a sucessão de ondas tenha chegado ao ponto e o colocado em movimento? c) Nos itens (a) e (b), como o tempo varia se a amplitude for dobrada?

15.59 **Ondas bidimensionais.** Uma corda esticada está sobre o eixo Ox. A corda é deslocada nos sentidos y e z, de modo que o deslocamento transversal da corda seja dado por

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad z(x, t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

a) Faça o gráfico de z em função de y para uma partícula da corda em $x = 0$. Esse gráfico mostra a trajetória da partícula como vista por um observador sobre o eixo Ox olhando para $x = 0$. Indique a posição da partícula em $t = 0$, $t = \pi/2\omega$, $t = \pi/\omega$ e $t = 3\pi/2\omega$. b) Encontre o vetor velocidade de uma partícula em uma posição *arbitrária* x sobre a corda. Mostre que esse vetor representa a velocidade tangencial de uma partícula que se desloca em um círculo de raio A com velocidade angular ω, e mostre que a velocidade da partícula é constante (isto é, a partícula está em movimento circular uniforme). (Veja o Problema 3.75.) c) Encontre o vetor aceleração da partícula no item (b). Mostre que a aceleração é sempre voltada para o centro do círculo e que o seu módulo é $a = \omega^2 A$. Explique esses resultados em termos do movimento circular uniforme. Agora suponha que o deslocamento da corda fosse dado por

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad z(x, t) = -A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

Descreva como o movimento de uma partícula em x seria diferente do movimento descrito no item (a).

15.60 Um fio de cobre vertical, de 1,20 m de extensão e calibre 18 (diâmetro de 1,024 mm) tem uma esfera de 100,0 N pendurada em sua extremidade. a) Qual é o comprimento de onda do terceiro harmônico do fio? b) Agora uma esfera de 500,0 N substitui a esfera original. Qual é a variação do comprimento de onda do terceiro harmônico provocada pela substituição da esfera leve pela pesada? (*Sugestão:* Veja o módulo de Young na Tabela 11.1.)

15.61 **Ondas com formas arbitrárias.** Explique a razão pela qual *qualquer* onda descrita por uma função da forma $y(x, t) = f(x - vt)$ se desloca no sentido $+x$ com velocidade v. b) Mostre que $y(x, t) = f(x - vt)$ satisfaz à equação de onda qualquer que seja a forma da função f. Para fazer isso, escreva $y(x, t) = f(u)$, onde $u = x - vt$. A seguir, para obter as derivadas parciais de $y(x, t)$, use a regra de derivação em cadeia:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}(-v)$$
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}$$

c) Um pulso ondulatório é dado por $y(x, t) = De^{-(Bx - Ct)^2}$, onde B, C e D são constantes positivas. Qual é a velocidade dessa onda?

15.62 A Equação (15.7) para uma onda senoidal pode ser generalizada ainda mais incluindo o ângulo de fase ϕ, onde $0 \le \phi \le 2\pi$ (em radianos). Então, a função de onda $y(x, t)$ se escreve na forma $y(x, t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$. a) Faça um desenho da onda em função de x no instante $t = 0$ para $\phi = 0$, $\phi = \pi/4$, $\phi = \pi/2$, $\phi = 3\pi/4$ e $\phi = 3\pi/2$. b) Ache a velocidade transversal $v_y = \partial y/\partial t$. c) Para $t = 0$, uma partícula sobre a corda em $x = 0$ possui deslocamento $y = A/\sqrt{2}$. Essa informação é suficiente para determinar o valor de ϕ? Se, além disso, você for informado que uma partícula sobre a corda em $x = 0$ se desloca para $y = 0$ no instante $t = 0$, qual é o valor de ϕ? d) Explique de modo geral o que você deve conhecer do comportamento da onda em um dado instante para determinar o valor de ϕ.

15.63 a) Mostre que a Equação (15.25) pode ser escrita do seguinte modo: $P_{méd} = \frac{1}{2}F\omega kA^2$, onde k é o número de onda da onda. b) Se a tensão F na corda quadruplicar enquanto a amplitude A permanecer a mesma, como devem ser alterados os valores de k e de ω para que a potência média permaneça constante? (*Sugestão:* Lembre da Equação (15.6).)

15.64 **Energia em um pulso triangular.** Um pulso ondulatório triangular em uma corda esticada propaga-se no sentido $+x$ com velocidade v. A tensão na corda é F e a densidade linear da corda é μ. Em $t = 0$, a forma do pulso é dada por

$$y(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -L \\ h\left(1 + \frac{x}{L}\right) & \text{para } -L < x < 0 \\ h\left(1 - \frac{x}{L}\right) & \text{para } 0 < x < L \\ 0 & \text{para } x > L \end{cases}$$

a) Desenhe o pulso em $t = 0$; b) Determine a função de onda $y(x, t)$ em todos os tempos t. c) Ache a potência instantânea na onda. Mostre que a potência é igual a zero a não ser para $-L < (x - vt) < L$ e que nesse intervalo a potência é constante. Calcule o valor dessa potência constante.

15.65 Uma onda senoidal transversal desloca-se em uma corda. A corda tem 8,0 m de comprimento e massa de 6,0 g. A velocidade da onda é 30,0 m/s e o comprimento de onda é 0,2 m. a) Se a onda deve ter uma potência média de 50,0 W, qual deve ser a amplitude da onda? b) Para essa mesma corda, se a amplitude e o comprimento de onda forem iguais aos do item (a), qual é a potência média para a onda se a tensão for aumentada de tal forma que a velocidade da onda dobra?

15.66 **Potência instantânea de uma onda.** a) Faça um desenho de $y(x, t)$ dado pela Equação (15.7) em função de x no instante t (digamos para $t = 0$). Sobre os mesmos eixos, faça um desenho da potência instantânea $P(x, t)$ dado pela Equação (15.23). b) Explique a conexão entre o valor de $P(x, t)$ e a inclinação da curva de $y(x, t)$ em função de x. Em particular, explique o que ocorre no ponto $P = 0$, no qual não existe nenhuma transferência de energia instantânea. c) A grandeza $P(x, t)$ sempre possui valor positivo. O que isso implica sobre o sentido da transferência de energia? d) Considere uma onda se propagando no sentido $-x$, para a qual $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$. Calcule $P(x, t)$ para esta onda e faça um gráfico de $y(x, t)$ e $P(x, t)$ em função de x no instante t (digamos para $t = 0$). Que modificações ocorrem quando o sentido de propagação da onda se inverte?

15.67 Um fio metálico com densidade ρ e Y, módulo de Young, é esticado entre dois suportes rígidos. Para uma temperatura T, a velocidade de uma onda transversal é igual a v_1. Quando a temperatura aumenta para $T + \Delta T$, a velocidade diminui para um valor $v_2 < v_1$. Determine o coeficiente de expansão linear do fio.

15.68 Uma corda de 50,0 cm de comprimento vibrando está sob uma tensão de 1,0 N. Os resultados de cinco fotografias estroboscópicas sucessivas são mostrados na Figura 15.39. A taxa do estroboscópio é fixada em 5000 flashes por minuto, e observações

revelam que o deslocamento máximo ocorreu nos flashes 1 e 5, sem nenhum outro máximo no intervalo entre eles. a) Calcule o período, a freqüência e o comprimento de onda para as ondas progressivas nessa corda. b) Em que modo normal (harmônico) a corda está vibrando? c) Qual é a velocidade das ondas progressivas na corda? d) Com que velocidade o ponto *P* se move quando a corda está na (i) posição 1 e (ii) posição 3? e) Qual é a massa dessa corda? (Seção 15.3).

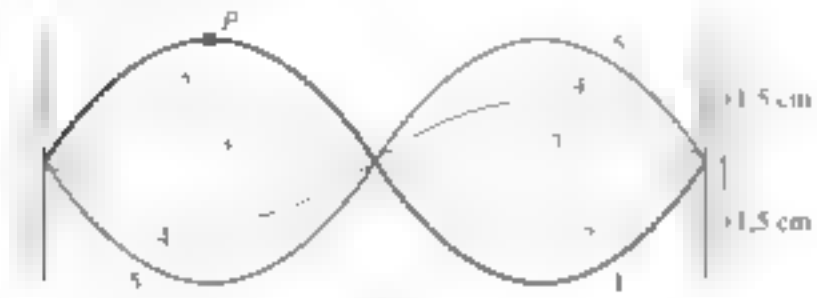


Figura 15.39 Problema 15.68

15.69 **Nós no varal.** Seu primo Tobias está outra vez brincando com o varal do Exemplo 15.2 (Seção 15.3). Uma extremidade da corda do varal está presa a um poste vertical. Tobias segura a outra extremidade frouxamente na mão, de modo que a velocidade das ondas no varal é relativamente baixa. Ele encontra várias freqüências em que pode oscilar sua extremidade da corda de modo que um leve prendedor de roupas a 45,0 cm do poste não se mova. Quais são essas freqüências?

15.70 Uma corda de guitarra está vibrando em seu modo fundamental, com nós em ambas as extremidades. O comprimento do segmento da corda que está livre para vibrar é 0,386 m. A aceleração transversal máxima de um ponto no meio de um segmento é $8,40 \times 10^3$ m/s^2 e a velocidade transversal máxima é 3,80 m/s. a) Qual é a amplitude dessa onda estacionária? b) Qual é a velocidade da onda para as ondas progressivas transversais na corda?

15.71 Como você verificou no Exercício 15.35, uma onda estacionária descrita pela Equação (15.28) satisfaz a equação de onda, Equação (15.12). a) Mostre que uma onda estacionária descrita pela Equação (15.28) também satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -\omega^2 y(x,t)$$

Interprete essa equação em termos do que você sabe a respeito de um MHS. b) Uma onda progressiva descrita por $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ também satisfaz a equação do item (a)? Interprete esse resultado.

15.72 a) As ondas que se propagam em sentidos contrários na Figura 15.20 se superpõem de tal modo que o deslocamento no ponto *O* é sempre igual a zero. Para provar matematicamente esse resultado para uma onda de forma arbitrária, considere uma onda se propagando da esquerda para a direita ao longo da corda na Figura 15.20 que no instante T é dada por $y_1(x, T) = f(x)$, onde f é qualquer função de x. (A forma de $f(x)$ determina a forma da onda.) Se o ponto *O* corresponde ao ponto $x = 0$, explique por que no instante T a onda que se move da direita para a esquerda na Figura 15.20 é dada por $y_2(x, T) = -f(-x)$. b) Mostre que a onda obtida pela superposição das duas ondas $y(x, T) = y_1(x, T) + y_2(x, T)$ é sempre igual a zero no ponto *O*, independentemente da forma da função $f(x)$. c) As duas ondas que se propagam em sentidos contrários, como indicado na Figura 15.21, superpõem-se de tal modo que a inclinação no ponto *O* é sempre igual a zero. Para provar matematicamente esse resultado para uma onda de forma arbitrária, considere novamente uma onda se propagando da esquerda para a direita na Figura 15.21 que, no instante T é dada por $y_1(x, T) = f(x)$. d) Mostre que a onda obtida pela superposição das duas ondas $y(x, T) = y_1(x, T) + y_2(x, T)$ possui sempre inclinação igual a zero no ponto *O* (independentemente da forma da função $f(x)$), desde que a derivada de primeira ordem dessa função seja finita.

15.73 Uma corda esticada ao longo do eixo $+Ox$ possui uma extremidade livre no ponto $x = 0$. a) Fazendo um desenvolvimento semelhante ao usado na dedução da Equação (15.28), mostre que uma onda progressiva incidente $y_1(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$ produz uma onda estacionária $y(x, t) = 2A \cos \omega t \cos kx$. b) Mostre que a onda estacionária obtida possui ventre na extremidade livre ($x = 0$). c) Ache o deslocamento máximo, a velocidade máxima e a aceleração máxima na extremidade livre da corda.

15.74 Uma corda cujas extremidades são fixas está vibrando no terceiro harmônico. As ondas possuem velocidade igual a 192 m/s e freqüência igual a 240 Hz. A amplitude da onda estacionária em um ventre é igual a 0,400 cm. a) Calcule a amplitude nos pontos da corda cujas distâncias até a extremidade esquerda da corda são i) 40,0 cm, ii) 20,0 cm e iii) 10,0 cm. b) Para cada um dos pontos mencionados no item (a), calcule quanto tempo a corda leva para ir do seu deslocamento máximo para cima até seu deslocamento máximo para baixo. c) Ache a velocidade transversal máxima e a aceleração transversal máxima em cada um dos pontos mencionados no item (a).

15.75 Um fio de aço cilíndrico uniforme de 55,0 cm de comprimento e 1,14 mm de diâmetro é fixado em ambas as extremidades. A que tensão ele deve ser ajustado para que, ao vibrar em seu primeiro sobretom, produza a nota D^5 de freqüência 311 Hz? Suponha que a deformação do fio seja desprezível. (*Sugestão:* Use a Tabela 14.1.)

15.76 **Resistir à tensão.** Um fio ou corda se romperá se for submetido a muita tensão (Equação 11.8). Cordas mais grossas podem resistir a uma tensão maior sem se romper porque quanto mais grossa a corda, maior é a área transversal e menor a tensão. Um tipo de aço possui densidade igual a $7,8 \times 10^3$ kg/m^3 e uma tensão de ruptura igual a $7,0 \times 10^8$ N/m^2. Você deseja fabricar uma corda de guitarra usando 4,0 g desse aço. A corda de guitarra deve poder resistir a uma tensão de 900 N sem se romper. A sua tarefa é: a) determinar o comprimento máximo e o raio mínimo que a corda pode ter; b) determinar a freqüência fundamental mais alta possível das ondas estacionárias na corda, se toda a extensão da corda estiver livre para vibrar.

15.77 **Superposição de ondas estacionárias.** A corda de uma guitarra de comprimento L é puxada de tal modo que a onda resultante é a soma do modo fundamental com o segundo harmônico. Ou seja, a onda resultante é dada por

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

onde

$$y_1(x, t) = C \operatorname{sen} \omega_1 t \operatorname{sen} k_1 x$$

$$y_2(x, t) = C \operatorname{sen} \omega_2 t \operatorname{sen} k_2 x$$

com $\omega_1 = vk_1$ e $\omega_2 = vk_2$. a) Para que valores de x ocorrem os nós de y_1? b) Para que valores de x ocorrem os nós de y_2? c) Faça um gráfico da onda resultante para $t = 0$, $t = \frac{1}{4}f_1$, $t = \frac{1}{2}f_1$, $t = \frac{3}{4}f_1$ e $t = f_1$. d) A soma das duas ondas y_1 e y_2 produz uma onda estacionária? Explique.

15.78 Quando uma estátua pesada de alumínio é dependurada em um fio de aço, a frequência fundamental das ondas estacionárias transversais no fio é igual a 250 Hz. A seguir a estátua (mas não o fio) é completamente submersa na água. a) Qual é a nova frequência fundamental? (*Sugestão:* Use a Tabela 14.1.) b) Por que é uma boa aproximação considerar o fio como se estivesse fixo nas duas extremidades?

15.79 Um músico afina a corda *C* do seu instrumento para uma frequência fundamental igual a 65,4 Hz. O comprimento da seção da corda que vibra é igual a 0,600 m e a massa é igual a 14,4 g. a) Qual é a tensão com a qual ela deve ser esticada? b) Qual deve ser o aumento percentual da tensão para fazer a frequência aumentar de 65,4 Hz até 73,4 Hz, correspondendo a um aumento na altura da nota C para a nota D?

Problemas desafiadores

15.80 **Onda longitudinal em uma mola.** Molas muito compridas, tais como uma mola longa de brinquedo e as molas usadas em demonstrações de laboratório, podem servir para visualizar a propagação de uma onda longitudinal. a) Mostre que, se a constante da mola for k', a massa for m e o comprimento for igual a L, a velocidade de uma onda longitudinal na mola é dada por $v = L\sqrt{k'/m}$. b) Determine v para uma mola com $m = 0{,}250$ kg, $L = 2{,}0$ m e $k' = 1{,}5$ N/m.

15.81 a) Mostre que para a propagação de uma onda em uma corda a energia cinética *por unidade de comprimento da mola* é dada por

$$u_k(x,t) = \frac{1}{2}\mu v_y^2(x,t) = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

onde μ é a densidade linear. b) Calcule $u_k(x, t)$ para uma onda senoidal dada pela Equação (15.7). c) Existe também energia potencial elástica armazenada na corda associada ao trabalho realizado para esticar e deformar a corda. Considere um pequeno segmento da corda no ponto x que possui um comprimento sem deformação igual a Δx, como indicado na Figura 15.13. Desprezando a (pequena) curvatura do segmento, sua inclinação é dada por $\partial y(x, t)/\partial x$. Suponha que o deslocamento da corda a partir da posição de equilíbrio seja pequeno, de modo que $\partial y/\partial x$ possua módulo muito menor do que um. Mostre que o comprimento não deformado do segmento é dado aproximadamente por

$$\Delta x - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2 \Delta x$$

(*Sugestão:* Use a relação $\sqrt{1+u} \approx 1 + \frac{1}{2}u$, válida para $|u| \ll 1$.) d) A energia potencial armazenada no segmento é igual ao trabalho realizado pela tensão da corda F (que atua ao longo da corda) para esticar o segmento desde seu comprimento sem deformação Δx até o comprimento calculado no item (c). Calcule esse trabalho realizado e mostre que a energia potencial *por unidade de comprimento da corda* é dada por

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2$$

e) Calcule $u_p(x, t)$ para uma onda senoidal dada pela Equação (15.7). f) Mostre que $u_k(x, t) = u_p(x, t)$ para todos os valores de x e de t. g) Faça gráficos de $y(x, t)$, $u_k(x, t)$ e $u_p(x, t)$ em função de x para $t = 0$ usando os mesmos eixos para as três curvas. Explique por que u_k e u_p assumem valores máximos quando y for igual a zero e vice-versa. h) Mostre que a potência instantânea da onda, dada pela Equação (15.22), é igual à energia total por unidade de comprimento multiplicada pela velocidade da onda v. Explique por que esse resultado é razoável.

15.82 Um escafandrista está suspenso 100 m abaixo da superfície do Lago Ness por um cabo preso a um barco na superfície do lago (Figura 15.40). O mergulhador e seus equipamentos possuem massa total de 120 kg e ocupam um volume igual a 0,0800 m^3. O cabo possui diâmetro igual a 2,0 cm e densidade linear $\mu = 1{,}10$ kg/m. O mergulhador imagina que viu algo se movendo nas profundezas escuras do lago e sacode a extremidade do cabo, produzindo ondas transversais que sobem através do cabo para sinalizar a seus companheiros que estão no barco. a) Qual é a tensão no cabo em sua extremidade inferior presa ao mergulhador? Não se esqueça de incluir a força de empuxo que a água (densidade igual a 1000 kg/m^3) exerce sobre ele. b) Calcule a tensão no cabo a uma distância z acima do mergulhador. A força de empuxo que a água exerce sobre o cabo deve ser incluída. c) A velocidade de propagação de uma transversal é dada por $v = \sqrt{F/\mu}$, Equação (15.13). Portanto, a velocidade varia ao longo do cabo, visto que a tensão não é constante. (Esta relação despreza a força de amortecimento que a água exerce sobre o cabo que se move.) Integre para achar o tempo que o primeiro sinal leva para atingir a superfície.

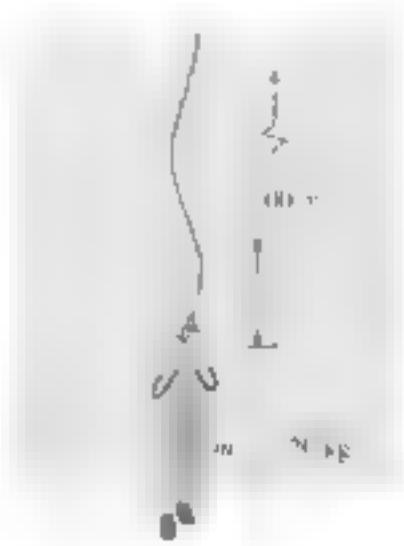


Figura 15.40 Problema desafiador 15.82

15.83 Uma corda uniforme de comprimento L e massa m é mantida fixa em uma das extremidades e gira em um círculo horizontal com velocidade angular ω. Despreze a força da gravidade sobre a corda. Calcule o tempo necessário para uma onda transversal se propagar de uma extremidade da corda até a outra.

15.84 **Potência instantânea em uma onda estacionária.** De acordo com a Equação (15.21), a taxa instantânea de energia transferida por uma onda ao longo de uma corda (a potência instantânea) é dada por

$$P(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

onde F é a tensão. a) Obtenha $P(x, t)$ para uma onda estacionária dada pela Equação (15.28). b) Mostre que para todos os valores de x a potência *média* $P_{méd}$ transportada pela onda é igual a zero. (A Equação (15.25) não se aplica para este caso. Você pode explicar por quê?) c) Para uma onda estacionária dada pela Equação (15.28), faça um gráfico de $P(x, t)$ e do deslocamento $y(x, t)$ em

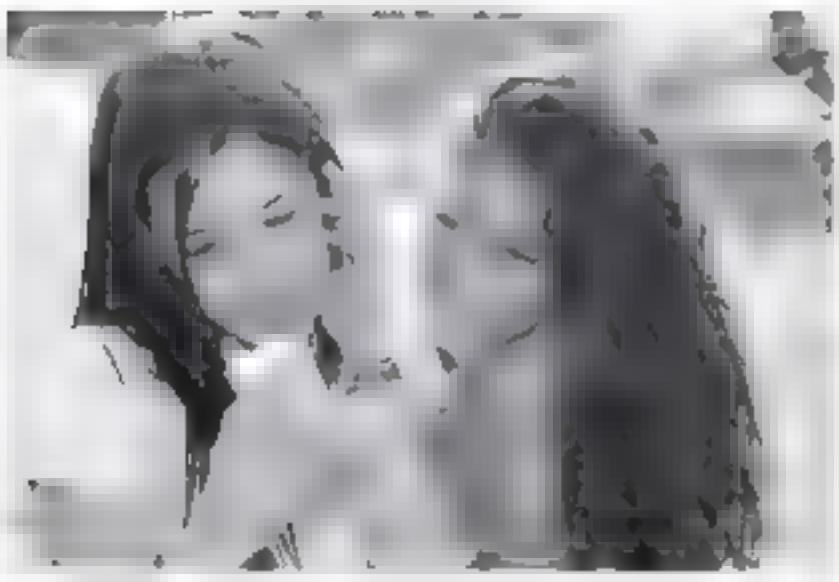
função de x para $t = 0$, $t = \pi/4\omega$, $t = \pi/2\omega$ e $t = 3\pi/4\omega$. (Um valor positivo de $P(x, t)$ indica que a energia flui no sentido crescente $+x$, um valor negativo de $P(x, t)$ indica que a energia flui no sentido decrescente $-x$.) d) A energia *cinética* por unidade de comprimento da corda é mais elevada nos locais onde a corda possui maior velocidade transversal e a energia *potencial* por unidade de comprimento da corda é mais elevada nos locais onde a corda possui maior inclinação (porque neste ponto ocorre maior tensão na corda). (Veja o Problema desafiador 15.81). Usando essas ideias, discuta a transferência de energia ao longo da corda.

15.85 **Desafinada.** A corda B de uma guitarra feita de aço (densidade igual a 7800 kg/m^3) possui comprimento igual a 63,5 cm e diâmetro igual a 0,406 mm. A freqüência fundamental é $f = 247{,}0$ Hz. a) Ache a tensão na corda. b) Quando a tensão F varia de uma pequena quantidade ΔF, a freqüência f varia de uma pequena quantidade Δf. Mostre que

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f}$$

c) A corda é afinada como no item (a) quando sua temperatura é igual a 18,5 °C. Um uso contínuo excessivo pode fazer a temperatura da corda aumentar, alterando sua freqüência de vibração. Obtenha Δf quando a temperatura da corda aumenta para 29,5 °C. A corda de aço possui módulo de Young igual a $2{,}0 \times 10^{11}$ Pa e um coeficiente de dilatação linear igual a $1{,}2 \times 10^{-5}$ (°C)$^{-1}$. Suponha que a temperatura do corpo da guitarra permaneça constante. A altura do som aumenta ou diminui?

SOM E AUDIÇÃO 16



A maioria das pessoas gosta de ouvir música, mas pouca gente gosta de barulho. Qual é a diferença física entre um som musical e o barulho?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como descrever uma onda sonora em termos dos deslocamentos de partículas ou das flutuações de pressão
- Como calcular a velocidade de ondas sonoras em diferentes materiais
- Como calcular a intensidade de uma onda sonora
- O que determina as frequências sonoras particulares produzidas por um órgão ou uma flauta
- Como ocorre a ressonância em instrumentos musicais
- O que acontece quando ondas sonoras de fontes diferentes se sobrepõem
- Como descrever o que acontece quando duas ondas sonoras de frequências levemente diferentes se combinam
- Por que a altura de uma sirene muda enquanto ela passa por você

De todas as ondas mecânicas da natureza, as mais importantes em nosso cotidiano são as ondas longitudinais que se propagam em um meio, em geral o ar, e que são chamadas de ondas *sonoras*. Isso porque o ouvido humano possui uma sensibilidade impressionante, sendo capaz de detectar ondas sonoras até de intensidade muito baixa. Além do seu uso na comunicação falada, nossos ouvidos captam uma infinidade de ruídos existentes no ambiente, desde o som proveniente de alimentos que estão sendo preparados até o som de um carro que se aproxima. A capacidade de ouvir sons de animais predadores, que não são visíveis durante a noite, foi essencial para a sobrevivência de nossos ancestrais, então não é exagero afirmar que existimos graças ao nosso sentido da audição altamente desenvolvido.

Até o momento, discutimos as ondas mecânicas principalmente em termos de deslocamentos; muitas vezes, contudo, é mais apropriado descrever ondas sonoras em termos de flutuações de *pressão*, porque o ouvido é muito sensível a elas. Estudaremos as relações entre flutuação de deslocamento, flutuação de pressão e intensidade, bem como o vínculo entre essas grandezas e a percepção do som pelo ouvido humano.

Quando uma fonte sonora ou um ouvinte se move pelo ar, o ouvinte detecta um som com uma frequência diferente do som emitido pela fonte. Esse fenômeno é o efeito Doppler, que possui importantes aplicações na medicina e na tecnologia.

16.1 Ondas sonoras

A definição mais geral de **som** é a de uma onda longitudinal que se propaga em um meio. Nossa principal preocupação neste capítulo é com a propagação do som no ar, porém, o som pode se propagar no meio gasoso, líquido ou sólido. Você já deve ter notado claramente a propagação do som em sólidos se o alto-falante do seu vizinho está instalado próximo à sua parede.

As ondas sonoras mais simples são ondas senoidais, as quais possuem valores definidos para a amplitude, a frequência e o comprimento de onda. O ouvido humano é sensível aos sons com frequências compreendidas entre 20 e 20000 Hz, que delimitam o **intervalo audível**, mas usamos também a palavra *som* no caso de frequências maiores (**ultra-som**) ou frequências menores (**infra-som**) do que os limites do intervalo audível.

As ondas sonoras geralmente se propagam em todas as direções a partir da fonte, com amplitudes que dependem da direção e da distância entre o ouvinte e a fonte. Voltaremos a discutir essa questão na próxima seção. Por enquanto, nos concentraremos no caso ideal de uma onda sonora que se propaga apenas no sentido positivo do eixo Ox. Conforme discutimos na Seção 15.3, essa onda é descrita por uma função de onda $v(x, t)$, que fornece o deslocamento instantâneo v de uma partícula em um meio para uma posição x no instante t. Caso a onda seja senoidal, podemos representá-la usando a Equação (15.7):

$$v(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$
(onda sonora propagando-se no sentido + Ox) (16.1)

Lembre-se de que em uma onda longitudinal os deslocamentos são *paralelos* à direção da propagação da onda, de modo que as distâncias x e v são paralelas e não ortogonais, como no caso da propagação de uma onda transversal. A amplitude A é o deslocamento máximo da partícula a partir da posição de equilíbrio (Figura 16.1). Portanto, A também é chamada de **amplitude de deslocamento**.

Ondas sonoras como flutuações de pressão

Ondas sonoras também podem ser descritas em termos de variações de *pressão* em vários pontos. Em uma onda sonora senoidal, a pressão flutua acima e abaixo da pressão atmosférica P_a em uma variação senoidal com a mesma frequência que os movimentos das partículas do ar. O ouvido humano funciona captando essas variações de pressão. Uma onda sonora entrando no canal auditivo exerce uma pressão flutuante sobre um lado do tímpano; o ar do outro lado do tímpano, expelido pelo tubo de Eustáquio, está na pressão atmosférica. A diferença de pressão dos dois lados do tímpano põe o ar em movimento. Microfones e aparelhos similares também captam, em geral diferenças de pressão, não deslocamentos, de modo que é bastante útil deduzir uma relação entre essas duas descrições.

Seja $P(x, t)$ a flutuação instantânea da pressão em uma onda sonora para cada ponto x e instante t. Ou seja, $P(x, t)$ fornece a *diferença* entre a pressão da onda e a pressão atmosférica normal P_a. Imagine que $P(x, t)$ seja a *pressão manométrica* definida na Seção 14.2; ela pode ser positiva ou negativa. A *pressão absoluta* em cada ponto, portanto, é igual a $P_a + P(x, t)$.

Para ver a ligação entre a flutuação de pressão $P(x, t)$ e o deslocamento $v(x, t)$ de uma onda sonora se propagando ao longo do eixo Ox no sentido positivo, considere um cilindro imaginário de um meio ondulatório (gasoso, líquido ou sólido) com seção reta de área S e eixo no longo da direção de propagação (Figura 16.2). Quando não existe nenhuma onda sonora, o comprimento do cilindro é Δx e o volume é $V = S\Delta x$, como indicado pelo volume sombreado na Figura 16.2. Quando uma onda está presente, no instante t a extremidade que estava inicialmente no ponto x é deslocada para $y_1 = v(x, t)$, e a extremidade que estava inicialmente no ponto $x + \Delta x$ é deslocada para $y_2 = v(x + \Delta x, t)$. Quando $y_2 > y_1$, como no caso indicado na Figura 16.2, o volume do cilindro aumenta, produzindo-se uma diminuição de pressão. Quando $y_2 < y_1$, o volume diminui e a pressão aumenta. Quando $y_2 =$ [illegible] o cilindro é simplesmente deslocado para a direita ou para a esquerda; não existe variação de volume e, portanto, a pressão não varia. A flutuação de pressão depende da *diferença* entre os deslocamentos de pontos vizinhos do meio.

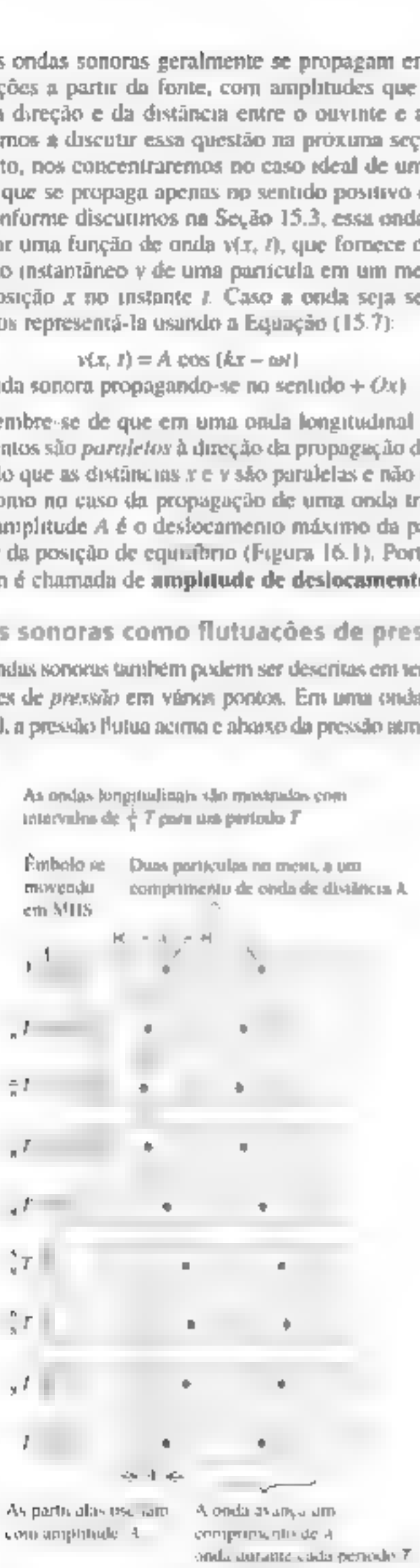

As ondas longitudinais são mostradas com intervalos de $\frac{1}{8}T$ para um período T
Êmbolo se movendo em MHS
Duas partículas no meio, a um comprimento de onda de distância λ
As partículas oscilam com amplitude A
A onda avança um comprimento de λ onda durante cada período T

Figura 16.1 Uma onda senoidal longitudinal deslocando-se para a direita em um fluido. (Compare com a Figura 15.7.)

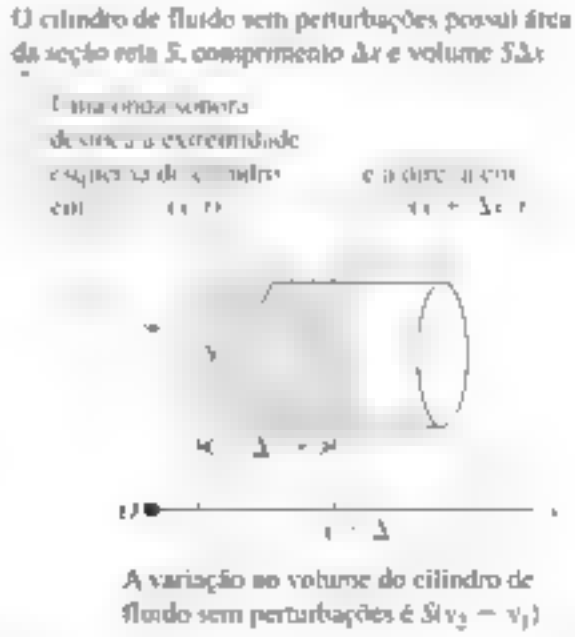

O cilindro de fluido sem perturbações possui área da seção reta S, comprimento Δx e volume $S\Delta x$
Uma onda sonora desloca a extremidade esquerda do cilindro em $y_1 = v(x, t)$
e a direita em $y_2 = v(x + \Delta x, t)$
A variação no volume do cilindro de fluido sem perturbações é $S(y_2 - y_1)$

Figura 16.2 À medida que uma onda sonora se propaga ao longo do eixo Ox, as extremidades esquerda e direita sofrem diferentes deslocamentos y_1 e y_2.

Quantitativamente, a variação de volume ΔV do cilindro é

$$\Delta V = S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]$$

No limite $\Delta x \to 0$, a variação relativa de volume de dV/V (variação do volume dividida pelo volume original) é

$$\frac{dV}{V} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]}{S\,\Delta x} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \quad (16.2)$$

A variação relativa do volume relaciona-se à flutuação de pressão por meio do módulo de compressão B, definido pela Equação (11.13) como $B = -P(x, t)/(dV/V)$ (ver Seção 11.4). Explicitando $P(x, t)$, obtemos

$$P(x, t) = -B\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \quad (16.5)$$

O sinal negativo surge porque, quando $\partial y(x, t)/\partial x$ é positivo, o deslocamento no ponto $x + \Delta x$ é maior do que no ponto x, correspondendo a um aumento de volume e a uma *diminuição* da pressão.

Quando calculamos $\partial y(x, t)/\partial x$ para a onda senoidal da Equação (16.1), encontramos

$$P(x, t) = BkA \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (16.4)$$

A Figura 16.3 mostra $y(x, t)$ e $P(x, t)$ para uma onda senoidal quando $t = 0$. Mostra também o quanto as partículas individuais da onda estão deslocadas nesse momento. Embora $y(x, t)$ e $P(x, t)$ descrevam a mesma onda, essas funções têm uma diferença de fase de um quarto de ciclo; em um dado instante, o deslocamento é máximo quando a flutuação de pressão é igual a zero e vice-versa. Em especial, note que as compressões (pontos de maior pressão e densidade) e expansões (pontos de menor pressão e densidade) são pontos de deslocamento *zero*.

ATENÇÃO **Gráfico de uma onda sonora** Lembre-se de que os gráficos na Figura 16.3 mostram a onda em apenas um instante no tempo. Como a onda está se propagando no sentido positivo do eixo Ox, à medida que o tempo passa as configurações de onda nas funções $y(x, t)$ e $P(x, t)$ movem-se para a direita na velocidade da onda $v = \omega/k$. Assim, as posições das compressões e expansões também se movem para a direita nessa mesma velocidade. As partículas, ao contrário, apenas oscilam para a frente e para trás em movimento harmônico simples, como se pode ver na Figura 16.1.

A Equação (16.4) mostra que a grandeza BkA representa a flutuação máxima de pressão. Essa grandeza é chamada de **amplitude da pressão**, sendo designada por $P_{máx}$:

$$P_{máx} = BkA \quad \text{(onda sonora senoidal)} \quad (16.5)$$

A amplitude da pressão é diretamente proporcional à amplitude do deslocamento A, como era de se esperar, e depende também do comprimento da onda. Para uma dada amplitude, ondas com comprimentos de onda λ curtos (valores elevados do número de onda $k = 2\pi/\lambda$) apresentam variações de pressão maiores, porque os máximos e mínimos são comprimidos e se aproximam mais entre si. Um meio que

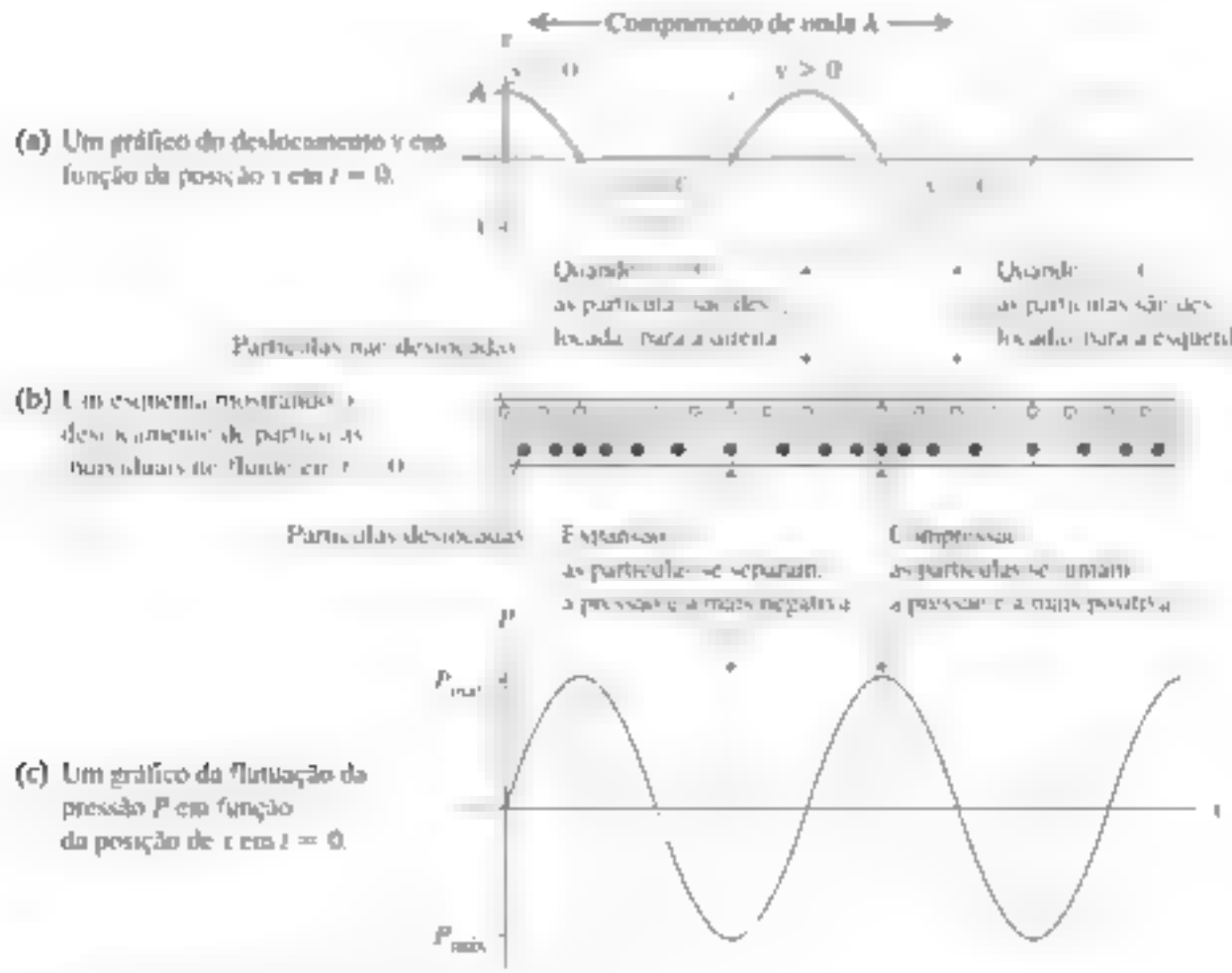

Comprimento de onda λ
y
A
v > 0
(a) Um gráfico do deslocamento y em função da posição x em t = 0.
Quando
as partículas são deslocadas para a direita
Quando
as partículas são deslocadas para a esquerda
Partículas não deslocadas
(b) Um esquema mostrando o deslocamento de partículas para uma onda de flutuação em t = 0
Partículas deslocadas
Expansão
as partículas se separam,
a pressão é a mais negativa
Compressão
as partículas se juntam
a pressão é a mais positiva
P
P_máx
(c) Um gráfico da flutuação de pressão P em função da posição de x em t = 0.
−P_máx

Figura 16.3 Três formas de descrever uma onda sonora.

possui um valor elevado de B precisa de uma amplitude da pressão relativamente maior para produzir um dado deslocamento, porque um valor de B elevado indica um meio menos compressível, ou seja, uma pressão mais elevada é necessária para produzir uma dada variação de volume.

Exemplo 16.1

AMPLITUDE DE UMA ONDA SONORA Em uma onda sonora com intensidade moderada, a variação máxima da pressão é da ordem de $3{,}0 \times 10^{-2}$ Pa acima e abaixo da pressão atmosférica P_0 (normalmente igual a $1{,}013 \times 10^5$ Pa ao nível do mar). Calcule o deslocamento máximo correspondente em uma frequência de 1000 Hz. Nas condições normais de pressão atmosférica e densidade, a velocidade do som é 344 m/s, e o módulo de compressão é $1{,}42 \times 10^5$ Pa.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve a relação entre duas formas de descrever uma onda sonora: em termos de deslocamento e em termos de pressão. A variável procurada é a amplitude A do deslocamento.

PREPARAR: a amplitude da pressão $P_{máx}$, a velocidade da onda v, a frequência f e o módulo de compressão B são dados. A variável que queremos achar, A, está relacionada a $P_{máx}$ pela Equação (16.5). Usamos também a relação $\omega = vk$ [Equação (15.6)] para encontrar o número de onda k a partir de v e da frequência angular $\omega = 2\pi f$.

EXECUTAR: pela Equação (16.5), o deslocamento máximo é $A = P_{máx}/Bk$. Pela Equação (15.6), o número de onda é

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{(2\pi \text{ rad})(1000 \text{ Hz})}{344 \text{ m/s}} = 18{,}3 \text{ rad/m}$$

Logo,

$$A = \frac{P_{máx}}{Bk} = \frac{3{,}0 \times 10^{-2} \text{ Pa}}{(1{,}42 \times 10^5 \text{ Pa})(18{,}3 \text{ rad/m})} = 1{,}2 \times 10^{-9} \text{ m}$$

AVALIAR: essa amplitude de deslocamento é apenas cerca de $\frac{1}{100}$ do tamanho de uma célula humana. Lembre-se de que o ouvido, na verdade, é sensível a flutuações de pressão; ele detecta esses deslocamentos minúsculos apenas indiretamente.

Exemplo 16.2

AMPLITUDE DE UMA ONDA SONORA NO OUVIDO INTERNO Quando uma onda sonora entra no ouvido, ela produz vibrações do tímpano que, por sua vez, produzem oscilações nos minúsculos ossos do ouvido médio, chamados de *ossículos* (Figura 16.4). Essas oscilações são finalmente transmitidas ao ouvido interno, que está cheio de líquido; o movimento desse fluido perturba as células capilares no ouvido interno, as quais transmitem impulsos ao nervo que se liga ao cérebro, transportando a informação de que existe um som. A parte móvel do tímpano possui uma área aproximadamente igual a 43 mm², e a área do estribo (o menor ossículo), onde ele se liga ao ouvido interno, é aproximadamente igual a 3,2 mm². Para o som mencionado no exemplo anterior, determine a) a amplitude da pressão e b) a amplitude do deslocamento da onda no fluido que enche o ouvido interno. A velocidade do som nesse fluido é cerca de 1500 m/s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: embora a onda sonora esteja agora se deslocando em um líquido, e não em um gás, os mesmos princípios e relações entre as propriedades são aplicáveis.

PREPARAR: podemos desprezar a massa dos ossículos (cerca de 58 mg = $5{,}8 \times 10^{-5}$ kg), de modo que a força exercida pelos ossículos sobre o fluido no ouvido interno é a mesma força exercida sobre o tímpano e os ossículos pelas ondas sonoras no ar. (Usamos essa mesma idéia nos Capítulos 4 e 5 quando dissemos que a tensão é a mesma em ambas as extremidades de uma corda sem massa.) Portanto, a amplitude da pressão $P_{máx}$ no ouvido interno é maior do que no ar externo em razão de a mesma força ser exercida sobre uma área menor (a área do estribo em relação à área do tímpano). Dada a amplitude da pressão no ouvido interno, encontramos a amplitude do deslocamento usando a Equação (16.5). Os valores de B e k são diferentes do que são no ar. Para calcular k, note que a onda no ouvido interno possui a mesma frequência angular ω que a onda no ar, porque o ar, os ossículos e o fluido do ouvido interno oscilam juntos. Porém, como a velocidade da onda sonora v na água é maior do que no ar (1500 m/s contra 344 m/s), o número de onda $k = \omega/v$ é menor.

EXECUTAR: usando a área do tímpano e a amplitude da pressão encontradas no Exemplo 16.1, a força máxima exercida pela onda sonora no ar é $F_{máx} = P_{máx} S_{tímpano}$. Logo, a amplitude da pressão no fluido do ouvido interno é

$$P_{máx} = \frac{F_{máx}}{S_{estribo}} = \frac{P_{máx} S_{tímpano}}{S_{estribo}} = \frac{(3{,}0 \times 10^{-2} \text{ Pa})(43 \text{ mm}^2)}{3{,}2 \text{ mm}^2} = 0{,}40 \text{ Pa}$$

b) Para calcular o deslocamento máximo, usamos novamente a relação $A = P_{máx}/Bk$, como no exemplo 16.1. O fluido no ouvido interno é constituído principalmente de água, que possui um módulo de compressão muito maior do que o ar, visto que o ar é muito mais difícil de ser comprimido. Conforme a Tabela 11.2, a compressibilidade da água (felizmente também simbolizada

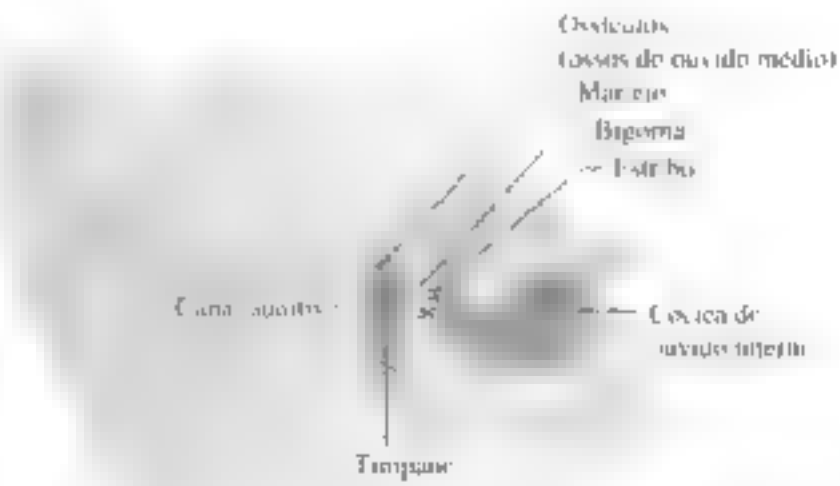


Figura 16.4 Anatomia do ouvido humano. O ouvido médio possui um tamanho aproximadamente igual ao de uma bola de gude. Os ossículos (martelo, bigorna e estribo) são os menores ossos existentes no corpo humano.

pela letra k) é igual a $45,8 \times 10^{-11}$ Pa^{-1}, logo $B_{\text{fluido}} = 1/(45,8 \times 10^{-11}\ \text{Pa}^{-1}) = 2,18 \times 10^{9}$ Pa.

Calculamos o valor do número de onda k usando o valor de ω encontrado no Exemplo 16.1 e $v = 1500$ m/s para o fluido do ouvido interno. Assim,

$$k_{\text{no ouvido interno}} = \frac{\omega}{v_{\text{ouvido interno}}} = \frac{(2\pi\ \text{rad})(1000\ \text{Hz})}{1500\ \text{m/s}} = 4,2\ \text{rad/m}$$

Juntando tudo, o deslocamento máximo do fluido no ouvido interno é

$$A_{\text{ouvido interno}} = \frac{P_{\text{máxima variação aceitável}}}{B_{\text{fluido}} k_{\text{variação aceitável}}} = \frac{0,40\ \text{Pa}}{(2,18 \times 10^{9}\ \text{Pa})(4,2\ \text{rad/m})}$$
$$4,4 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

AVALIAR O resultado do item (a) mostra que o efeito dos ossículos é aumentar a amplitude da pressão no ouvido interno em um fator igual a $(43\ \text{mm}^2)/(3,2\ \text{mm}^2) = 13$. Esse fator de amplificação contribui para a grande sensibilidade do ouvido humano.

Essa amplitude do deslocamento no ouvido interno é ainda menor do que a obtida para o deslocamento no ar. Porém, o que realmente importa no ouvido interno é a amplitude da *pressão*, visto que são as variações de pressão no fluido que produzem as forças que impulsionam as células capilares.

Percepções das ondas sonoras

As características físicas de uma onda sonora estão diretamente relacionadas à percepção desse som por um ouvinte. Para uma dada frequência, quanto maior for a amplitude da pressão de uma onda sonora senoidal, mais elevada será a **intensidade sonora**. A relação entre a amplitude da pressão e a intensidade sonora não é muito simples e varia de uma pessoa a outra. Um fator importante é que o ouvido não possui a mesma sensibilidade para todas as frequências do intervalo audível. Um som com uma dada frequência pode parecer mais forte do que outro com amplitude igual, mas com frequência diferente. Para uma frequência de 1000 Hz, a amplitude mínima da pressão que pode ser detectada por um ouvido normal é igual a aproximadamente 3×10^{-5} Pa; para produzir a mesma intensidade sonora a 200 Hz ou a 15000 Hz, o valor é cerca de 3×10^{-2} Pa. A percepção da intensidade também depende da saúde do ouvido. A perda de sensibilidade para altas frequências na extremidade do intervalo audível ocorre, geralmente, com o envelhecimento, porém, pode ser agravada pela exposição a barulhos com níveis excessivamente elevados. Estudos revelam que muitos músicos jovens de bandas de *rock* sofrem um dano permanente no ouvido e apresentam uma audição típica de pessoas com mais de 65 anos de idade. Os fones de ouvido de aparelhos de som usados em volume muito alto também constituem uma ameaça para a audição. Tome cuidado!

A frequência de uma onda sonora é o fator principal que determina a **altura** de um som, a qualidade que nos permite distinguir um som 'agudo' de um som 'grave'. Quanto maior for a frequência do som (dentro do intervalo audível), mais aguda será a altura do som que um ouvinte perceberá. A amplitude da pressão também desempenha um papel na determinação da altura do som. Quando um ouvinte compara duas ondas sonoras de mesma frequência, mas com valores diferentes de amplitude de pressão, o som de maior amplitude da pressão é percebido como mais forte, porém com uma altura menor, parecendo mais grave.

Sons musicais têm funções de onda mais complicadas do que uma simples função senoidal. A flutuação de pressão de uma onda sonora produzida por uma clarineta é mostrada na Figura 16.5a. O padrão é tão complexo porque a coluna de ar em um instrumento de sopro como a clarineta vibra não apenas na frequência fundamental, mas também em muitos outros harmônicos ao mesmo tempo.

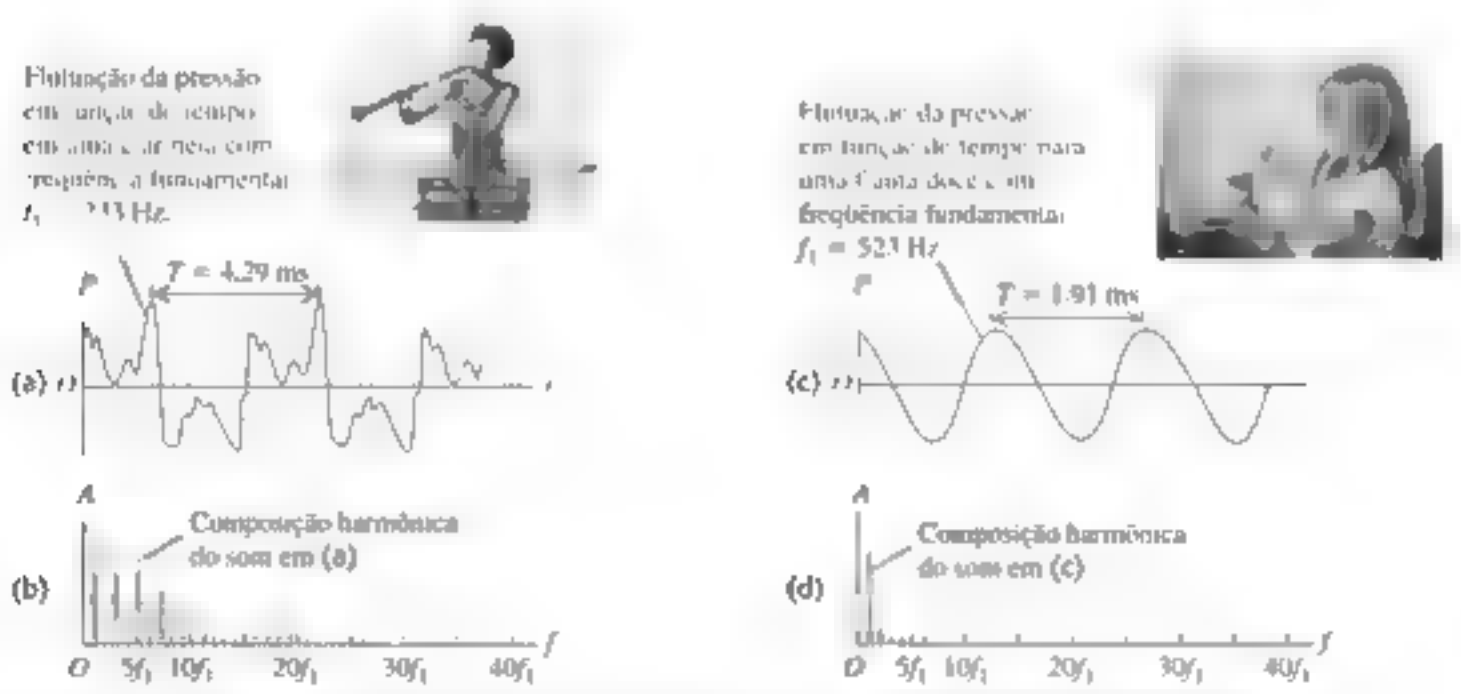

Flutuação da pressão em função do tempo em uma nota com frequência fundamental f_1 = 233 Hz
T = 4,29 ms
P
(a)
t
A
Composição harmônica do som em (a)
(b)
O 5f_1 10f_1 20f_1 30f_1 40f_1
f
Flutuação da pressão em função do tempo para uma nota descendo em frequência fundamental f_1 = 523 Hz
T = 1,91 ms
(c)
Composição harmônica do som em (c)
(d)

Figura 16.5 Diferentes representações do som de uma [illegible] e meia e [illegible] de um a flauta doce. (Gráficos adaptados a partir de R. E. Berg e D. G. Stork, *The Physics of Sound*, Prentice-Hall, 1982.)

(Na Seção 15.8, descrevemos esse mesmo comportamento em uma corda dedilhada, tocada com um arco ou percutida. Examinaremos a física dos instrumentos de sopro na Seção 16.5.) A onda sonora produzida no ar que circunda o instrumento conterá a mesma quantidade de cada harmônico, ou seja, a mesma *composição harmônica*. A Figura 16.5b mostra a composição harmônica do som de uma clarineta. O processo matemático de traduzir um gráfico da pressão em função do tempo, como o da Figura 16.5a, em um gráfico de composição harmônica, como o da Figura 16.5b, é chamado de *Análise de Fourier*.

Dois tons produzidos por instrumentos diferentes podem ter a mesma frequência fundamental (e, portanto, a mesma altura), porém são percebidos de maneiras diferentes em virtude da presença de quantidades diferentes dos diversos harmônicos. Essa diferença, conhecida como *cor do tom*, *qualidade* ou **timbre**, geralmente é descrita de modo subjetivo mediante o uso de expressões como um tom 'redondo', 'estridente', 'metálico' ou 'melodioso'. Um tom rico em harmônicos, como o tom da clarineta representado nas Figuras 16.5a e 16.5b, geralmente soa como 'fino' e 'agudo', enquanto um tom contendo basicamente o harmônico fundamental, como o som produzido por uma flauta doce, representado nas Figuras 16.5c e 16.5d, é mais 'melodioso' e 'redondo'. O mesmo princípio se aplica à voz humana, que é outro exemplo de um instrumento de sopro: as vogais 'a' e 'e' soam de modo diferente devido a diferenças em sua composição harmônica.

Outro fator importante para a determinação do timbre é o comportamento no princípio (*ataque*) e no final (*decaimento*) de um tom. O tom de um piano começa com uma pancada e a seguir se extingue gradualmente. O tom de um cravo, além de possuir uma composição harmônica diferente, começa muito mais rapidamente com um clique, e os harmônicos mais elevados começam antes dos harmônicos mais baixos. Quando a tecla é solta, o som se extingue muito mais rapidamente do que o som do piano. Efeitos semelhantes podem ser observados em outros instrumentos musicais. O músico que toca um instrumento de sopro ou de corda possui um controle considerável sobre o ataque e o decaimento do tom, e essas propriedades ajudam a definir as características próprias de cada instrumento.

Diferentemente dos tons feitos por instrumentos musicais ou das vogais da voz humana, o **ruído** é uma combinação de *todas* as frequências, não apenas frequências harmônicas, ou seja, frequências múltiplas de uma frequência fundamental. (Um caso extremo é o 'ruído branco', que contém quantidades iguais de todas as frequências ao longo do intervalo audível.) Exemplos de ruídos são o som do vento e o som sibilante produzido quando você pronuncia a consoante 's'.

Teste sua compreensão da Seção 16.1 Você utiliza um gerador de sinal eletrônico para produzir uma onda sonora senoidal no ar. A seguir você aumenta a frequência da onda de 100 Hz para 400 Hz, enquanto mantém a amplitude de pressão constante. Que efeito isso exerce sobre a amplitude de deslocamento da onda sonora? (i) Torna-se quatro vezes maior; (ii) torna-se duas vezes maior; (iii) não varia; (iv) reduz-se à metade; (v) reduz-se a um quarto. ■

16.2 Velocidade das ondas sonoras

Vimos, na Seção 15.4, que a velocidade de uma onda transversal em uma corda depende da tensão F e da densidade linear μ: $v = \sqrt{F/\mu}$. Qual, poderíamos perguntar, é a expressão correspondente para a velocidade das ondas sonoras em um gás ou um líquido? De que propriedades do meio a velocidade depende?

Podemos levantar uma hipótese a respeito dessas questões lembrando-nos de uma afirmação que fizemos na Seção 15.4: nas ondas mecânicas em geral, a expressão da velocidade da onda é da forma

$$v = \sqrt{\frac{\text{Força restauradora que atua do sistema retorna ao equilíbrio}}{\text{Força resistiva inercial durante o retorno ao equilíbrio}}}$$

Uma onda sonora no interior de um fluido provoca compressões e expansões no fluido, logo o termo da força restauradora na expressão acima precisa ser relacionado com a facilidade ou a dificuldade de comprimir o fluido. É precisamente isso o que o módulo de compressão B do meio nos diz. Conforme a segunda lei de Newton, a inércia é relacionada à massa.

A quantidade de massa de um fluido de grande volume é descrita por sua densidade, ou massa por unidade de volume, ρ. (A grandeza correspondente para uma corda é a massa por unidade de comprimento, μ.) Logo, esperamos que a velocidade das ondas sonoras seja da forma $v = \sqrt{B/\rho}$.

Para verificar nossa hipótese, deduziremos a velocidade das ondas sonoras em um fluido dentro de um tubo. Esta é uma situação de importância, já que todos os instrumentos musicais de sopro são fundamentalmente tubos em que uma onda longitudinal (som) se propaga em um fluido (ar) (Figura 16.6). A voz humana é produzida com base no mesmo princípio; as ondas sonoras se propagam no trato vocal humano, que é basicamente um tubo cheio de ar ligado aos pulmões em uma das extremidades (a laringe), enquanto a outra extremidade (a boca) está em contato com o ar exterior. Nessa dedução, seguiremos as etapas usadas na dedução na Seção 15.4 para achar a velocidade das ondas transversais, portanto talvez seja bom você revisar aquela seção.

Velocidade do som em um fluido

A Figura 16.7 mostra um fluido (um gás ou um líquido) com densidade ρ em um tubo com uma seção reta com área A. No estado de equilíbrio, o fluido está submetido a uma pressão uniforme P. Na Figura 16.7a, o fluido está em repouso. Tomamos o eixo Ox ao longo do comprimento do tubo. Essa é, também, a direção em que fazemos uma onda longitudinal se propagar, de modo que o deslocamento y é também medido ao longo do tubo, como na Seção 16.1 (ver Figura 16.2).

No instante $t = 0$, começamos a deslocar o pistão da extremidade esquerda com velocidade constante v_p no sentido da esquerda para a direita. Isso provoca um movimento ondulatório que se propaga da esquerda para a direita ao longo do comprimento do tubo, no qual seções sucessivas de fluido começam a se mover e se comprimem em instantes sucessivos.

A Figura 16.7b mostra o fluido em um instante t. Todas as partes do fluido à esquerda do ponto P se movem com velocidade v_p da esquerda para a direita; todas as partes do fluido à direita do ponto P ainda estão em repouso. A fronteira entre a parte em repouso e a parte móvel do fluido se desloca da esquerda para a direita com uma velocidade igual à velocidade de propagação da onda v. Até o instante t, o pistão se moveu uma distância $v_p t$, e a fronteira avançou uma distância vt. Analogamente ao caso de uma onda transversal em uma corda, podemos obter a velocidade de propagação da onda usando o teorema do impulso-momento linear.

A quantidade de fluido que entra em movimento no instante t é a quantidade que inicialmente ocupava uma seção do cilindro de comprimento vt, com área da seção reta A e volume vtA. A massa dessa quantidade de fluido é ρvtA, e seu momento linear longitudinal (ou seja, momento linear ao longo da direção do tubo) possui módulo

$$\text{Momento linear longitudinal} = (\rho vtA)v_p$$

A seguir, determinamos o aumento da pressão, ΔP, no fluido que se move. O volume original do fluido que se move, Avt, diminuiu de um valor $Av_p t$. Pela definição de módulo de compressão B, dada pela Equação (11.13) na Seção 11.5,

$$B = \frac{-\text{Variação da Pressão}}{\text{Fração da variação do volume}} = \frac{-\Delta P}{-Av_p t/Avt}$$

$$\Delta P = B\frac{v_p}{v}$$

A pressão no fluido que se move é $P + \Delta P$, e a força que o pistão exerce sobre o fluido é $(P + \Delta P)A$. A força resultante que atua sobre o fluido é ΔPA (veja a Figura 16.7b), e o impulso longitudinal é

$$\text{Impulso longitudinal} = \Delta PAt = B\frac{v_p}{v}At$$

Como o fluido estava em repouso no instante $t = 0$, a variação do momento linear até o instante t é igual ao momento linear nesse instante. Aplicando o teorema do impulso-momento linear, achamos

$$B\frac{v_p}{v}At = \rho vtAv_p \qquad (16.6)$$

Explicitando v, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \text{(velocidade de uma onda longitudinal em um fluido)} \qquad (16.7)$$

o que está de acordo com nossa hipótese. Portanto, a velocidade de propagação de um pulso ondulatório longitudinal em um fluido depende somente do módulo de compressão B e da densidade ρ do meio.

Embora tenhamos deduzido a Equação (16.7) para uma onda se propagando em um tubo, ela se aplica a toda onda longitudinal se propagando em um fluido de grande volume. Logo, a velocidade do som se propagando no ar ou na água é determinada por essa equação.

Velocidade do som em um sólido

Quando uma onda longitudinal se propaga em uma barra *sólida*, a situação é ligeiramente diferente. Uma barra pode se deformar lateralmente quando é comprimida longitudinalmente, enquanto um fluido no interior de um tubo com seção reta uniforme não pode se deformar lateralmente. Usando o mesmo tipo de raciocínio que fizemos na dedução da Equação (16.7), podemos mostrar que a velocidade de propagação de um pulso longitudinal na barra é dada por

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \begin{matrix}\text{(velocidade de uma onda longitudinal}\\ \text{em uma barra sólida)}\end{matrix} \qquad (16.8)$$

onde Y é o módulo de Young, definido na Seção 11.4.

Figura 16.6 Quando um instrumento de sopro como esta trompa francesa é tocado, ondas sonoras se propagam no ar dentro dos tubos do instrumento. As propriedades do som que emerge do grande bocal dependem da velocidade dessas ondas.

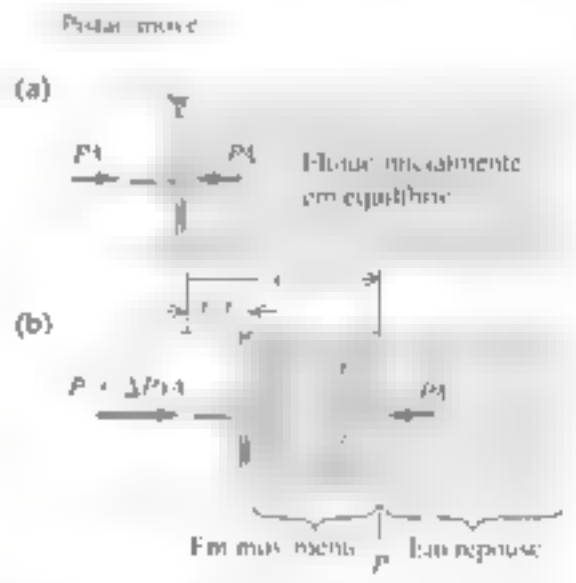


Figura 16.7 Uma onda sonora propagando-se em um fluido confinado em um tubo. (a) Fluido em equilíbrio. (b) Um tempo t depois que o pistão começa a se mover para a direita à velocidade v_p, o fluido entre o pistão e o ponto P está em movimento. A velocidade de uma onda sonora é v.

Tabela 16.1 Velocidade do som em diversos materiais em grandes volumes

Material	Velocidade do som (m/s)
Gases	
Ar (20 °C)	344
Hélio (20 °C)	999
Hidrogênio (20 °C)	1330
Líquidos	
Hélio líquido (4K)	211
Mercúrio (20 °C)	1451
Água (0 °C)	1402
Água (20 °C)	1482
Água (100 °C)	1543
Sólidos	
Alumínio	6420
Chumbo	1960
Aço	5941

ATENÇÃO Barras sólidas e sólidos de grande volume A Equação (16.8) se aplica somente a barras ou hastes cujas partes laterais possam sofrer pequenas saliências ou reentrâncias à medida que a onda se propaga. Ela não se aplica a um sólido de grande volume, visto que, nesses materiais, essas pequenas variações laterais são impedidas pela presença do material nas vizinhanças laterais. A velocidade de propagação de uma onda longitudinal em um sólido de grande volume depende da densidade, do módulo de compressão e do módulo de *cisalhamento*; uma descrição completa desse processo está além dos objetivos deste livro.

Tal como no caso da dedução de uma onda transversal em uma corda, as equações (16.7) e (16.8) valem para uma onda senoidal, bem como para qualquer tipo de onda periódica, e não apenas para o caso especial discutido nesta dedução.

A Tabela 16.1 lista a velocidade do som se propagando em diversos materiais em grandes volumes. A velocidade de propagação do som no chumbo é menor do que a velocidade do som no alumínio ou no aço porque o chumbo possui um módulo de compressão menor e uma densidade maior do que aqueles metais.

Exemplo 16.3

COMPRIMENTO DE ONDA DAS ONDAS DE UM SONAR

Um navio usa um sistema de sonar para detectar objetos submersos (Figura 16.8). O sistema emite ondas sonoras embaixo da água e mede o intervalo de tempo que a onda refletida (eco) leva para retornar ao detector. Determine a velocidade das ondas sonoras na água usando a Equação (16.7) e ache o comprimento de onda de uma onda com freqüência igual a 262 Hz.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as variáveis que desejamos encontrar são a velocidade e o comprimento de onda de uma onda sonora em um fluido.

PREPARAR: para usar a Equação (16.7) para a velocidade da onda, calculamos o módulo de compressão da água a partir da compressibilidade (Tabela 11.2) e da densidade ($\rho = 1{,}0 \times 10^3$ kg/m^3). Dadas a velocidade e a frequência $f = 262$ Hz, calculamos o comprimento de onda a partir da relação $v = f\lambda$.

Figura 16.8 Um dispositivo sonar utiliza ondas sonoras emitidas da água para detectar e localizar objetos submersos.

EXECUTAR: com a Tabela 11.2, descobrimos que a compressibilidade da água, que é o inverso do módulo de compressão, é, $k = 45{,}8 \times 10^{-11}$ Pa^{-1}. Logo, $B = (1/45{,}8) \times 10^{11}$ Pa. Obtemos

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1/45{,}8) \times 10^{11}\ \text{Pa}}{1{,}0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3}} = 1480\ \text{m/s}$$

O comprimento de onda é dado por

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1480\ \text{m/s}}{262\ \text{s}^{-1}} = 5{,}65\ \text{m}$$

AVALIAR: o valor calculado de v está de acordo com o valor empírico encontrado na Tabela 16.1. Embora a água seja bem mais densa do que o ar (ρ é maior), ela é também muito mais incompressível (B maior), logo a velocidade $v = \sqrt{B/\rho}$ acaba sendo mais de quatro vezes a velocidade do som no ar em temperaturas normais.

Uma onda com essa freqüência no ar possui um comprimento de onda igual a 1,31 m, conforme achamos no Exemplo 15.1 (Seção 15.2). A velocidade do som na água é maior do que no ar; portanto o comprimento de onda $\lambda = v/f$ deve ser maior também, o que é confirmado por nosso resultado.

Os golfinhos emitem ondas sonoras com freqüências elevadas (da ordem de 100000 Hz) e usam o eco para se guiar e para caçar. O comprimento de onda correspondente na água é igual a 1,48 cm. Com esse sistema de "sonar" de freqüências elevadas, eles conseguem detectar a presença de objetos tão pequenos quanto esse comprimento de onda (porém não muito menores). A *imagem de ultra-som* ou *ecossonografia* é uma técnica médica que utiliza exatamente o mesmo princípio: ondas sonoras com freqüências muito elevadas e comprimentos de onda muito pequenos, chamadas de *ultra-sons*, percorrem o corpo humano, e os "ecos" oriundos do interior do organismo são usados para

criar uma imagem. Para um ultra-som com frequência igual a 5 MHz = 5×10^6 Hz, o comprimento de onda na água (o constituinte principal do corpo humano) é igual a 0,3 mm, e características com dimensões até essa ordem de grandeza podem ser discernidas na imagem. O ultra-som é usado na ecossonografia para estudar a ação da válvula do coração, para detectar tumores e em exames pré-natais (Figura 16.9). O ultra-som é mais sensível do que os raios X para detectar contrastes entre diversos tipos de tecidos, e não apresenta os riscos da radiação associados aos raios X.

Exemplo resolvido

VELOCIDADE DE UMA ONDA LONGITUDINAL Qual é a velocidade de uma onda sonora que se propaga em uma barra de chumbo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: ondas desse tipo são feitas fixando-se a barra no local e batendo em uma das extremidades com um martelo. A amplitude das ondas resultantes é tão pequena que elas são quase invisíveis a olho nu. Mas a pergunta se refere à *velocidade* das ondas, que não depende de sua amplitude. Note que não podemos simplesmente usar o valor do chumbo listado na Tabela 16.1, já que esse valor se refere à velocidade do som em um material de grande volume, não uma barra.

PREPARAR: nesta situação, podemos aplicar a equação (16.8). Consultamos as Tabelas 11.1 e 14.1 e encontramos o módulo de Young e a densidade ρ, respectivamente.

EXECUTAR: encontramos $Y = 1,6 \times 10^{10}$ Pa e $\rho = 11,3 \times 10^3$ kg/m^3 (ou seja, 11,3 vezes a densidade da água), logo

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,6 \times 10^{10}\ \text{Pa}}{11,3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3}} = 1,2 \times 10^3\ \text{m/s}$$

AVALIAR: esse valor é mais de três vezes maior do que a velocidade de propagação do som no ar, porém, menor do que a velocidade do som no chumbo em grande volume. Isso acontece porque o módulo de compressão do chumbo é maior do que o módulo de Young do chumbo.

Velocidade do som em um gás

A maioria das ondas sonoras que encontramos em nossa vida diária se propaga no ar. Ao usar a Equação (16.7) para calcular a velocidade de uma onda sonora no ar, não devemos nos esquecer de que o módulo de compressão de um gás depende da pressão do gás: quanto maior a pressão aplicada a um gás para comprimi-lo, mais ele resiste a uma compressão adicional e, portanto, maior o módulo de compressão. (É por isso que não são dados valores específicos do módulo de compressão para gases na Tabela 11.1.) A expressão para o módulo de compressão de um gás que se pode usar na Equação (16.7) é

$$B = \gamma P_0 \qquad (16.9)$$

onde P_0 é a pressão de equilíbrio do gás. A grandeza γ (a letra grega 'gama') é denominada *razão das capacidades caloríficas*. É um número adimensional que caracteriza as propriedades térmicas do gás. (Aprenderemos mais sobre essa grandeza no Capítulo 19.) Por exemplo, a razão das capacidades caloríficas do ar é $\gamma = 1,40$. Em condições normais de pressão atmosférica, $P_0 = 1,01 \times 10^5$ Pa, portanto $B = (1,40)(1,013 \times 10^5\ \text{Pa}) = 1,42 \times 10^5$ Pa. Esse valor é minúsculo se comparado ao módulo de compressão de um sólido típico (ver Tabela 11.1), que está aproximadamente entre 10^{10} e 10^{11}. Isso não é de surpreender: pois não é nada mais do que uma afirmação de que o ar é muito mais fácil de comprimir do que o aço.

A densidade ρ de um gás depende também da pressão, que, por sua vez, depende da temperatura. No fim das contas, a razão B/ρ para um dado tipo de gás *não* depende da pressão, apenas da temperatura. Conforme a Equação (16.7), isso significa que a velocidade do som em um gás é, fundamentalmente, uma função da temperatura T:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad \begin{matrix}\text{(velocidade do som}\\ \text{em um gás ideal)}\end{matrix} \qquad (16.10)$$

Essa expressão incorpora diversas grandezas que você talvez reconheça de seus estudos sobre gases ideais em química e que estudaremos nos Capítulos 17, 18 e 19. A temperatura T é a temperatura *absoluta* em kelvins (K), igual à temperatura em Celsius mais 273,15; logo, 20 °C correspondem a $T = 293,15$ K. A grandeza M é a *massa molar*, ou massa por mol da substância de que o gás é composto. A *constante do gás*, R, possui o mesmo valor para todos os gases. O valor numérico mais aproximado de R atualmente é

$$R = 8,314472\ (15)\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

que, por razões práticas de cálculo, podemos aproximar para 8,314 J/mol · K.

Para qualquer gás, γ, R e M são constantes, e a velocidade da onda é proporcional à raiz quadrada da temperatura absoluta. Veremos no Capítulo 18 que a Equação (16.10) é quase idêntica à expressão para a velocidade média das moléculas de um gás ideal. Isso mostra que as

Figura 16.9 Esta imagem tridimensional de um feto no útero foi feita por meio de uma sequência de varreduras de ultra-som. Cada varredura individual revela uma fatia bidimensional do feto; muitas dessas fatias são, então, combinadas digitalmente para proporcionar essa visão notável.

velocidades sonoras e as velocidades moleculares são intimamente relacionadas, contudo, explorar essa analogia está além dos nossos objetivos.

Exemplo 16.5

VELOCIDADE DO SOM NO AR Calcule a velocidade das ondas sonoras no ar na temperatura ambiente ($T = 20$ °C), e encontre o intervalo de comprimentos de onda no ar em que o ouvido humano (que consegue escutar frequências entre 20 Hz até cerca de 20000 Hz) é sensível. A massa molar média do ar (uma mistura principalmente de nitrogênio e oxigênio) é 28.8×10^{-3} kg/mol e a razão das capacidades caloríficas $\gamma = 1.40$

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. este problema usa a relação entre as propriedades de um gás e a velocidade do som nesse mesmo gás

PREPARAR usamos a Equação (16.10) para achar a velocidade do som e a relação $v = f\lambda$ para calcular o comprimento de onda que corresponde a cada frequência.

EXECUTAR em $T = 20$ °C, encontramos

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1.40)(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(293\ \text{K})}{28.8 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}} = 343\ \text{m/s}$$

Usando esse valor de v e a expressão $\lambda = v/f$, descobrimos que a 20 °C, uma nota de 20 Hz corresponde a um comprimento de onda de 17 m, e uma nota de 20000 Hz corresponde a um comprimento de onda de 1,7 cm.

AVALIAR nosso resultado está de acordo com a velocidade do som medida nessa temperatura com uma margem de erro de 0,3%

É interessante observar que os morcegos podem ouvir frequências mais elevadas. Tal como os golfinhos, os morcegos usam ondas sonoras com frequências elevadas para orientação. Uma frequência típica usada por eles é 100 kHz; o comprimento de onda correspondente no ar a 20 °C é igual a aproximadamente 3,4 mm. Acontece que ondas sonoras com comprimentos de onda curtos como esse são mais facilmente refletidas por objetos pequenos do que as ondas de comprimentos de onda maiores. Isso é importante para certas espécies de morcegos que rastreiam o som refletido por pequenos insetos que lhes servem de refeição.

Na discussão precedente, desprezamos a natureza *molecular* do gás, que foi considerado um meio contínuo. Na realidade, sabemos que um gás é constituído por moléculas que se movem aleatoriamente, separadas por distâncias grandes em comparação com seus diâmetros. As vibrações que constituem as ondas que se propagam em um gás se sobrepõem no movimento térmico aleatório. Sob a pressão atmosférica, uma molécula se desloca uma distância média da ordem de 10^{-7} m entre as colisões, enquanto a amplitude do deslocamento de uma onda sonora fraca é de 10^{-9} m. Podemos imaginar que uma onda sonora se propagando em um gás seja semelhante ao movimento de um enxame de abelhas, o enxame como um todo oscila ligeiramente enquanto cada abelha se move de modo aparentemente aleatório dentro do conjunto.

Teste sua compreensão da Seção 16.2 O mercúrio é 13,6 vezes mais denso do que a água. Com base na Tabela 16.1, qual desses líquidos possui um módulo de compressão maior? (i) mercúrio; (ii) água; (iii) os módulos são praticamente iguais; (iv) não há dados suficientes para decidir. ∎

16.3 Intensidade do som

As ondas sonoras, como todas as ondas progressivas, transferem energia de uma região do espaço para outra. Na Seção 6.5 vimos que uma forma útil de se descrever a energia transportada por uma onda sonora é por meio da **intensidade** (designada pela letra I), que é igual à taxa temporal média com a qual a energia é transportada, por unidade de área, através de uma superfície perpendicular à direção de propagação da onda. Vamos ver agora como expressar a intensidade de uma onda sonora em termos da amplitude do deslocamento A ou da amplitude da pressão $P_{máx}$.

Intensidade e amplitude de deslocamento

Para simplificar, vamos considerar uma onda sonora se propagando no sentido positivo do eixo Ox, de modo a podermos usar as expressões da Seção 16.1 para o deslocamento $s(x, t)$ e a flutuação de pressão $P(x, t)$ — Equações (16.1) e (16.4), respectivamente. Na Seção 6.4 vimos que a potência é igual ao produto da força pela velocidade; ver a Equação (6.18). Portanto, a potência por unidade de área nessa onda sonora é igual ao produto da flutuação de pressão $P(x, t)$ (força por unidade de área) pela velocidade da *partícula* $v_y(x, t)$. A velocidade da partícula $v_y(x, t)$ é a velocidade no tempo t daquela porção do meio ondulatório na coordenada x. Usando as Equações (16.1) e (16.4), encontramos

$$v_y(x, t) = \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = \omega A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$P(x, t)v_y(x, t) = BkA\operatorname{sen}(kx - \omega t)\,[\omega A \operatorname{sen}(kx - \omega t)]$$

$$B\omega k A^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$$

ATENÇÃO Velocidade da onda x velocidade da partícula Lembre-se de que a velocidade da onda como um todo *não* é igual à velocidade da partícula. Embora a onda continue a se mover no sentido da propagação, partículas individuais no meio ondulatório se agitam para a frente e para trás, como mostra a Figura (16.1). Além disso, a velocidade máxima de uma partícula do meio pode ser bem diferente da velocidade da onda.

A intensidade é o valor médio de $P(x, t)v_y(x, t)$, por definição. Para qualquer valor de x, o valor médio da função $\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$ ao longo de um período $T = 2\pi/\omega$ é igual a $\frac{1}{2}$, logo

$$I = \frac{1}{2} B\omega k A^2 \qquad (16.11)$$

Usando as relações $\omega = vk$ e $v = B/\rho$, podemos transformar a Equação (16.11) na forma

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}\omega^2 A^2 \quad \text{(intensidade de uma onda sonora senoidal)} \qquad (16.12)$$

Essa equação mostra por que em um sistema estereofônico o dispositivo que possui frequência baixa (o alto-falante *woofer*) deve vibrar com amplitude maior do que o dispositivo com frequência alta (o alto-falante *tweeter*) para produzirem a mesma intensidade sonora.

Intensidade e amplitude da pressão

Geralmente é mais útil expressar I em termos da amplitude da pressão $P_{máx}$. Usando a Equação (16.5) e a relação $\omega = vk$, obtemos

$$I = \frac{vP_{máx}^2}{2Bk} = \frac{vP_{máx}^2}{2B} \qquad (16.13)$$

Usando a relação de velocidade da onda $v = \sqrt{B/\rho}$ podemos também escrever a Equação (16.13) nas formas alternativas

$$I = \frac{P_{máx}^2}{2\rho v} = \frac{P_{máx}^2}{2\sqrt{\rho B}}$$

(intensidade de uma onda sonora senoidal) (16.14)

Convidamos você a verificar essas expressões (ver o Exercício 6.16). A comparação entre as equações (16.12) e (16.14) mostra que ondas sonoras senoidais de mesma intensidade, porém com frequências diferentes, possuem amplitudes de deslocamento A diferentes, mas a *mesma* amplitude de pressão $P_{máx}$. Essa é uma outra razão pela qual geralmente é mais conveniente descrever uma onda sonora em termos das flutuações de pressão e não em função do deslocamento.

A potência média *total* transportada ao longo de uma superfície por uma onda sonora é igual ao valor da intensidade da onda sobre a superfície multiplicado pela área da superfície quando a intensidade é uniforme ao longo da superfície. A potência sonora total emitida por uma pessoa falando em um tom de conversa normal é aproximadamente igual a 10^{-5} W, enquanto um grito forte corresponde a 3×10^{-2} W. Se todas as pessoas de uma cidade com 10 milhões de habitantes conversassem ao mesmo tempo, a potência total emitida seria de 100 W, equivalente ao consumo de potência de uma lâmpada de filamento de porte médio. Por outro lado, a potência necessária para encher um auditório grande ou um estádio com som alto é considerável (ver o Exemplo 16.8 mais adiante).

Se a fonte sonora emite ondas em todas as direções de maneira uniforme, a intensidade diminui com o aumento da distância r da fonte segundo a lei do inverso do quadrado: a intensidade é proporcional a $1/r^2$. Discutimos essa lei e suas consequências na Seção 15.5. Se o som se move predominantemente em uma direção, a lei do inverso do quadrado não é aplicável e a intensidade diminui com a distância de modo mais lento do que $1/r^2$ (Figura 16.10).

Figura 16.10 Colocando as mãos próximas à boca, como mostra a fotografia, você dirige as ondas sonoras que saem de sua boca de modo a evitar que elas se propaguem para os lados. Dessa forma, a intensidade diminui com a distância mais lentamente do que seria esperado pela lei do inverso do quadrado, e você pode ser ouvido a distâncias mais longas.

A relação do inverso do quadrado também não é aplicável dentro de espaços fechados porque a energia do som pode chegar a um ouvinte por reflexão nas paredes e no teto. Com efeito, parte do trabalho de um arquiteto ao projetar um auditório é ajustar essas reflexões de modo que a intensidade seja tão uniforme quanto possível em todo o auditório.

Estratégia para a solução de problemas 16.1

INTENSIDADE DO SOM

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* as relações entre a intensidade e a amplitude de uma onda sonora são bastante simples. Entretanto, algumas outras grandezas estão envolvidas nessas relações, por isso é especialmente importante discernir qual é a variável procurada.

PREPARAR *o problema por meio dos seguintes passos:*

1. Organize as diversas grandezas em categorias. A amplitude é descrita por A ou P, e a frequência f pode ser determinada a partir de ω, k ou λ. Essas grandezas são relacionadas mediante a velocidade da onda v, que por sua vez é determinada pelas propriedades do meio, B e ρ no caso de um líquido; γ, T e M para um gás.
2. Determine quais são as grandezas conhecidas e quais as que você deseja encontrar a seguir, comece a procurar as relações apropriadas que o conduzirão aonde quer chegar.

EXECUTAR *o problema da seguinte forma:* use as equações que você escolheu para encontrar as variáveis procuradas. Confira se todas as grandezas estão expressas em unidades corretas. Em

especial, se a temperatura for usada para calcular a velocidade do som em um gás, é necessário que seja expressa em kelvins (temperatura em graus Celsius mais 273,15).

AVALIAR *a sua resposta:* existem diversas relações entre as grandezas que descrevem uma onda. Tente usar uma relação alternativa para verificar os seus resultados.

Exemplo 16.5

INTENSIDADE DE UMA ONDA SONORA NO AR

Ache a intensidade da onda sonora do Exemplo 16.1 considerando $P_{máx} = 3{,}0 \times 10^{-2}$ Pa. Assuma uma temperatura de 20 °C para a qual a densidade do ar é dada por $\rho = 1{,}20$ kg/m^3 e a velocidade do som $v = 344$ m/s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a variável que queremos encontrar é a intensidade I da onda sonora. Conhecemos a amplitude da pressão $P_{máx}$ da onda, e também a densidade ρ e a velocidade da onda v no meio.

PREPARAR: podemos calcular I a partir de $P_{máx}$, ρ e v, usando a Equação (16.14).

EXECUTAR: conforme a Equação (16.14),

$$I = \frac{P_{máx}^2}{2\rho v} = \frac{(3{,}0 \times 10^{-2}\ \text{Pa})^2}{2(1{,}20\ \text{kg/m}^3)(344\ \text{m/s})}$$
$$= 1{,}1 \times 10^{-6}\ \text{J/(s} \cdot \text{m}^2) = 1{,}1 \times 10^{-6}\ \text{W/m}^2$$

AVALIAR: esta intensidade parece ser muito baixa, mas, na verdade está dentro do intervalo de intensidades sonoras encontradas diariamente. Uma onda sonora muito forte, no limiar da dor, possui uma amplitude de pressão aproximadamente igual a 30 Pa e uma intensidade aproximadamente igual a 1 W/m^2. A amplitude da pressão do som mais fraco que pode ser ouvido é $3{,}0 \times 10^{-5}$ Pa, e a intensidade correspondente é 10^{-12} W/m^2. Convidamos você a verificar essas correspondências substituindo esses valores na Equação (16.14).

Exemplo 16.6

MESMA INTENSIDADE, FREQUÊNCIAS DIFERENTES

Uma onda sonora de 20 Hz possui a mesma intensidade da onda sonora de 1000 Hz dos Exemplos 16.1 e 16.6. Calcule a amplitude A e a amplitude da pressão $P_{máx}$ para a onda sonora de 20 Hz.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: foram dadas a intensidade e a frequência da onda sonora. As variáveis que queremos encontrar são a amplitude do deslocamento A e a amplitude da pressão $P_{máx}$.

PREPARAR: como temos a intensidade, podemos usar a Equação (16.12) para calcular a amplitude do deslocamento A. Note que o valor de B não foi fornecido. Entretanto, ρ e B dependem apenas das propriedades do meio, não da amplitude ou da frequência, então os seus valores se cancelarão um ao outro se igualarmos as intensidades a 20 Hz e a 1000 Hz. Podemos também usar a Equação (16.14) para achar a amplitude da pressão a 20 Hz.

EXECUTAR: observando a Equação (16.12), vemos que, se uma onda em um dado meio (mesmo ρ e mesmo B) possui a mesma intensidade I em duas frequências diferentes, então o produto ωA deve ter o mesmo valor para ambas as frequências. Pelo exemplo 16.1, $A = 1{,}2 \times 10^{-8}$ m a 1000 Hz, portanto

$$(20\ \text{Hz})A_{20} = (1000\ \text{Hz})(1{,}2 \times 10^{-8}\ \text{m})$$
$$A_{20} = 6{,}0 \times 10^{-7}\ \text{m} = 0{,}60\ \mu\text{m}$$

Você percebeu por que não precisamos converter as frequências em frequências angulares?

Visto que a intensidade é a mesma para ambas as frequências, a Equação (16.14) mostra que a amplitude da *pressão* $P_{máx}$ também deve ser a mesma para as duas ondas. Portanto, $P_{máx} = 3{,}0 \times 10^{-2}$ Pa para $f = 20$ Hz.

AVALIAR: nosso resultado reforça a idéia de que a amplitude da pressão proporciona uma descrição mais conveniente de uma onda sonora do que a amplitude do deslocamento. Note que, usando a Equação (16.5) e $k = \omega/v$, obtemos $P_{máx} = BkA = (B/v)\omega A$, o módulo de compressão B e a velocidade da onda v dependem somente do meio, o que nos leva a concluir novamente que o produto ωA deve apresentar o mesmo valor para as duas frequências.

Exemplo 16.7

"TOQUE MAIS ALTO!" Em um concerto ao ar livre, desejamos que a intensidade do som a uma distância de 20 m do conjunto de alto-falantes seja igual a 1 W/m^2. Supondo que a intensidade das ondas sonoras seja igual em todas as direções, qual deve ser a potência acústica do som emitido pelo conjunto de alto-falantes?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa a definição da intensidade como potência por unidade de área. Aqui a potência total é a variável procurada, e a área em questão é um hemisfério centrado no conjunto de alto-falantes.

PREPARAR: levantamos a hipótese de que os alto-falantes estejam ao nível do solo e que a potência acústica seja espalhada uniformemente sobre um hemisfério de raio igual a 20 m, ou seja, estamos supondo que nenhuma potência seja absorvida pelo solo. A área da superfície do hemisfério é igual a $(\frac{1}{2})(4\pi)(20\ \text{m})^2$, ou aproximadamente 2500 m^2. A potência acústica necessária é o produto dessa área pela intensidade.

EXECUTAR: a potência do conjunto de alto-falantes é

$$(1\ \text{W/m}^2)(2500\ \text{m}^2) = 2500\ \text{W} = 2{,}5\ \text{kW}$$

AVALIAR: a potência elétrica fornecida ao conjunto de alto-falantes deve ser consideravelmente maior, porque a eficiência desses dispositivos não é muito elevada (em geral entre 1% e 10% para alto-falantes comuns, e até 25% para alto-falantes com forma de cone).

A escala decibel

Como o ouvido é sensível a um intervalo de intensidade muito grande, geralmente se adota uma escala *logarítmica* para as intensidades. O **nível da intensidade sonora** β de uma onda sonora é definido pela equação

$$\beta = (10\,\text{dB}) \log \frac{I}{I_0} \quad \begin{matrix}\text{(definição do nível da}\\ \text{intensidade sonora)}\end{matrix} \qquad (16.15)$$

Nessa equação, I_0 é uma intensidade de referência, escolhida com o valor 10^{-12} W/m^2, perto do limiar da audição humana de 1.000 Hz. Lembre-se de que o símbolo "log" representa um logaritmo na base 10. Os níveis de intensidade sonora são expressos em **decibéis**, abreviados por dB. Um decibel é uma fração igual a $\frac{1}{10}$ do *bel*, uma unidade criada em homenagem a Alexander Graham Bell (o inventor do telefone). Como em muitos casos o bel é inconvenientemente grande, o decibel é a unidade usual para o nível da intensidade sonora.

Quando a intensidade de uma onda sonora for igual a I_0 ou 10^{-12} W/m^2, seu nível de intensidade sonora será igual a 0 dB. Uma intensidade de 1 W/m^2 corresponde a 120 dB. Na Tabela 16.2, fornecemos o nível da intensidade sonora de diversos sons familiares em decibéis. Podemos usar a Equação (16.15) para conferir o nível da intensidade sonora β de cada intensidade indicada na tabela.

Tabela 16.2 Nível de intensidade sonora de diversas fontes (valores típicos)

Fonte ou descrição do som	Nível de intensidade sonora, β (dB)	Intensidade I (W/m^2)
Avião a jato militar a 30 m de distância	140	10^{2}
Limiar da dor	120	1
Máquina de rebitar	95	$3{,}2 \times 10^{-3}$
Trem em um elevado	90	10^{-3}
Tráfego pesado	70	10^{-5}
Conversa comum	65	$3{,}2 \times 10^{-6}$
Automóvel silencioso	50	10^{-7}
Rádio com volume baixo	40	10^{-8}
Sussurro médio	20	10^{-10}
Ruído de folhas	10	10^{-11}
Limiar da audição a 1000 Hz	0	10^{-12}

Como o ouvido não possui a mesma sensibilidade para todas as frequências do intervalo audível, alguns medidores do nível da intensidade sonora fornecem pesos diferentes para as frequências. É o que acontece com a chamada escala dBA, que dá menos ênfase a frequências muito baixas e muito altas, às quais o ouvido é menos sensível do que a frequências intermediárias.

Exemplo 16.9

DIMINUIÇÃO TEMPORÁRIA DA AUDIÇÃO Uma exposição de dez minutos a um som de 120 dB produz um desvio típico do limiar de audição a 1000 Hz de 0 dB até cerca de 28 dB durante alguns segundos. Uma exposição a um som de 92 dB durante dez anos produz um desvio *permanente* da sensibilidade de até 28 dB. A que intensidades correspondem 28 dB e 92 dB?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o problema fornece dois níveis de intensidade sonora diferentes em dB, e queremos encontrar as intensidades correspondentes em W/m^2.

PREPARAR: podemos usar a Equação (16.15) para calcular a intensidade I que corresponde a cada valor do nível de intensidade sonora β.

EXECUTAR: dividindo ambos os membros da Equação (16.15) por 10 dB e a seguir usando a relação $10^{\log x} = x$, obtemos

$$I = I_0\, 10^{\beta/10\,\text{dB}}$$

Quando $\beta = 28$ dB,

$$\begin{aligned} I &= (10^{-12}\,\text{W/m}^2)10^{28\,\text{dB}/10\,\text{dB}} \\ &= (10^{-12}\,\text{W/m}^2)10^{2,8} = 6{,}3 \times 10^{-10}\,\text{W/m}^2 \end{aligned}$$

De forma similar, para $\beta = 92$ dB,

$$I = (10^{-12}\,\text{W/m}^2)10^{92\,\text{dB}/10\,\text{dB}} = 1{,}6 \times 10^{-3}\,\text{W/m}^2$$

AVALIAR: caso tenha obtido uma resposta dez vezes maior, você pode ter digitado 10×10^{-12} na calculadora em vez de 1×10^{-12}. Tome cuidado!

Exemplo 16.10

UM PÁSSARO CANTA NO CAMPO Imagine um modelo idealizado no qual um pássaro (considerado uma fonte puntiforme) esteja emitindo um som com potência constante, em uma intensidade que varia com o inverso do quadrado da distância entre o pássaro e o ouvinte. Qual é a variação da intensidade do som quando você se afasta até o dobro da distância inicial entre você e o pássaro?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como a escala decibel é logarítmica, a *diferença* entre dois níveis de intensidade sonora (a variável procurada) corresponde à *razão* entre as intensidades correspondentes. A razão entre as intensidades vem da lei do inverso do quadrado.

PREPARAR: nomeamos os pontos P_1 e P_2 na Figura 16.11. Usamos duas vezes (uma para cada ponto) a Equação (16.15), a definição de nível de intensidade sonora. Usamos a Equação (15.26), a lei do inverso do quadrado, para relacionar as intensidades nesses dois pontos.

EXECUTAR: a diferença do nível de intensidade sonora, $\beta_2 - \beta_1$, é dada por

$$\begin{aligned} \beta_2 - \beta_1 &= (10\,\text{dB})\left(\log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0}\right) \\ &= (10\,\text{dB})\,(\log I_2 - \log I_0) - (\log I_1 - \log I_0)\} \\ &= (10\,\text{dB}) \log \frac{I_2}{I_1} \end{aligned}$$

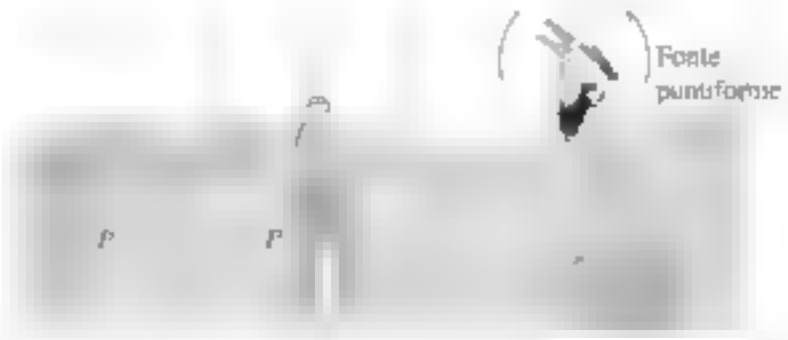


Figura 16.11 Quando você se afasta até o dobro da distância inicial entre você e uma fonte puntiforme, qual é a diminuição da intensidade do som que você ouve?

Agora usamos o inverso da Equação (15.26), $I/I_0 = r_0^2/r^2$. Logo

$$\beta - \beta_0 = (10\text{ dB})\log\frac{I}{I_0} = (10\text{ dB})\log\frac{r_0^2}{r^2}$$

$$= (10\text{ dB})\log\frac{1}{4} = -6\text{ dB}$$

Uma diminuição na intensidade de fator 4 corresponde a uma diminuição de 6 dB negativos no nível de intensidade sonora.

AVALIAR: Nosso resultado deu negativo, o que indica (corretamente) que o nível de intensidade sonora é menor em P_2 do que em P_1. A diferença de 6 dB negativos não depende do valor do nível de intensidade sonora em P_1. Se P_1 estiver relativamente perto do pássaro de modo que $\beta_1 = 56$ dB, então em um ponto P_2 duas vezes mais distante $\beta_2 = 50$ dB; se o ponto estiver mais distante do pássaro, de modo que $\beta_1 = 28$ dB, então em um ponto duas vezes mais distante $\beta_2 = 22$ dB.

É interessante notar que a *intensidade sonora* percebida não é diretamente proporcional à intensidade do som. Muitas pessoas interpretam um aumento da ordem de 8 a 10 dB no nível da intensidade sonora (correspondente a uma intensidade que aumenta em um fator de 6 para 10) como o dobro da intensidade sonora.

Teste sua compreensão da Seção 16.3 Você dobra a intensidade de uma onda sonora no ar ao mesmo tempo em que mantém a frequência inalterada. (A pressão, a densidade e a temperatura do ar também permanecem inalteradas.) Que efeito isso terá sobre a amplitude do deslocamento, a amplitude da pressão, o módulo de compressão, a velocidade do som e o nível de intensidade sonora? ❚

16.4 Ondas estacionárias e modos normais

Quando ondas longitudinais (sonoras) se propagam em um fluido no interior de um tubo com comprimento finito, elas são refletidas nas extremidades do mesmo modo que as ondas transversais em uma corda. A superposição das ondas que se propagam em sentidos opostos também forma uma onda estacionária. Tal como no caso de uma onda estacionária transversal em uma corda (ver Seção 15.7), ondas estacionárias longitudinais (modos normais) em um tubo podem ser usadas para criar ondas sonoras no ar circundante. Esse é o princípio operacional da voz humana, bem como de muitos instrumentos musicais, inclusive todos os instrumentos de sopro, metais e órgãos de tubos.

As ondas transversais em uma corda, inclusive as ondas estacionárias, são em geral descritas somente em termos dos deslocamentos da corda. Porém, como já vimos, as ondas longitudinais em um fluido podem ser descritas tanto em termos de deslocamento do fluido quanto em termos de variação da pressão no fluido. Para evitar confusão, vamos usar a expressão **nó de deslocamento** para designar um ponto do fluido com deslocamento igual a zero e **ventre de deslocamento** para o ponto no qual o deslocamento é máximo.

Podemos demonstrar a existência de ondas longitudinais em uma coluna de gás usando um aparelho chamado tubo de Kundt (Figura 16.12). Um tubo de vidro horizontal da ordem de 1,0 m de comprimento está fechado em uma de suas extremidades, e na outra contém um diafragma flexível que pode transmitir vibrações. Um alto-falante vizinho é acionado por um oscilador de áudio e um amplificador e força o diafragma a vibrar senoidalmente com uma frequência que podemos variar. As ondas sonoras no interior do tubo são refletidas na extremidade fechada do tubo. Espalhamos uma pequena quantidade de pó leve pela parte inferior do tubo. À medida que variamos a frequência do som, passamos por frequências em que as amplitudes das ondas esta-

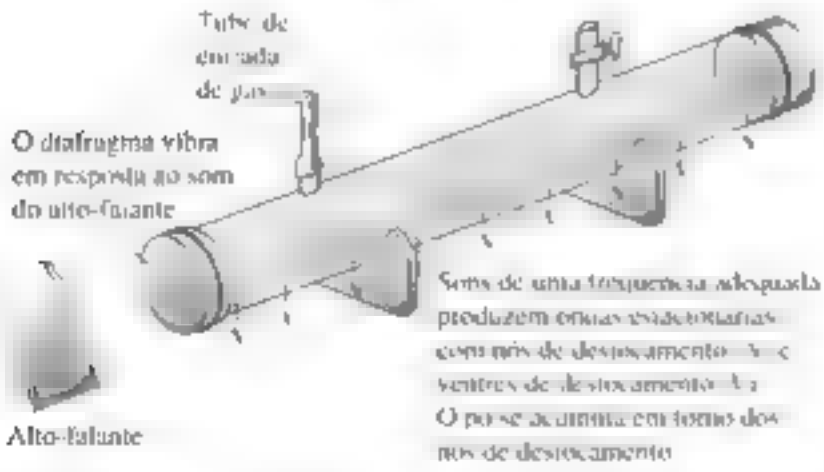

Tubo de entrada de gás
O diafragma vibra em resposta ao som do alto-falante
Sons de uma frequência adequada produzem ondas estacionárias com nós de deslocamento (N) e ventres de deslocamento (V).
O pó se acumula em torno dos nós de deslocamento
Alto-falante

Figura 16.12 Demonstração de ondas estacionárias por meio de um tubo de Kundt. As regiões sombreadas representam a densidade do gás no instante em que a pressão do gás nos nós de deslocamento é máxima ou mínima.

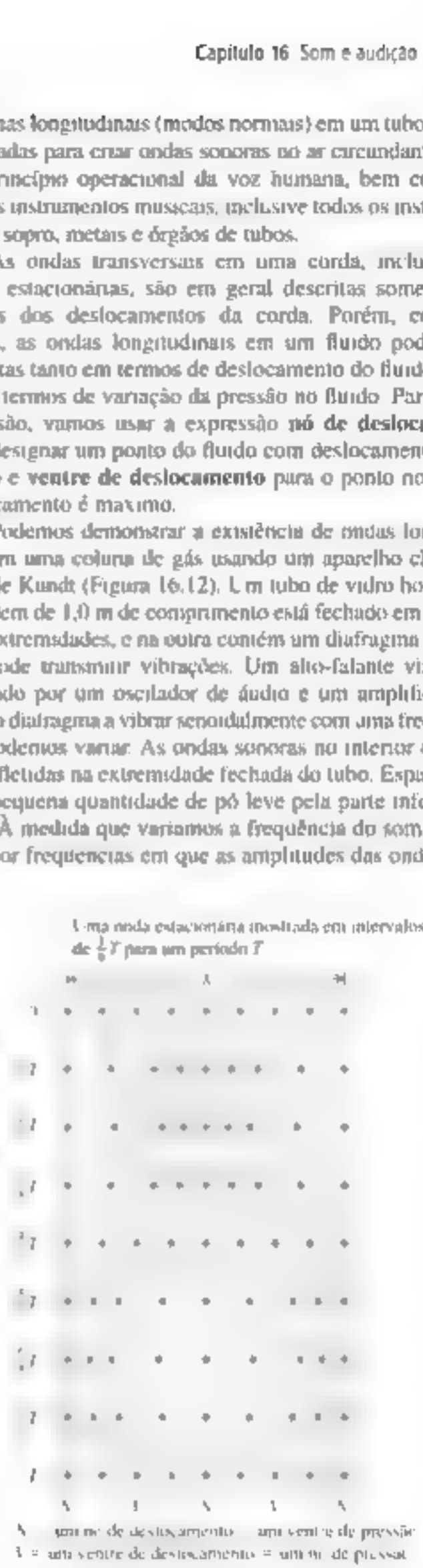

Uma onda estacionária mostrada em intervalos de 1/8 T para um período T
N
V
N = um nó de deslocamento = um ventre de pressão
V = um ventre de deslocamento = um nó de pressão

Figura 16.13 Em uma onda sonora estacionária, um nó de deslocamento *N* é um ventre de pressão (um ponto em que a pressão flutua ao máximo) e um ventre de deslocamento *V* é um nó de pressão (um ponto em que a pressão não flutua).

cionárias se tornam tão grandes que o pó é varrido ao longo do tubo pelo gás em movimento. Assim, o pó fica em repouso nos locais onde existem nós de deslocamento (onde o gás não se move). A distância entre dois nós adjacentes é igual a $\lambda/2$, e podemos medir essa distância. Lemos a frequência f no mostrador do oscilador, e a seguir calculamos a velocidade v das ondas usando a relação $v = \lambda f$.

A Figura 16.13 mostra os movimentos de nove partículas diferentes dentro de um tubo cheio de gás em que há uma onda sonora estacionária. Uma partícula em um nó de deslocamento (*N*) não se move, enquanto uma partícula em um ventre de deslocamento (*V*) oscila com amplitude máxima. Note que as partículas em lados opostos do nó de deslocamento vibram em fases opostas. Quando uma dessas partículas se aproxima da outra, o gás entre elas é comprimido e a pressão aumenta, quando elas se afastam, ocorre uma expansão do gás e a pressão diminui. Logo, quando ocorre um *nó* de deslocamento, o gás sofre uma compressão máxima e as variações de pressão e de densidade acima e abaixo do valor médio atingem um máximo. Em contraste, as partículas dos lados opostos de um *ventre* vibram em *fase*; as distâncias entre as partículas são aproximadamente constantes e não existe *nenhuma* variação da pressão nem da densidade em um ventre de deslocamento.

Usamos o termo **nó de pressão** para descrever um ponto da onda longitudinal estacionária no qual a pressão e a densidade não variam, e o termo **ventre de pressão** para descrever um ponto no qual variações da pressão e da densidade atingem valores máximos. Usando esses termos, podemos resumir nossas observações sobre ondas longitudinais estacionárias do seguinte modo:

Um nó de pressão corresponde sempre a um ventre de deslocamento, e um ventre de pressão corresponde sempre a um nó de deslocamento.

A Figura 16.12 mostra uma onda longitudinal estacionária no instante em que a variação da pressão atinge seu valor máximo, a região sombreada mostra que a densidade e a pressão do gás atingem máximos e mínimos nos nós de deslocamento (designados pela letra *N*).

Quando ocorre reflexão na extremidade *fechada* de um tubo (uma extremidade com uma barreira rígida ou com uma tampa), o deslocamento das partículas nessa extremidade é sempre igual a zero, de modo análogo a uma extremidade fixa de uma corda. Logo, a extremidade fechada de um tubo é um nó de deslocamento e um ventre de pressão; as partículas não se movem, porém, a variação da pressão é máxima. Uma extremidade *aberta* de um tubo é um nó de pressão porque ela está aberta para a atmosfera, onde a pressão permanece constante. Portanto, uma extremidade aberta é sempre um *ventre* de deslocamento, analogamente ao caso da extremidade livre de uma corda: as partículas se deslocam com amplitude máxima, mas a pressão não varia. (Estritamente falando, um nó de pressão ocorre em um ponto um pouco mais além da extremidade livre do tubo. Porém, quando o diâmetro do tubo for pequeno em comparação ao comprimento de onda, o que é verdade para quase todos os instrumentos musicais, esse efeito pode ser desprezado.) Logo, as ondas longitudinais em uma coluna de fluido são refletidas nas extremidades fechadas e abertas de um tubo, exatamente como ocorre com as ondas transversais refletidas em extremidades fixas e livres de uma corda, respectivamente.

Exemplo Conceitual 16.12

O SOM DO SILÊNCIO Um alto-falante direcional lança contra a parede uma onda sonora de comprimento de onda λ (Figura 16.14). A que distância da parede você pode ficar para não ouvir nenhum som?

SOLUÇÃO

O seu ouvido detecta variações de *pressão* no ar: um aumento ou diminuição de pressão sobre o tímpano faz com que ele se mova ligeiramente para dentro ou para fora, um movimento que gera um sinal elétrico enviado para o cérebro. Provavelmente você está familiarizado com a sensibilidade dos seus ouvidos para variações de pressão, porque já deve ter sentido seus ouvidos ficarem "tapados" ao subir uma montanha ou ao viajar de avião. Portanto, você não ouve nenhum som quando seus ouvidos estão em um nó de pressão, que corresponde a um ventre de deslocamento. A parede é um nó de deslocamento, a distância entre um nó e o ventre adjacente é igual a $\lambda/4$ e a distância entre dois ventres consecutivos é igual a $\lambda/2$ (Figura 16.14). Assim, as distâncias d da parede para as quais nenhum som será ouvido são

$d = \lambda/4$
(primeiro ventre de deslocamento e nó de pressão)

$d = \lambda/4 + \lambda/2 = 3\lambda/4$
(segundo ventre de deslocamento e nó de pressão)

$d = 3\lambda/4 + \lambda/2 = 5\lambda/4$
(terceiro ventre de deslocamento e nó de pressão)

e assim por diante. Se o alto-falante não fosse altamente direcional, esse efeito seria muito difícil de ser observado, porque ocorreriam reflexões das ondas sonoras no solo, no teto e em outros pontos da parede.

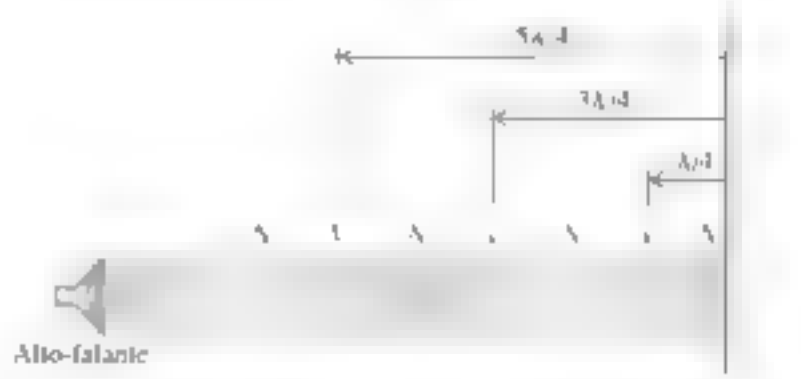


Figura 16.14 Quando ondas sonoras são emitidas contra uma parede, elas interferem com as ondas refletidas pela parede e formam ondas estacionárias. As letras *N* e *V* indicam, respectivamente, um nó e um ventre de deslocamento.

Órgãos e instrumentos de sopro

A aplicação mais importante das ondas longitudinais estacionárias é a produção de tons musicais por instrumentos de sopro e instrumentos com tubos de ar. Um órgão constitui um dos exemplos mais simples (Figura 16.15). O ar é fornecido por foles ou ventoinhas, com uma pressão manométrica da ordem de 10^3 Pa (10^{-2} atm), na extremidade inferior do tubo (Figura 16.16). Uma corrente de ar emerge da abertura estreita na extremidade da superfície horizontal e a seguir é direcionada para a parte superior da abertura, chamada de boca do tubo. A coluna de ar no tubo começa a vibrar e ocorrem diversos modos normais possíveis, tal como no caso de uma corda esticada. A boca sempre funciona como uma extremidade aberta; logo, ela é um nó de pressão e um ventre de deslocamento. A outra extremidade do tubo (no topo da Figura 16.16) pode estar fechada ou aberta.

No Figura 16.17, as duas extremidades do tubo estão abertas, de modo que elas são nós de pressão e ventres de deslocamento. Um tubo de órgão que possui as duas extremidades abertas é chamado de *tubo aberto*. A frequência fundamental f_1 corresponde a uma configuração de onda estacionária com um ventre em cada extremidade e um nó de deslocamento no meio do tubo (Figura 16.17a). A distância entre dois ventres adjacentes é sempre igual a meio comprimento de onda e, neste caso, ele é igual ao comprimento L do tubo; $\lambda/2 = L$. A frequência fundamental correspondente, obtida da relação $f = v/\lambda$ é dada por

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad \text{(tubo aberto)} \tag{16.6}$$

As Figuras 16.17b e 16.17c mostram o segundo e o terceiro harmônicos (o primeiro e o segundo sobretons); seus padrões de vibração apresentam dois e três nós de deslocamento, respectivamente. Para estes, meio comprimento de onda é igual a $L/2$ e $L/3$, respectivamente, e as frequências são o dobro e o triplo da frequência fundamental, respectivamente. Ou seja, $f_2 = 2f_1$ e $f_3 = 3f_1$. Para *qualquer* modo normal de um tubo aberto de comprimento L deve existir um múltiplo inteiro de meios comprimentos de onda, e os comprimentos de onda λ_n possíveis são dados por

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

(tubo aberto) (16.7)

As frequências correspondentes f_n são obtidas por $f_n = v/\lambda_n$, de modo que todas as frequências dos modos normais para um tubo aberto nas duas extremidades são dadas por

$$f_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots) \quad \text{(tubo aberto)} \tag{16.18}$$

O valor $n = 1$ fornece a frequência fundamental, $n = 2$ fornece o segundo harmônico (primeiro sobre tom), e assim por diante. Alternativamente, podemos escrever

$$f_n = nf_1 \; (n = 1, 2, 3 \ldots) \quad \text{(tubo aberto)} \tag{16.19}$$

onde f_1 é dada pela Equação (16.16).

A Figura 16.18 mostra um tubo aberto na extremidade esquerda, mas fechado na extremidade direita. Esse tubo é chamado de *tubo fechado em uma extremidade*, ou simplesmente *tubo fechado*. A extremidade esquerda (aberta) é um ventre de deslocamento (nó de pressão), porém a extremidade da direita (fechada) corresponde a um nó de deslocamento (ventre de pressão). A distância entre um nó e o ventre adjacente é sempre igual a um quarto do comprimento de onda. A Figura 16.18a mostra o modo com frequência mais baixa; o comprimento do tubo é igual a um quarto do comprimento de onda ($\lambda/4$). A frequência fundamental é $f = v/\lambda_1$ ou

$$f = \frac{v}{4L} \quad \text{(tubo fechado)} \tag{16.20}$$

Figura 16.15 Tubos de órgão de tamanhos diferentes produzem tons com frequências diferentes.

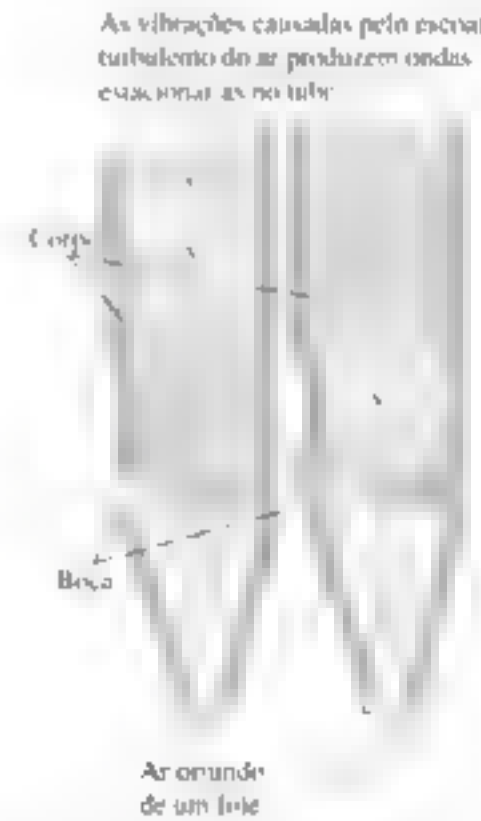

As vibrações causadas pelo escoamento turbulento do ar produzem ondas estacionárias no tubo
Corpo
Boca
Ar oriundo de um fole

Figura 16.16 Seção reta do tubo de um órgão em dois instantes separados por meio período. As letras *N* e *V* indicam, respectivamente, um nó e um ventre de deslocamento. As partes mais escuras indicam pontos nos quais a variação de pressão é máxima, e as partes mais claras indicam pontos nos quais a variação de pressão é igual a zero.

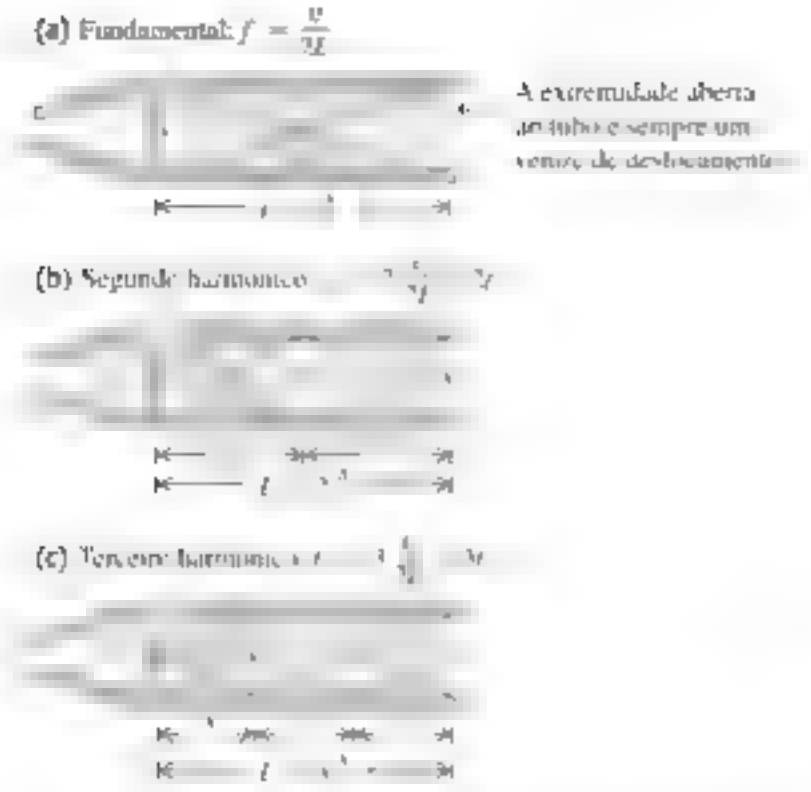

(a) Fundamental: $f = \frac{v}{2L}$
A extremidade aberta do tubo é sempre um ventre de deslocamento
(b) Segundo harmônico
(c) Terceiro harmônico

Figura 16.17 Seção reta de um tubo aberto mostrando os três primeiros modos normais. As regiões sombreadas indicam variações de pressão. As curvas indicam os gráficos do deslocamento ao longo do tubo em instantes de tempo separados entre si pela metade do período. As letras *N* e *V* indicam, respectivamente, um nó e um ventre de deslocamento. Trocando as posições obtemos, respectivamente, um ventre e um nó de pressão.

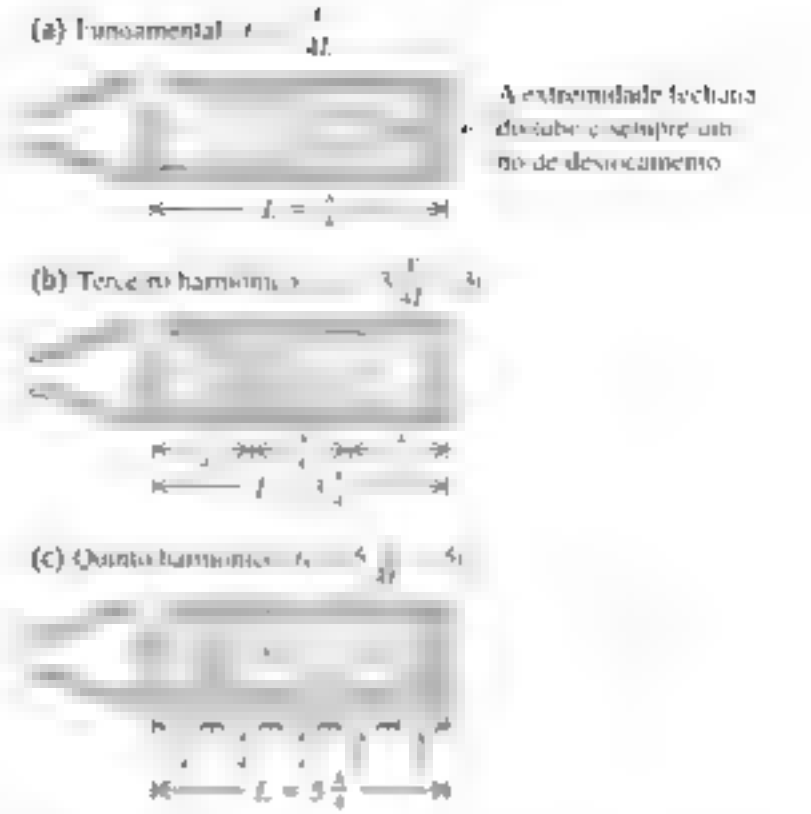


Figura 16.18 Seção reta de um tubo fechado mostrando os três primeiros modos normais, assim como os nós e os ventres de deslocamento (trocando as posições obtemos, respectivamente, um ventre e um nó de pressão). Somente os harmônicos de ordem ímpar podem ocorrer.

Esse valor é a metade da frequência fundamental de um tubo *aberto* de mesmo comprimento. Em linguagem de música, a *altura* de um tubo fechado é uma oitava menor (um fator de dois na frequência) do que a de um tubo aberto de mesmo comprimento. A Figura 16.18b mostra o modo seguinte, em que o comprimento de onda do tubo é *três quartos* do comprimento de onda, correspondendo a uma frequência $3f$. Na Figura 16.18c, $L = 5\lambda/4$ e a frequência é igual a $5f_1$. Os comprimentos de onda possíveis são

$$L = n\frac{\lambda_n}{4} \quad \text{ou} \quad \lambda_n = \frac{4L}{n} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

(tubo fechado) (16.21)

As frequências dos modos normais são dadas por $f_n = v/\lambda_n$, ou

$$f_n = \frac{nv}{4L} \quad (n = 1, 3, 5\ldots) \text{ (tubo fechado)} \quad (16.22)$$

ou

$$f_n = nf_1 \ (n = 1, 3, 5\ldots) \text{ (tubo fechado)} \quad (16.23)$$

onde f é dado pela Equação (16.20). Vemos que o segundo, o quarto e todos os harmônicos *pares* não estão presentes. Em um tubo fechado em uma das extremidades, a frequência fundamental é $f_1 = v/4L$ e somente os harmônicos de ordem ímpar na série ($3f_1, 5f_1, \ldots$) são possíveis.

Uma possibilidade final seria um tubo fechado em *ambas* as extremidades, contendo nós de deslocamento e ventres de pressão nas duas extremidades. Esse caso não tem utilidade prática como instrumento musical, pois não há forma de fazer as vibrações saírem do tubo.

Exemplo 16.12

UMA HISTÓRIA DE DOIS TUBOS Em um dia em que a velocidade do som é igual a 345 m/s, a frequência fundamental de um tubo de órgão fechado é igual a 220 Hz. a) Qual é o comprimento desse tubo fechado? b) O segundo *sobretom* desse tubo possui o mesmo comprimento de onda que o terceiro *harmônico* de um tubo aberto. Qual é o comprimento de onda do tubo aberto?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. este problema usa a relação entre o comprimento de frequências de modo normal de um tubo aberto (Figura 16.17) e de um tubo fechado (Figura 16.18).

PREPARAR sendo este um tubo fechado (aberto em uma extremidade e fechado na outra), as frequências do modo normal são dadas pela Equação (16.22), que usaremos para calcular o comprimento L da frequência no item (a). No item (b), precisamos comparar essa situação com a de um tubo aberto, cujas frequências são dadas pela Equação (16.16).

EXECUTAR: (a) como em um tubo fechado, $f_1 = v/4L$, o comprimento do tubo fechado é

$$L_{\text{fechado}} = \frac{v}{4f_1} = \frac{345 \text{ m/s}}{4(220 \text{ s}^{-1})} = 0.392 \text{ m}$$

(b) A frequência do primeiro sobretom de um tubo fechado é $f_3 = 3f_1$, e a frequência do segundo sobretom é $f_3 = 5f_1$.

$$f_3 = 5f_1 = 5\,(220 \text{ Hz}) = 1100 \text{ Hz}$$

Como os comprimentos de onda são os mesmos, as frequências são iguais, de modo que a frequência do terceiro harmônico do tubo aberto é também igual a 1100 Hz. O terceiro harmônico

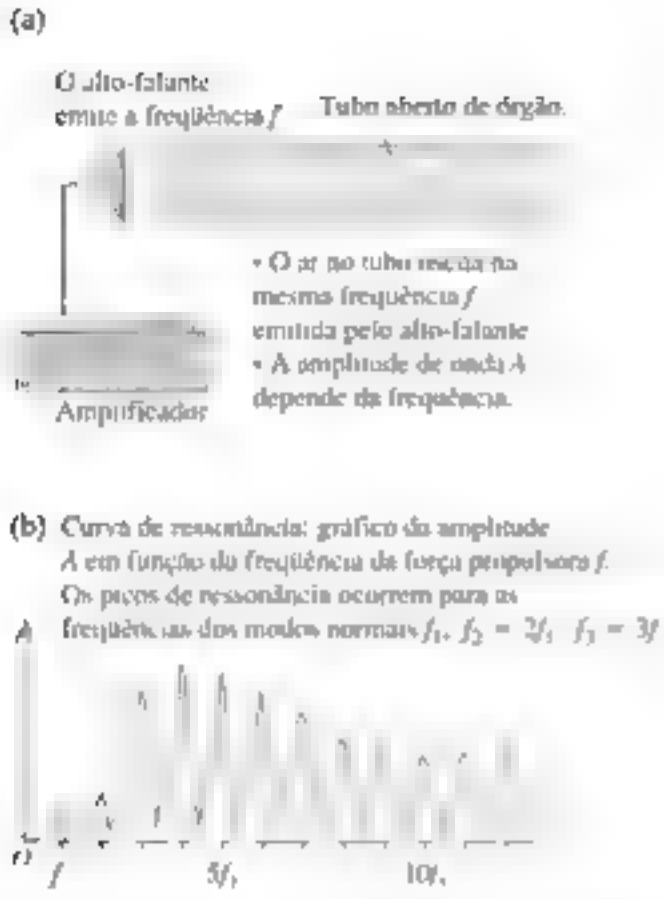

(a)
O alto-falante emite a frequência f
Tubo aberto de órgão.
• O ar no tubo reage na mesma frequência f emitida pelo alto-falante
• A amplitude de onda A depende da frequência.
Amplificador
(b) Curva de ressonância: gráfico da amplitude A em função da frequência da força propulsora f.
Os picos de ressonância ocorrem para as frequências dos modos normais f1, f2 = 2f1, f3 = 3f
A
f
5f1
10f1

Figura 16.19 (a) O ar em um tubo aberto é forçado a oscilar com a mesma frequência que as ondas sonoras variadas provenientes de um alto-falante. (b) Este gráfico, que se chama curva de ressonância do tubo aberto, mostra a amplitude das oscilações do ar no tubo aberto em função da frequência da força propulsora.

de um tubo aberto é dado por $3f_1 = 3(v/2L)$. Igualando essa expressão a 1100 Hz, obtemos

$$1100\ \text{Hz} = 3\left(\frac{345\ \text{m/s}}{2L_{\text{aberto}}}\right) \qquad \text{e} \qquad L_{\text{aberto}} = 0{,}470\ \text{m}$$

AVALIAR O comprimento do tubo fechado é 0,392 m e sua frequência fundamental é 220 Hz; o tubo aberto é mais longo, tendo 0,470 m, mas sua frequência fundamental é maior ou igual a (1100 Hz)/3 = 367 Hz. Caso isso lhe pareça contraditório, você deve comparar novamente a Figura 16.17a com a Figura 16.18a.

Em um tubo de um órgão em uso, diversos modos estão presentes simultaneamente; o movimento do ar é uma superposição desses modos. Essa situação é análoga ao caso de uma corda puxada, como na Figura 15.28. Tal como no caso de uma corda vibrante, uma onda estacionária complexa se propaga no tubo produzindo uma onda sonora progressiva no ar circundante com uma composição harmônica semelhante à da onda estacionária. Um tubo muito fino produz uma onda sonora rica em harmônicos superiores, os quais nós ouvimos como um tom fino e "agudo"; um tubo grosso produz basicamente o harmônico fundamental, ouvido como um tom macio, mais parecido com o som de uma flauta. A composição harmônica também depende da forma da boca do tubo.

Até o momento falamos sobre tubos de órgãos, porém essa discussão se aplica a outros instrumentos de sopro. A flauta e a flauta doce são diretamente análogos. A principal diferença é que esses instrumentos possuem buracos ao longo do tubo. Usando os dedos, podemos abrir ou fechar os buracos, alterando o comprimento efetivo L da coluna de ar e, portanto, fazendo variar a altura do som. Em contraste cada tubo individual de um órgão pode tocar apenas uma nota. A flauta e a flauta doce funcionam como tubos *abertos*, enquanto uma clarineta funciona como um tubo *fechado* (fechado na extremidade onde se sopra e onde se localiza a palheta, e aberto na outra extremidade, por onde sai o ar).

As Equações (16.18) e (16.22) mostram que as frequências de qualquer instrumento de sopro são proporcionais à velocidade do som v na coluna de ar no interior do instrumento. Como mostra a Equação (16.10), v depende da temperatura, seu valor aumenta quando a temperatura aumenta. Portanto, a altura de todos os instrumentos musicais se eleva com o aumento da temperatura. Se alguns tubos do órgão estiverem em temperaturas diferentes de outros, o órgão soará desafinado.

Teste sua compreensão da Seção 16.4 Se você conectar uma mangueira a uma extremidade de um tubo de metal e soprar ar comprimido dentro dele, o tubo produzirá um tom musical. Se em vez disso, você soprar hélio comprimido para dentro do tubo à mesma pressão e temperatura, o tubo produzirá (i) o mesmo tom, (ii) um tom mais alto ou (iii) um tom mais baixo? ⬆

16.5 Ressonância e som

Muitos sistemas mecânicos têm modos normais de oscilação. Como vimos, esses modos incluem colunas de ar (como em um órgão de tubo) e cordas esticadas (como em uma guitarra; ver Seção 15.8). Em cada modo, cada partícula do sistema descreve um MHS com a mesma frequência deste modo. Colunas de ar e cordas esticadas possuem uma série infinita de modos normais, porém o conceito básico está intimamente relacionado com o oscilador harmônico simples discutido no Capítulo 13, que possui um único modo normal (ou seja, uma única frequência com a qual ele oscila depois de ser perturbado).

Suponha que você aplique uma força variando periodicamente sobre um sistema que pode oscilar. O sistema é então forçado a oscilar com a mesma frequência da força aplicada (chamada de *força propulsora*). Esse movimento denomina-se *oscilação forçada*. Falamos sobre as oscilações forçadas de um oscilador harmônico na Seção 13.8, e sugerimos que você releia essa seção. Em particular, descrevemos o fenômeno da **ressonância** mecânica. Um exemplo simples de ressonância ocorre quando você empurra o seu primo Tobias em um balanço. O balanço é um pêndulo; ele possui apenas um modo normal cuja frequência é determinada pelo comprimento do pêndulo. Quando empurramos periodicamente o balanço com essa frequência, podemos fazer a amplitude do movimento aumentar. Porém, quando empurramos o balanço com uma frequência diferente, este praticamente não se move.

A ressonância também ocorre quando uma força periódica é aplicada a um sistema com muitos modos normais de vibração. Você pode ver um exemplo na Figura 16.19a

Um tubo aberto de um órgão é colocado nas proximidades de um alto-falante, alimentado por um amplificador, emitindo ondas senoidais puras com frequencia f que pode variar ajustando-se o amplificador. O ar no interior do tubo aberto é forçado a oscilar com a mesma frequencia f da *força propulsora* produzida pelo alto-falante. Em geral, a amplitude desse movimento é relativamente pequena, e o ar no interior do tubo não se move em nenhum dos modos normais mostrados na Figura 16.17. Entretanto, quando a frequência f da força propulsora tiver um valor proximo ao de uma das frequencias dos modos normais, o ar no interior do tubo oscilara com a mesma freqüência desse modo normal, e a amplitude aumentará consideravelmente. A Figura 16.19b mostra a amplitude das oscilações do ar no tubo em função da frequência f da força propulsora. A forma desse gráfico é chamada de **curva de ressonância** do tubo; ela forma picos quando o valor da freqüência f é igual a uma das freqüências dos modos normais do tubo. A forma detalhada da curva de ressonância depende da geometria do tubo.

Se a freqüencia da força propulsora for exatamente *igual* a uma das freqüências dos modos normais, a amplitude da oscilação forçada atingirá seu valor máximo. Caso não houvesse atrito nem nenhum outro mecanismo de dissipação de energia, uma força propulsora com a freqüência de um modo normal continuaria a adicionar energia ao sistema e a amplitude cresceria indefinidamente. Nesse caso ideal, os picos da curva de ressonancia da Figura 16.19b seriam infinitamente grandes. Contudo, em sistemas reais existe sempre alguma dissipação de energia, ou amortecimento, conforme discutimos na Seção 13.8; a amplitude da oscilação na ressonancia pode ser muito grande, mas não pode ser infinita.

O 'som das ondas do mar' que você ouve quando encosta o ouvido em uma concha do mar é produzido por ressonancia. O ruído do som do ar do lado de fora da concha é uma mistura de ondas sonoras com quase todas as freqüências audíveis, forçando a oscilação do ar no interior da concha. A concha funciona como se fosse o tubo de um órgão, contendo um conjunto de freqüencias dos modos normais; portanto, o ar no interior da concha oscila com mais intensidade nessas freqüências, produzindo o som característico que você ouve. Para ouvir outro fenômeno semelhante, tire a tampa da sua bebida favorita e sopre através da extremidade superior aberta. O ruído é produzido pelo seu sopro e o 'tubo do órgão' é a coluna de ar acima da superfície livre do líquido. Caso você beba um pouco da bebida e repita a experiência, você ouvirá um tom mais baixo porque o comprimento do 'tubo' aumentou, e as freqüências dos modos normais são menores.

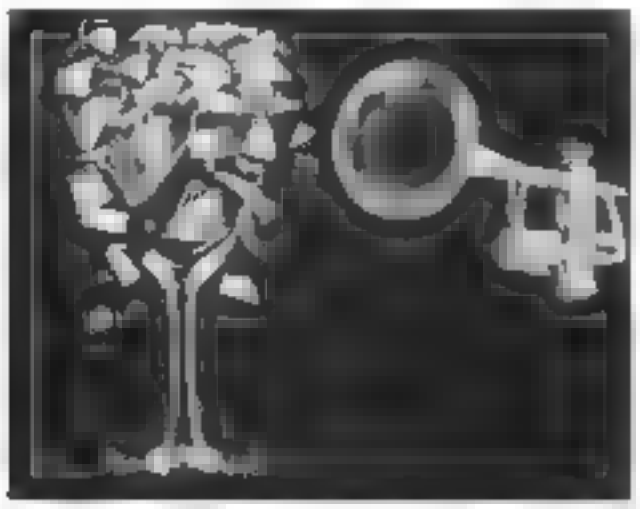


Figura 16.20 A freqüência do som deste trompete atinge um valor exatamente igual a uma das freqüências dos modos normais da taça de cristal. As vibrações da taça produzidas pela ressonância possuem uma amplitude suficientemente elevada para fazer a taça quebrar.

A ressonância também ocorre quando uma corda esticada é obrigada a oscilar (ver Seção 15.8). Suponha que uma das extremidades de uma corda esticada seja mantida fixa enquanto a outra extremidade vibra com pequenas amplitudes produzindo ondas estacionárias. Quando a freqüência do mecanismo propulsor *não* for igual a uma das frequencias dos modos normais da corda, a amplitude nos ventres será bastante pequena. Contudo, quando a freqüência for igual a uma das freqüências dos modos normais, a corda entrará em ressonância e a amplitude dos ventres passará a ser muito maior do que a amplitude dos ventres da extremidade livre que oscila. A extremidade propulsora não é precisamente um nó, porém ela está mais próxima de um nó do que de um ventre quando a corda entra em ressonância. As fotografias mostradas na Figura 15.23 foram feitas desse modo, mantendo-se a extremidade da esquerda fixa e fazendo a extremidade da direita oscilar verticalmente com pequena amplitude; as ondas estacionárias com amplitudes elevadas são produzidas quando a freqüência da oscilação da extremidade direita for igual a uma freqüência fundamental, ou quando for igual à frequencia de um dos três primeiros sobretons.

É fácil demonstrar a ressonância em um piano. Pressione para baixo o pedal do amortecedor, ou *sustain* (o pedal do lado direito), de modo que a eliminar o amortecimento e permitir que as cordas vibrem livremente, e a seguir cante em um tom constante para dentro do piano. Quando você pára de cantar, o piano parece continuar cantando a mesma nota. As ondas sonoras de sua voz excitam vibrações nas cordas que possuem freqüências naturais próximas das freqüências (a fundamental e os demais harmônicos) presentes na nota que você cantou.

Um exemplo mais espetacular é dado por uma cantora que quebra um cálice de cristal quando sua voz é amplificada pela ressonância. Um cálice de vinho de cristal de boa qualidade possui freqüências normais de vibração que você pode ouvir dando-lhe uma leve batida. Quando uma cantora emite uma nota em volume muito alto com uma freqüência exatamente igual a uma das freqüências desses modos normais, as oscilações que ocorrem no cálice podem se superpor, dando origem a uma oscilação com uma amplitude tão elevada que será capaz de quebrar o cálice (Figura 16.20).

A ressonancia é um conceito muito importante, não só para sistemas mecânicos, como também para todas as áreas da física. No Capítulo 31, daremos exemplos de ressonância em circuitos elétricos.

Exemplo 16.15

UM DUETO ÓRGÃO-GUITARRA Um tubo fechado de um órgão emite um som nas vizinhanças de uma guitarra fazendo vibrar com grande amplitude uma de suas cordas. Fazemos a tensão da corda variar até achar a amplitude máxima. O comprimento da corda é igual a 80% do comprimento do tubo fechado. Sabendo que a corda e o tubo vibram com a mesma frequência fundamental, calcule a razão entre a velocidade de propagação da onda na corda e a velocidade de propagação do som no ar.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR A resposta da vibração com amplitude grande obtida na corda ocorre da ressonância: ela ocorre porque o tubo do órgão e a corda possuem a mesma frequência fundamental.

PREPARAR Usando o índice inferior *a* para designar grandezas do ar e o índice inferior *c* para designar grandezas da corda, temos $f_a = f_c$. A Equação (16.20) fornece a frequência fundamental de um tubo fechado, e a Equação (15.32) fornece a frequência fundamental de uma corda de guitarra que é fixa em ambas as extremidades. Essas expressões envolvem a velocidade da onda no ar (v_a) e na corda (v_c), e os comprimentos do tubo e da corda, sabemos que $L_c = 0{,}8\,L_a$, e que a variável que queremos encontrar é a razão v_c/v_a.

EXECUTAR Pela Equação (16.20), sabemos que $f_a = v_a/4L_a$, e pela Equação (15.32) sabemos também que $f_c = v_c/2L_c$. Igualando essas relações, encontramos

$$\frac{v_c}{2L_c} = \frac{v_a}{4L_a}$$

Substituindo $L_c = 0{,}8\,L_a$ na relação anterior e reagrupando os termos, achamos

$$\frac{v_c}{v_a} = 0{,}4$$

AVALIAR Por exemplo, se a velocidade do som no ar fosse igual a 345 m/s, a velocidade da onda na corda seria (0,4)(345 m/s) = 138 m/s. Note que, embora as ondas estacionárias no tubo e na corda possuam a mesma frequência, elas têm *comprimentos de onda* $\lambda = v/f$ diferentes, porque os dois meios têm velocidades *v* diferentes. Qual das ondas estacionárias possui o maior comprimento de onda?

Teste sua compreensão da Seção 16.5 Um tubo de órgão fechado de comprimento *L* possui uma frequência fundamental igual a 220 Hz. Em qual dos seguintes tubos de órgão haverá ressonância se um diapasão de frequência igual a 660 Hz soar perto do tubo? (Pode haver mais de uma resposta correta.) (i) um tubo de órgão fechado de comprimento *L*; (ii) um tubo de órgão fechado de comprimento 2*L*; (iii) um tubo de órgão aberto de comprimento *L*; (iv) um tubo de órgão aberto de comprimento 2*L*. ∎

16.6 Interferência de ondas

O termo *interferência* agrupa os fenômenos ondulatórios que ocorrem quando duas ou mais ondas se superpõem na mesma região do espaço. Como vimos, uma onda estacionária é um exemplo simples de interferência: duas ondas se propagando em sentidos opostos ao longo de um meio se superpõem dando origem a uma onda estacionária que possui nós e ventres que não se movem.

A Figura 16.21 mostra outro exemplo de interferência que envolve ondas que se espalham no espaço. Dois alto-falantes, ligados em fase pelo mesmo amplificador, emitem ondas sonoras senoidais idênticas com a mesma frequência constante. Colocamos um microfone no ponto *P* da figura, eqüidistante dos dois alto-falantes. As cristas das ondas emitidas pelos dois alto-falantes percorrem distâncias iguais nos mesmos intervalos de tempo e chegam simultaneamente ao ponto *P*. Portanto, as ondas chegam em fase e ocorre uma interferência construtiva. A amplitude total da onda em *P* é igual ao dobro da amplitude de cada onda individual, e podemos medir essa amplitude total com o microfone.

Deslocamos agora o microfone para o ponto *Q*, no qual a diferença entre as distâncias até os microfones é igual a meio comprimento de onda. Então as duas ondas chegam ao ponto *Q* com uma *diferença de fase* equivalente a meio ciclo; uma crista positiva da onda proveniente de um alto-falante chega ao ponto no mesmo instante em que chega outra onda com uma crista negativa. Nesse caso, ocorre interferência destrutiva, e a amplitude medida no microfone é *muito menor* do que quando um único alto-falante está presente. Quando as amplitudes das ondas provenientes dos alto-falantes forem iguais, as duas ondas se cancelam completamente no ponto *Q* e a amplitude total da onda resultante é igual a zero.

ATENÇÃO **Interferência e ondas progressivas** Embora esta situação tenha alguma semelhança com as ondas estacionárias em um tubo, a onda total resultante na Figura 16.21 é uma onda *progressiva* e não uma onda estacionária. Para entender o motivo, lembre-se de que em uma onda estacionária não existe nenhum fluxo de energia em nenhuma direção. Em contraste, na Figura 16.21 existe um fluxo total de energia do alto-falante para o ar circundante: isso é típico de uma onda progressiva. A interferência entre as ondas dos alto-falantes simplesmente faz o fluxo de energia ser *conduzido* para certas direções (por exemplo, para o ponto *P*) e ser cancelado em outras direções (por exemplo, na direção do ponto *Q*). Você pode notar outra diferença entre a Figura 16.21 e uma onda estacionária considerando um ponto, tal como o ponto *Q*, onde ocorre interferência destrutiva. Esse ponto é *simultaneamente* um nó de deslocamento e um nó de pressão, porque não existe nenhuma onda resultante nesse ponto. Compare isso com uma onda estacionária, na qual um nó de pressão corresponde a um ventre de deslocamento e vice-versa.

A interferência construtiva ocorre quando a diferença entre as distâncias percorridas pelas duas ondas for igual a um número inteiro de comprimentos de onda, 0, λ, 2λ, 3λ... Em todos esses casos, as ondas chegam em fase ao microfone (Figura 16.22a). Quando a diferença das distâncias entre o microfone e cada alto-falante for igual a um número semi-inteiro de comprimentos de onda, $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$...,

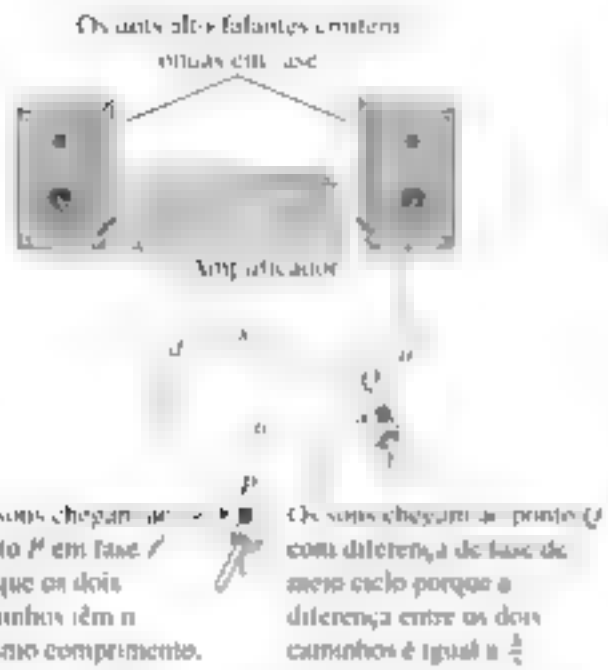


Figura 16.21 [illegible] a interferência destrutiva ocorre no ponto Q

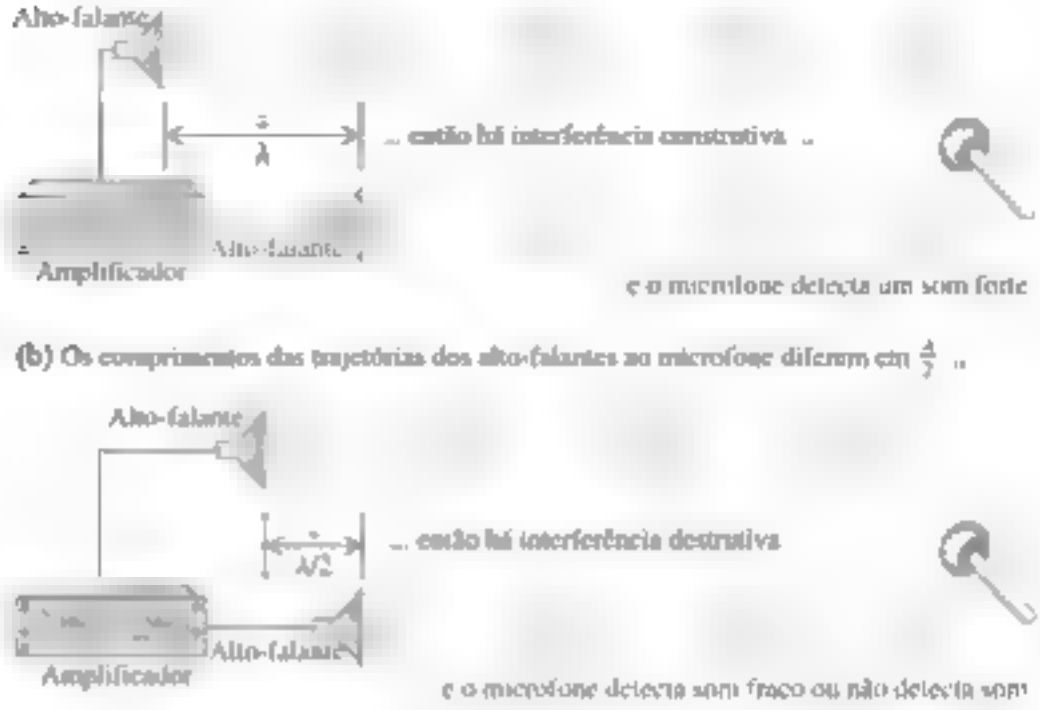

(a) Os comprimentos das trajetórias dos alto-falantes ao microfone diferem em λ .
Alto-falante
... então há interferência construtiva ...
Amplificador
... e o microfone detecta um som forte
(b) Os comprimentos das trajetórias dos alto-falantes ao microfone diferem em ...
Alto-falante
λ/2
... então há interferência destrutiva
Amplificador
... e o microfone detecta som fraco ou não detecta som

Figura 16.22 Dois alto-falantes alimentados pelo mesmo amplificador emitindo ondas em fase. Somente as ondas direcionadas aos microfones são indicadas, e elas estão separadas pela [illegible] A, λ, λ [illegible] caminhos for igual a 0, λ/2, 3λ/2, 5λ/2...

as ondas chegam no microfone com fases opostas e ocorrerá interferência destrutiva (Figura 16.22b). Nesse caso, pouca ou nenhuma energia sonora flui em direção ao microfone que está diretamente em frente aos alto-falantes. Em vez disso, a energia é dirigida para os lados, onde ocorre interferência construtiva.

Exemplo integrado

INTERFERÊNCIA EM ALTO-FALANTES Dois alto-falantes pequenos, *A* e *B* (Figura 16.23), são alimentados por um mesmo amplificador e emitem ondas sonoras em fase. Se a velocidade do som for igual a 350 m/s, a) em que frequências a interferência construtiva ocorre no ponto *P*? b) Em que frequências a interferência destrutiva ocorre no ponto *P*?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR A natureza da interferência em *P* depende da diferença entre os comprimentos das trajetórias dos pontos *A* e *B* até *P* e da relação entre essa diferença e o comprimento de onda.

PREPARAR Calculamos os comprimentos das trajetórias de *A* a *P* e de *B* a *P* pelo teorema de Pitágoras. Interferências construtivas ocorrem quando a diferença entre as trajetórias percorridas for igual a um número inteiro de comprimentos de onda, enquanto a interferência destrutiva ocorre quando a diferença entre os comprimentos das trajetórias é um número semi-inteiro de comprimentos de onda. Para encontrar as frequências correspondentes, usamos a relação $v = f\lambda$.

EXECUTAR A distância do alto-falante *A* até o ponto *P* é $[(2{,}0\ \text{m})^2 + (4{,}0\ \text{m})^2]^{1/2} = 4{,}47\ \text{m}$, e a distância entre o alto-falante *B* e *P* é $[(1{,}0\ \text{m})^2 + (4{,}0\ \text{m})^2] = 4{,}12\ \text{m}$. A diferença entre as trajetórias seguidas pelas ondas é $d = 4{,}47\ \text{m} - 4{,}12\ \text{m} = 0{,}35\ \text{m}$.

a) Ocorre interferência construtiva quando a diferença entre as trajetórias percorridas *d* for igual a um número inteiro de comprimentos de onda, $d = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots$, ou $d = 0, v/f, 2v/f, \ldots = nv/f$. Logo, as frequências possíveis são

$$f = \frac{nv}{d} = n\frac{350\ \text{m/s}}{0{,}35\ \text{m}} \qquad (n = 1, 2, 3\ldots)$$

$$= 1000\ \text{Hz}, 2000\ \text{Hz}, 3000\ \text{Hz}\ \ldots$$

b) Ocorre interferência destrutiva quando a diferença entre as trajetórias percorridas *d* for igual a um número semi-inteiro de comprimentos de onda, $d = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2\ldots$, ou $d = v/2f, 3v/2f, 5v/2f\ldots$ Logo, as frequências possíveis são

$$f = \frac{nv}{2d} = n\frac{350\ \text{m/s}}{2(0{,}35\ \text{m})} \qquad n = 1, 3, 5$$

$$= 500\ \text{Hz}, 1500\ \text{Hz}, 2500\ \text{Hz}\ \ldots$$

AVALIAR À medida que a frequência aumenta, o som no ponto *P* alterna amplitudes grandes e pequenas, os máximos e mínimos ocorrem nas frequências que calculamos. Esse efeito dificilmente

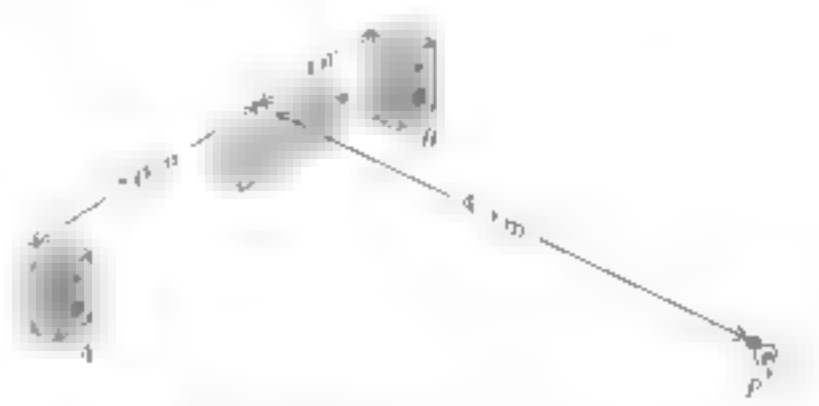


Figura 16.23 Que tipo de interferência ocorre em *P*?

pode ser notado em uma sala comum, devido às reflexões múltiplas que ocorrem nas paredes, no piso e no teto. Essa experiência pode ser feita com êxito ao ar livre ou em uma câmara com paredes não refletoras, ou seja, paredes que absorvem completamente o som e eliminam as reflexões.

Experiências semelhantes às descritas no Exemplo 16.14, porém usando a luz, foram realizadas para mostrar a natureza ondulatória da luz e para medir seu comprimento de onda. Essas experiências serão descritas em detalhe no Capítulo 35.

Os efeitos de interferência são usados para controlar ruídos provenientes de fontes sonoras muito intensas, tais como usinas que utilizam turbinas a gás ou células para testar motores a jato. O método consiste em usar fontes sonoras adicionais localizadas em certos pontos do espaço para produzir interferência destrutiva com o som que não é desejado, e cancelá-lo. Microfones instalados na área controlada enviam sinais de volta para as fontes sonoras adicionadas, que ajustam continuamente as freqüências emitidas de modo a otimizar a interferência destrutiva na área controlada.

Teste sua compreensão da Seção 16.6 Suponha que o alto-falante *A* da Figura 16.23 emita uma onda sonora senoidal de freqüência 500 Hz e que o alto-falante *B* emita uma onda sonora senoidal de freqüência 1000 Hz. Que tipo de interferência ocorrerá entre essas duas ondas? (i) interferência construtiva em vários pontos, inclusive o ponto *P*, e interferência destrutiva em vários outros pontos; (ii) interferência destrutiva em vários pontos, inclusive o ponto *P*, e interferência construtiva em vários pontos; (iii) nem (i), nem (ii). ∎

16.7 Batimentos

Na Seção 16.6, comentamos sobre os efeitos de *interferência* que ocorrem quando duas ondas com amplitudes diferentes e mesma freqüência se superpõem na mesma região do espaço. Vejamos agora o que ocorre quando há superposição de duas ondas de mesma amplitude, mas de freqüências levemente diferentes. Isso ocorre, por exemplo, quando tocamos simultaneamente dois diapasões com freqüências ligeiramente diferentes, ou quando dois tubos de um órgão que deveriam ter a mesma freqüência ficam ligeiramente desafinados.

Considere um ponto particular do espaço onde as duas ondas se superpõem. Os deslocamentos das ondas individuais nesse ponto são apresentados em função do tempo na Figura 16.24a. O comprimento total do eixo do tempo representa um segundo, e as freqüências são 16 Hz (senóide que começa abaixo do eixo do tempo) e 18 Hz (senóide que começa acima do eixo do tempo). Aplicando o princípio da superposição, adicionamos os deslocamentos em cada instante para achar o deslocamento total no respectivo instante. O resultado dessa superposição é o gráfico indicado na Figura 16.24b. Em certos instantes, as duas ondas estão em fase; seus máximos coincidem e as duas amplitudes se somam. Porém, como as curvas possuem freqüências ligeiramente diferentes, as duas ondas não podem ficar sempre em fase. Com efeito, em certos instantes (como $t = 0{,}50$ s na Figura 16.24), elas estão completamente *fora* de fase. Nesse caso, as duas ondas se cancelam, e a amplitude total é zero.

A onda resultante representada na Figura 16.24b parece uma única onda senoidal com uma amplitude variável que vai desde zero até um valor máximo e depois retorna a zero. Neste exemplo, a amplitude atinge dois máximos e dois mínimos consecutivos em um segundo; logo, a freqüência desta variação de amplitude é igual a 2 Hz. A variação da amplitude produz variações de intensidade denominadas **batimentos**, e a freqüência dessa variação de intensidade denomina-se **freqüência dos batimentos**. Neste exemplo, a freqüência do batimento é a *diferença* entre as duas freqüências. Quando a freqüência dos batimentos for de poucos hertz, conseguimos ouvi-la como uma ondulação ou pulsação no tom.

Podemos demonstrar que a freqüência dos batimentos é sempre dada pela diferença das duas freqüências f_a e f_b. Suponha que f_a seja maior do que f_b; os períodos correspondentes são T_a e T_b, sendo $T_a < T_b$. Se as ondas começassem em fase para $t = 0$, elas voltariam a ficar em fase quando a primeira onda percorresse um ciclo a mais do que a segunda. Isso ocorreria quando o valor de t fosse igual a T_{bat}, o período dos batimentos. Seja n o número de ciclos da primeira onda no tempo T_{bat}; então o número de ciclos da segunda onda no mesmo tempo é $(n - 1)$ e, portanto, obtemos as relações

$$T_{bat} = nT_a \quad e \quad T_{bat} = (n-1)T_b$$

Eliminando n entre essas duas equações, achamos

$$T_{bat} = \frac{T_a T_b}{T_b - T_a}$$

O inverso do *período* dos batimentos é a *freqüência* dos batimentos, $f_{bat} = 1/T_{bat}$, portanto,

$$f_{bat} = \frac{T_b - T_a}{T_a T_b} = \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b}$$

e finalmente,

$$f_{bat} = f_a - f_b \quad \text{(freqüência dos batimentos)} \qquad (16.24)$$

Conforme afirmamos, a freqüência dos batimentos é a diferença entre as duas freqüências. Ao usar a Equação (16.24), lembre-se de que f_a é a freqüência mais elevada.

Uma dedução alternativa da Equação (16.24) consiste em listar as funções que descrevem as curvas da Figura 16.24a e a seguir somá-las. Suponha que, em certo ponto, as duas ondas sejam dadas por $y_a(t) = A \operatorname{sen} 2\pi f_a t$ e $y_b(t) = A \operatorname{sen} 2\pi f_b t$. Usamos a seguinte identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

Podemos então escrever a onda resultante $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$ do seguinte modo

$$y_a(t) + y_b(t) =$$

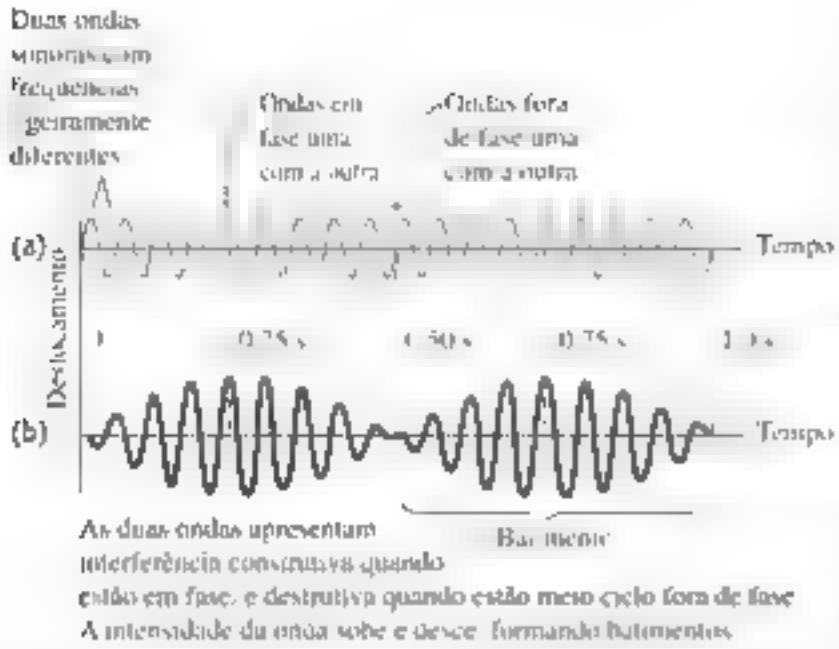


Figura 16.24 Os batimentos são flutuações na amplitude produzidas pela superposição de duas ondas sonoras que possuem frequências ligeiramente diferentes, como, por exemplo, 16 Hz e 18 Hz. a) Ondas individuais. b) Onda resultante da superposição das duas ondas. A frequência dos batimentos é 18 Hz − 16 Hz = 2 Hz.

$$= \left[2A \operatorname{sen} \frac{1}{2}(2\pi)(f_a - f_b)t\right] \cos \frac{1}{2}(2\pi)(f_a + f_b)t$$

O fator da amplitude (a grandeza entre colchetes) varia lentamente com uma frequência $\frac{1}{2}(f_a - f_b)$. O fator cosseno varia com uma frequência igual à frequência média $\frac{1}{2}(f_a + f_b)$. O *quadrado* da amplitude, que é proporcional à intensidade do som que o ouvido detecta, passa por dois máximos e dois mínimos em cada ciclo. Logo, a frequência dos batimentos que ouvimos f_{bat} é o dobro da grandeza $\frac{1}{2}(f_a - f_b)$ ou, precisamente, $f_a - f_b$, concordando com a Equação (16.24).

Os batimentos entre dois tons podem ser ouvidos até uma frequência de batimentos da ordem de 6 ou 7 Hz. Duas cordas de piano ou dois tubos de um órgão que apresentam uma diferença de frequência da ordem de 2 ou 3 Hz possuem um som ondulatório ou 'desafinado', embora alguns registros de órgão contenham dois conjuntos de tubos propositalmente afinados para que as freqüências dos batimentos sejam da ordem de 1 a 2 Hz para se obter um efeito ondulatório suave. Escutar os batimentos é uma técnica importante para afinar todos os instrumentos musicais.

Quando há diferenças de freqüências maiores do que cerca de 6 ou 7 Hz, não escutamos mais batimentos individuais, e a sensação conflui para uma *consonância* ou a uma *dissonância*, dependendo da razão entre as freqüências dos batimentos. Em alguns casos, o ouvido percebe um tom chamado de *diferença de tom*, com uma altura igual à frequência dos batimentos dos dois tons. Por exemplo, se você escuta um assobio que produz sons de 1800 Hz e de 1900 Hz quando emitido, você ouvirá não somente esses tons, mas também um tom muito mais baixo de 100 Hz.

Os motores de aviões que possuem diversas hélices propulsoras devem ser sincronizados de modo a não produzir batimentos desagradáveis, que são ouvidos como intensos sons pulsantes (Figura 16.25). Em alguns aviões, a sincronização é feita eletronicamente; em outros, o piloto faz isso 'de ouvido', tal como se procede para afinar um piano.

Teste sua compreensão da Seção 16.7 Um diapasão vibra com uma frequência de 440 Hz, enquanto um segundo diapasão vibra em uma frequência desconhecida. Quando se fazem soar ambos os diapasões simultaneamente, escuta-se um tom que cresce e diminui em intensidade três vezes por segundo. Qual é a frequência do segundo diapasão? (i) 434 Hz; (ii) 437 Hz; (iii) 443 Hz; (iv) 446 Hz; (v) 434 Hz ou 446 Hz; (vi) 437 Hz ou 443 Hz. ■

16.8 O efeito Doppler

Você já deve ter notado que, quando um carro se aproxima de você buzinando, parece que a frequência do som diminui à medida que ele se afasta. Esse fenômeno, descrito

Figura 16.25 Se as duas hélices deste avião não estiverem perfeitamente sincronizadas, os pilotos, os passageiros e os ouvintes que estão no solo devem escutar batimentos.

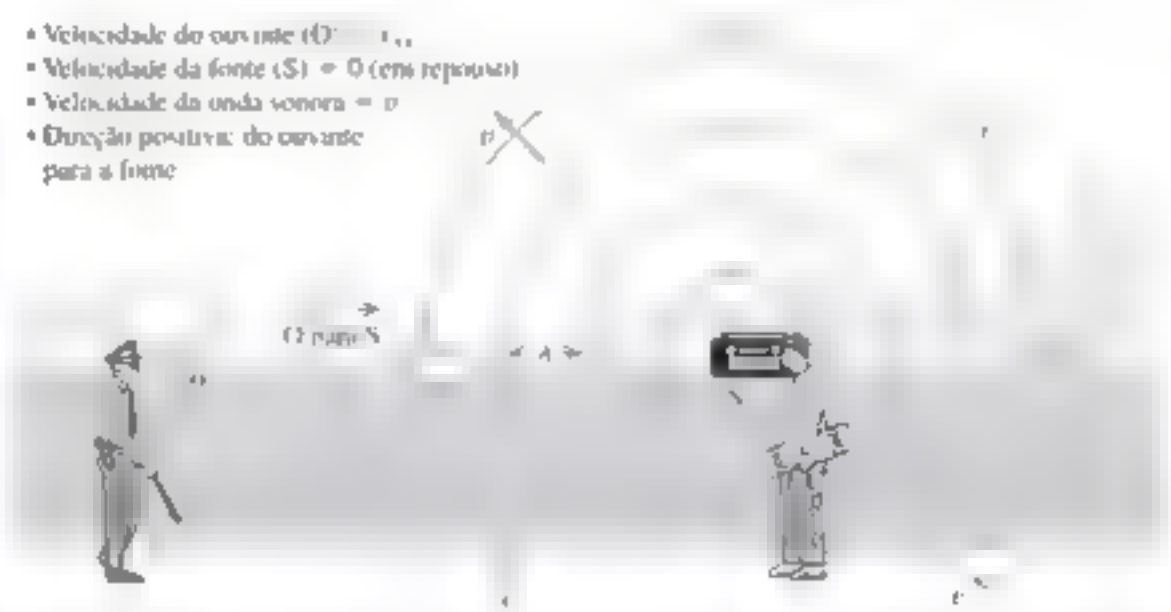

• Velocidade do ouvinte (O) = v_O
• Velocidade da fonte (S) = 0 (em repouso)
• Velocidade da onda sonora = v
• Direção positiva: do ouvinte para a fonte
v
O para S
v
v

Figura 16.26 Um ouvinte que se aproxima de uma fonte ouve um som com uma frequência maior do que a frequência da fonte, porque a velocidade relativa entre o ouvinte e a onda é maior do que a velocidade da onda v.

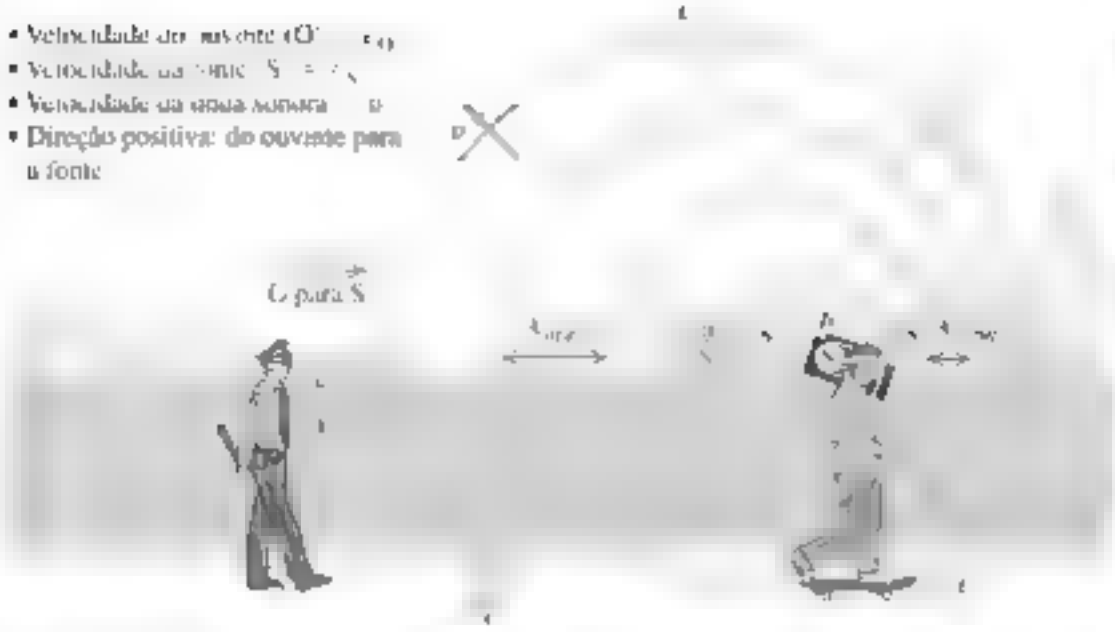

• Velocidade do ouvinte (O): v_O
• Velocidade da fonte (S): v_S
• Velocidade da onda sonora: v
• Direção positiva: do ouvinte para a fonte
O para S
S para O

Figura 16.27 [illegible] da fonte (do lado direito neste desenho) e se dilatam atrás da fonte (do lado esquerdo neste desenho).

Figura 16.28 O efeito Doppler explica por que a frequência da sirene de uma ambulância ou de um carro de bombeiro apresenta uma altura mais elevada ($f_L > f_S$) quando a fonte se aproxima de você ($v_L < 0$), e uma altura mais baixa ($f_L < f_S$) quando a fonte se afasta de você ($v_L > 0$).

pela primeira vez no século XIX pelo cientista austríaco Christian Doppler, denomina-se **efeito Doppler**. Quando existe um movimento relativo entre uma fonte sonora e um ouvinte, a freqüência do som percebido pelo ouvinte é diferente da freqüência do som emitido pela fonte. Um efeito semelhante ocorre com a luz e com as ondas de rádio; voltaremos a comentar a respeito disso mais adiante.

Para analisar o efeito Doppler do som, vamos estabelecer uma relação entre o desvio da freqüência e as velocidades da fonte e do ouvinte em relação ao meio (geralmente o ar) através do qual a onda sonora se propaga. Para simplificar, consideraremos somente o caso particular no qual a velocidade da fonte e a velocidade do ouvinte possuem direções ao longo da linha reta que os une. Sejam v_S e v_O as componentes da velocidade do som e da velocidade do ouvinte, respectivamente, em relação ao meio ao longo dessa linha reta. Vamos considerar positivo o sentido do ouvinte O para a fonte sonora S. A velocidade do som v em relação ao meio será sempre considerada positiva.

Ouvinte em movimento

Vamos inicialmente supor um ouvinte O se movendo com velocidade v_O e se aproximando de uma fonte S (Figura 16.26). A fonte emite uma onda sonora com freqüência f_S e comprimento de onda $\lambda = v/f_S$. A figura mostra diversas cristas de onda, separadas pela mesma distância λ. As cristas das ondas que se aproximam do ouvinte movem-se com uma velocidade de propagação *em relação ao ouvinte* igual a $(v + v_O)$. Assim, a freqüência f_O das ondas que chegam ao local onde se situa o ouvinte (ou seja, a freqüência ouvida pelo observador) é dada por

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} = \frac{v + v_L}{v/f_S} \qquad (16.25)$$

$$f_L = \left(\frac{v + v_L}{v}\right) f_S = \left(1 + \frac{v_L}{v}\right) f_S \quad \text{(ouvinte se movendo, fonte em repouso)} \qquad (16.26)$$

Portanto, quando um ouvinte se aproxima da fonte sonora ($v_O > 0$), como indicado na Figura 16.26, ele ouve um som com uma freqüência mais elevada (altura mais elevada) do que a freqüência ouvida quando ele está em repouso. Quando o ouvinte se afasta da fonte sonora ($v_O < 0$), ele ouve uma freqüência menor (altura mais baixa).

Fonte em movimento e ouvinte em movimento

Suponha agora que, além do ouvinte, a fonte também se mova, com velocidade v_S (Figura 16.27). A velocidade da onda em relação ao meio no qual ela se propaga (o ar) é ainda igual a v, pois essa velocidade só depende das propriedades do meio e não se altera quando a fonte se move. Porém, o comprimento de onda não é mais v/f_S. Vejamos por quê. O tempo para a emissão de um ciclo da onda é $T = 1/f_S$. Durante esse tempo, a onda se deslocou uma distância $vT = v/f_S$, e a fonte se moveu uma distância $v_S T = v_S/f_S$. O comprimento de onda é a distância entre duas cristas sucessivas, distância esta que é determinada pelo deslocamento *relativo* entre a fonte e o ouvinte. Como podemos ver na Figura 16.27, o deslocamento relativo entre um ouvinte e a fonte é diferente para um ouvinte que está na frente da fonte e para um ouvinte que está atrás da fonte. Na região à direita da fonte na Figura 16.27 (ou seja, na frente da fonte), o comprimento de onda é

$$\lambda_{\text{frente}} = \frac{v}{f_S} - \frac{v_S}{f_S} = \frac{v - v_S}{f_S} \quad \text{(comprimento de onda na frente de uma fonte que se move)} \qquad (16.27)$$

Na região à esquerda da fonte (ou seja, atrás da fonte), o comprimento de onda é

$$\lambda_{\text{atrás}} = \frac{v + v_S}{f_S} \quad \text{(comprimento de onda atrás de uma fonte que se move)} \qquad (16.28)$$

Em razão do movimento da fonte, as ondas se comprimem na frente da fonte e se distendem atrás da fonte.

Para encontrar a frequência percebida pelo ouvinte, substituímos a Equação (16.28) na primeira forma da Equação (16.25):

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda_{onda}} = \frac{v + v_L}{(v + v_S)/f_S}$$

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S \qquad \text{(efeito Doppler, fonte e ouvinte em movimento)} \qquad (16.29)$$

Essa relação fornece a frequência f_O detectada pelo ouvinte em função da frequência f_S da fonte.

Embora tenhamos deduzido a Equação (16.29) para a situação particular mostrada na Figura 16.27, esta equação inclui *todas* as possibilidades do movimento da fonte e do ouvinte (em relação ao meio) ao longo da reta que os une. Quando o ouvinte está em repouso, v_O é igual a zero. Quando o ouvinte e a fonte estão em repouso ou quando se deslocam com a mesma velocidade em relação ao meio, então $v_O = v_S$ e $f_O = f_S$. Quando o sentido da velocidade da fonte ou da velocidade do ouvinte for contrário ao sentido que vai do ouvinte para a fonte (que definimos como positivo), a velocidade correspondente a ser usada na Equação (16.29) é negativa.

Como exemplo, a frequência percebida por um ouvinte em repouso ($v_O = 0$) é $f_O = [v/(v + v_S)]\, f_S$. Se a fonte estiver se movendo na direção do ouvinte (no sentido negativo), então $v_S < 0$, $f_O > f_S$, e o ouvinte escuta uma frequência mais alta do que a emitida pela fonte. Se, em vez disso, a fonte estiver se afastando do ouvinte (deslocando-se no sentido positivo, $v_S > 0$, $f_O < f_S$, e o ouvinte percebe uma frequência mais baixa. Isso explica a mudança de altura que você nota quando a sirene de uma ambulância passa por você (Figura 16.28).

[redacted]

EFEITO DOPPLER

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* o efeito Doppler é relevante sempre que a fonte das ondas, o detector das ondas (ouvinte) ou ambos estejam em movimento.

PREPARAR *o problema por meio dos seguintes passos:*

1. Estabeleça um sistema de coordenadas. Defina como positivo o sentido que vai do ouvinte para a fonte, e certifique-se de que você conhece os sinais de todas as velocidades relevantes. Uma velocidade que está no sentido do ouvinte para a fonte é positiva; uma velocidade com sentido contrário a esta é negativa. Também devemos medir todas as velocidades em relação ao ar no qual a onda se propaga.

2. Use uma notação consistente para identificar as diversas grandezas: use índice inferior S para a fonte sonora e índice inferior O para o ouvinte.

EXECUTAR *o problema da seguinte forma:*

1. Use a Equação (16.29) para relacionar as frequências na fonte e junto ao ouvinte; a velocidade do som e as velocidades da fonte e do ouvinte. Se a fonte estiver em movimento, você pode calcular o comprimento de onda medido pelo ouvinte por meio das Equações (16.27) ou (16.28).

2. Quando uma onda é refletida por uma superfície, em repouso ou em movimento, a análise deve ser feita em duas etapas. Inicialmente, a superfície desempenha o papel do ouvinte: a frequência com a qual as cristas das ondas chegam à superfície é f_O. A seguir, imagine que a superfície seja uma nova fonte, emitindo ondas com a mesma frequência f_O. Finalmente, determine a frequência detectada pelo ouvinte que escuta essa nova onda.

AVALIAR *a sua resposta:* verifique se o seu resultado final faz sentido. Quando ocorre uma aproximação entre a fonte e o ouvinte, $f_O > f_S$; quando eles se afastam, $f_O < f_S$. Quando não existe movimento relativo entre a fonte e o ouvinte, $f_O = f_S$.

[redacted]

EFEITO DOPPLER I: COMPRIMENTOS DE ONDA Uma sirene da polícia emite uma onda senoidal com frequência $f_S = 300$ Hz. A velocidade do som é 340 m/s. a) Calcule o comprimento de onda das ondas sonoras quando a sirene está em repouso em relação ao ar. b) Quando a sirene se move a 30 m/s (108 km/h), determine o comprimento de onda das ondas situadas na frente e atrás da fonte.

Figura 16.29 Esboço do problema

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o efeito Doppler não está envolvido na parte (a), pois nem a fonte nem o ouvinte estão se movendo. Na parte (b), a fonte está em movimento, ou seja, há efeito Doppler envolvido.

PREPARAR: a Figura 16.29 mostra a situação. Usamos a relação $v = \lambda f$ para calcular o comprimento de onda quando a sirene da polícia está em repouso. Quando a sirene está em movimento, calculamos o comprimento de onda de ambos os lados da sirene por meio das Equações (16.27) e (16.28).

EXECUTAR: a) Quando a fonte está em repouso,

$$\lambda = \frac{v}{f_S} = \frac{340\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1{,}13\ \text{m}$$

b) Esta situação é retratada na Figura 16.29. Pela Equação (16.27), na frente da sirene

$$\lambda_{\text{frente}} = \frac{v - v_S}{f_S} = \frac{340\ \text{m/s} - 30\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1{,}03\ \text{m}$$

Pela Equação (16.28), atrás da sirene

$$\lambda_{\text{atrás}} = \frac{v + v_S}{f_S} = \frac{340\ \text{m/s} + 30\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1{,}23\ \text{m}$$

AVALIAR: o comprimento de onda é menor na frente da sirene e maior atrás, como era de se esperar.

[redacted]

EFEITO DOPPLER II: FREQUÊNCIA Se o ouvinte O está em repouso e a sirene do Exemplo 16.15 se afasta de O com velocidade de 30 m/s, que frequência o ouvinte escuta?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR a variável que precisamos encontrar é a freqüência f_O percebida pelo ouvinte que está atrás da fonte em movimento.

PREPARAR: a Figura 16.30 mostra a situação. Sabemos, do Exemplo 16.15, que $f_S = 300$ Hz, e sabemos também que $v_O = 0$ e $v_S = 30$ m/s. A velocidade da fonte v_S é positiva porque ela se move no mesmo sentido que aponta do ouvinte para a fonte.

Figura 16.30 Esboço do problema.

EXECUTAR: pela Equação (16.29),

$$f_O = \frac{v + v_O}{v + v_S} f_S = \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 276 \text{ Hz}$$

AVALIAR a fonte e o ouvinte se afastam, de modo que a freqüência f_O que o ouvinte escuta é menor do que a freqüência f_S emitida pela fonte.

Eis uma abordagem alternativa: do Exemplo 16.15, sabemos que o comprimento de onda atrás da fonte (onde o ouvinte da Figura 16.30 está localizado) é 1,23 m, portanto,

$$f_O = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{1{,}23 \text{ m}} = 276 \text{ Hz}$$

Embora a fonte esteja em movimento, a velocidade da onda v em relação ao ouvinte em repouso é sempre a mesma.

Exemplo 16.17

EFEITO DOPPLER III: OUVINTE EM MOVIMENTO Se a sirene estiver em repouso e o ouvinte estiver se afastando da sirene a 30 m/s, que freqüência o ouvinte escuta?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR mais uma vez, a variável que queremos encontrar é a freqüência f_O percebida por um ouvinte, mas agora o ouvinte está em movimento e a fonte está em repouso.

PREPARAR: a Figura 16.31 mostra a situação. O sentido positivo (do ouvinte para a fonte) continua sendo da esquerda para a direita, portanto $v_O = -30$ m/s.

EXECUTAR: pela Equação (16.29),

$$f_O = \frac{v + v_O}{v} f_S = \frac{340 \text{ m/s} + (-30 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 274 \text{ Hz}$$

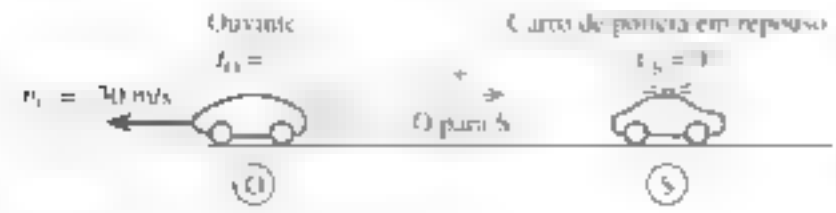


Figura 16.31 Esboço do problema.

AVALIAR: novamente, a freqüência que o ouvinte escuta é menor do que a freqüência da fonte. Note que a *velocidade relativa* entre o ouvinte e a fonte é a mesma do exercício anterior, porém o desvio da freqüência produzido pelo efeito Doppler é diferente porque as velocidades em relação ao *ar* são diferentes.

Exemplo 16.18

EFEITO DOPPLER IV: FONTE EM MOVIMENTO, OUVINTE EM MOVIMENTO Se a sirene se afasta do ouvinte com velocidade de 45 m/s em relação ao ar, e o ouvinte se aproxima da sirene com velocidade de 15 m/s em relação ao ar, que freqüência o ouvinte escuta?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: agora *tanto* o ouvinte quanto a fonte estão em movimento. Mais uma vez, a variável que queremos encontrar é a freqüência f_O percebida pelo ouvinte.

PREPARAR: a Figura 16.32 mostra a situação. Tanto a velocidade da fonte, $v_S = 45$ m/s, quanto a do ouvinte, $v_O = 15$ m/s, são positivas, porque os dois vetores apontam no sentido do ouvinte para a fonte.

EXECUTAR usando mais uma vez a Equação (16.29), encontramos

$$f_O = \frac{v + v_O}{v + v_S} f_S = \frac{340 \text{ m/s} + 15 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 45 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz})$$
$$= 277 \text{ Hz}$$

Figura 16.32 Esboço do problema.

AVALIAR: a freqüência que o ouvinte escuta é novamente menor do que a freqüência da fonte, porém o valor é diferente dos valores encontrados nos dois exemplos anteriores, apesar de ocorrer o afastamento entre a fonte e o ouvinte com uma velocidade relativa igual a 30 m/s em todos os três casos. O *sinal* do desvio da freqüência do efeito Doppler (isto é, se a freqüência f_O é maior ou menor do que a freqüência da fonte f_S) depende de como a fonte e o ouvinte estão se movendo em relação um ao outro; para determinar o *valor* desse desvio de freqüência, você precisa saber o valor da velocidade do ouvinte e a velocidade da fonte em relação ao ar.

Exemplo 16.19

EFEITO DOPPLER V: UM DUPLO DESVIO DOPPLER Um carro de polícia com uma sirene de 300 Hz move-se a 30 m/s no sentido de um armazém, com a intenção de derrubar a porta. Qual é a freqüência do som refletido pela porta do armazém que o motorista do carro de polícia ouve?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: nesta situação existem *dois* desvios Doppler, como indicado na Figura 16.33. No primeiro desvio, o armazém

funciona como um "ouvinte" em repouso. A frequência do som que atinge o armazém, que chamamos de f_A, é maior do que 300 Hz porque a fonte está se aproximando. No segundo desvio, o armazém funciona como uma fonte de som com frequência f_A, e o ouvinte é o motorista do carro de polícia; ele ouve uma frequência maior do que f_A, porque ele se aproxima da fonte.

PREPARAR: para determinar f_A, usamos a Equação (16.29) substituindo f_O por f_A. O armazém está em repouso, logo $v_O = v_A = 0$; a sirene está se movendo no sentido negativo, ou seja, da fonte para o observador, logo $v_S = -30$ m/s. Para determinar a frequência ouvida pelo motorista, que é a nossa incógnita, usamos novamente a Equação (16.29), porém agora substituindo f_S por f_A. Para esta segunda parte do problema, $v_S = 0$ porque o armazém em repouso é a fonte e a velocidade do ouvinte (o motorista) é $v_O = +30$ m/s. (A velocidade do ouvinte do ouvinte é positiva porque ela possui sentido do ouvinte para a fonte.)

EXECUTAR: a frequência que chega ao armazém é

$$f_A = \frac{v}{v + v_S} f_S = \frac{340\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s} + (-30\ \text{m/s})}(300\ \text{Hz}) = 329\ \text{Hz}$$

Portanto, a frequência ouvida pelo motorista é

$$f_O = \frac{v + v_O}{v} f_A = \frac{340\ \text{m/s} + 30\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s}}(329\ \text{Hz}) = 358\ \text{Hz}$$

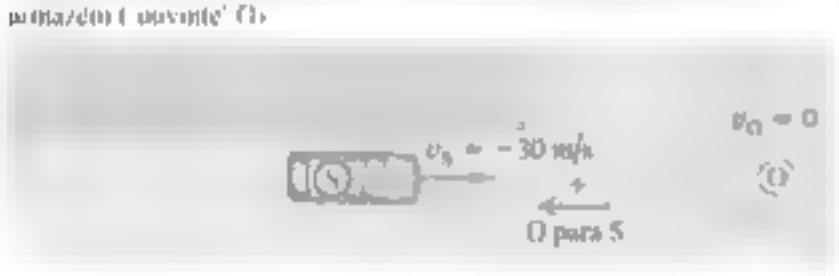

(a) O som se desloca da sirene do carro de polícia (fonte S) até o armazém (ouvinte O)
$v_S = -30$ m/s
$v_O = 0$
S
O
O para S
(b) O som refletido se desloca do armazém (fonte S) para o carro de polícia (ouvinte O)
$v_O = +30$ m/s
$v_S = 0$
O para S

Figura 16.33 Duas etapas do movimento da onda sonora desde o carro de polícia até o armazém e desde o armazém até o carro de polícia.

AVALIAR: como há dois desvios Doppler, o som refletido que é ouvido pelo motorista tem uma frequência ainda mais alta do que o som percebido por um ouvinte estacionário no armazém.

Efeito Doppler em ondas eletromagnéticas

No efeito Doppler do som, as velocidades v_O e v_S são sempre medidas em relação ao *ar* ou qualquer meio de propagação. Ocorre também efeito Doppler em ondas *eletromagnéticas* que se propagam no vácuo, como no caso das ondas de rádio ou de ondas luminosas. Nesse caso, não há um meio que possamos usar como referência para medirmos as velocidades, e o único fator relevante é a velocidade *relativa* entre a fonte e o observador. (Em contraste, o efeito Doppler do som não depende somente dessa velocidade relativa, conforme vimos no Exemplo 16.18.)

Para deduzir a expressão do efeito Doppler do desvio da frequência para a luz é necessário usar a teoria da relatividade especial. Discutiremos esse assunto no Capítulo 37; por enquanto, mencionaremos o resultado sem demonstração. A velocidade de propagação da onda é a velocidade da luz, geralmente designada pela letra c, que é a mesma tanto para o receptor quanto para a fonte. No sistema de referência no qual o receptor está em repouso, a fonte se afasta dele com velocidade v. (Quando a fonte se *aproxima* do receptor a velocidade v é negativa.) A frequência da fonte é novamente f_S. A frequência f_R medida pelo receptor R (a frequência com a qual as ondas chegam ao receptor) é então dada por

$$f_R = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} f_S \quad \text{(efeito Doppler para a luz)} \qquad (16.30)$$

Quando v é positiva, a fonte se *afasta* diretamente do receptor e f_R é sempre *menor* do que f_S; quando v é negativa, a fonte se *aproxima* diretamente do receptor, e f_R é *maior* do que f_S. O efeito qualitativo é semelhante ao que ocorre com as ondas sonoras, porém a relação quantitativa é diferente.

Uma aplicação conhecida do efeito Doppler em ondas de rádio é o equipamento de radar montado na janela lateral de um carro de polícia para medir a velocidade dos outros carros. A onda eletromagnética emitida pelo equipamento é refletida por um carro em movimento, que funciona como uma fonte móvel, e a onda refletida que volta para o equipamento da polícia sofre um desvio de frequência devido ao efeito Doppler. O sinal transmitido e o sinal refletido se combinam e formam batimentos, e a velocidade pode ser calculada pela frequência dos batimentos. Técnicas semelhantes são usadas ("Doppler") para medir a velocidade do vento na atmosfera.

O efeito Doppler é usado também para rastrear satélites e outros veículos espaciais. Na Figura 16.34, um satélite emite um sinal de rádio com frequência constante f_S. À medida que o satélite percorre sua órbita, ele primeiro se aproxima e depois se afasta do receptor; a frequência f_R do sinal recebido na Terra varia de um valor maior do que f_S para um valor menor do que f_S depois que ele passa exatamente sobre o local da estação.

O efeito Doppler para ondas eletromagnéticas, inclusive a luz visível, é importante na astronomia. Os astrônomos comparam o comprimento de onda da luz proveniente de uma estrela longínqua com aquele emitido pelo mesmo

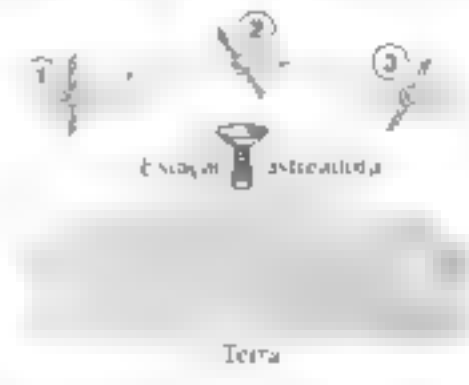


Figura 16.34 Variação do componente da velocidade do satélite ao longo da linha de visão de um satélite passando por uma estação rastreadora. A frequência do sinal recebido pela estação rastreadora varia de um valor maior para um valor menor à medida que ele passa sobre o local da estação.

elemento na Terra. Em uma estrela dupla, na qual duas estrelas giram em torno do centro de massa comum, a luz sofre um efeito Doppler e sua freqüência se desloca para valores mais elevados quando a estrela se aproxima de um observador na Terra e se desloca para freqüências mais baixas quando a estrela se afasta. Medidas dos desvios das freqüências revelam informações sobre as órbitas e sobre as massas das estrelas que compõem a estrela dupla.

A luz proveniente de muitas galáxias possui comprimento de onda deslocado para comprimentos de onda mais elevados ou para a extremidade vermelha do espectro visível, um efeito chamado de *desvio para o vermelho*. Esse desvio Doppler é geralmente interpretado como resultante do movimento das galáxias que se afastam da Terra. Entretanto, do ponto de vista da teoria da relatividade geral isso é algo ainda mais importante, relacionado à expansão do próprio espaço. As galáxias mais afastadas da Terra apresentam desvios para o vermelho mais elevados porque a luz proveniente dessas galáxias está se deslocando há muito tempo, e o comprimento de onda dessa luz se expandiu junto com o espaço através do qual ela se deslocou. Extrapolando essa expansão para cerca de 13,7 bilhões de anos atrás, chegamos ao momento do *big bang*. O *big bang* não foi apenas uma explosão no espaço, e sim a rápida expansão inicial do próprio espaço.

Teste sua compreensão da Seção 16.8 Você está em um concerto ao ar livre com o vento soprando a 10 m/s dos músicos até você. O som que você escuta sofre desvio pelo efeito Doppler? Em caso afirmativo, as freqüências que você escuta são menores ou maiores? ■

*16.9 Ondas de choque

Você provavelmente já ouviu um "estrondo sônico" provocado por um avião voando com velocidade maior do que a velocidade do som. Podemos entender qualitativamente por que isso ocorre examinando a Figura 16.35. Seja v_S o módulo da *velocidade* do avião em relação ao ar, de modo que ele é sempre positivo. O movimento do avião no ar produz som, quando v_S é menor do que a velocidade do som v, as ondas na parte frontal do avião são comprimidas com um comprimento de onda dado pela Equação (16.27):

$$\lambda_{frente} = \frac{v - v_S}{f_S}$$

À medida que a velocidade do avião v_S se aproxima da velocidade do som v, o comprimento de onda tende a zero e as cristas das ondas se agrupam (Figura 16.35a). O avião precisa exercer uma grande força para comprimir o ar que encontra pela frente, pela terceira lei de Newton, o ar exerce sobre o avião uma força igual e contrária igualmente grande. Assim, ocorre um grande aumento do arraste do ar (resistência do ar) à medida que a velocidade do avião se aproxima da velocidade do som, um fenômeno conhecido como 'barreira do som'

Quando o módulo de v_S é maior do que o módulo de v, a fonte do som se desloca com velocidade **supersônica**, e as Equações (16.27) e (16.29) do efeito Doppler não podem mais ser usadas para a velocidade do som na parte frontal da fonte. A Figura 16.35b mostra o que ocorre em uma seção reta. À medida que o avião se move, ele desloca o ar das vizinhanças e produz som. Diversas cristas de ondas são emitidas a partir do nariz do avião; cada crista se espalha ao longo de círculos cujos centros coincidem com a posição do avião no momento em que ele emite a *crista*. Depois de um tempo t, a crista emitida no ponto S_1 se espalhou circularmente até um raio vt, e o avião se deslocou uma distância maior $v_S t$, atingindo o ponto S_2. Você pode notar que existe interferência construtiva das ondas ao longo da reta envoltória que faz um ângulo α com a direção da velocidade do avião, produzindo uma crista de onda de amplitude muito grande ao longo dessa reta. Essa crista com amplitude grande denomina-se **onda de choque** (Figura 16.35c).

(a) Fonte sonora S (avião) movendo-se próximo à velocidade do som

As cristas das ondas se acumulam na frente da fonte

(b) Fonte sonora movendo-se mais rápido do que a velocidade do som

Onda de choque

(c) Onda de choque em torno de um avião supersônico

Figura 16.35 Cristas de onda em torno de uma fonte sonora S movendo-se (a) exatamente mais devagar do que a velocidade do som v e (b) mais rápido do que a velocidade do som v. (c) Foto de um avião a jato F-18 que se desloca a uma velocidade ligeiramente superior à velocidade do som. Ondas de choque distintas são produzidas pelo nariz, pelas asas e pela traseira do avião. As direções de seus raios variam por causa de se mover em torno do avião ar é acelerado e retardado, de modo que a velocidade relativa do avião em relação ao ar, v_S, é diferente em diferentes pontos.

Observando o triângulo retângulo mostrado na Figura 16.35b, podemos ver que o ângulo α é dado por

$$\text{sen } \alpha = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S} \quad \text{(onda de choque)} \qquad (16.31)$$

Na relação anterior, v_S é a *velocidade* da fonte (o módulo de sua velocidade) em relação ao ar, sendo sempre positiva. A razão v_S/v denomina-se **número de Mach**. Ele é maior do que um para todas as velocidades supersônicas, e o valor de sen α na Equação (16.31) é igual ao inverso do número de Mach. A primeira pessoa a quebrar a barreira do som foi o capitão Chuck Yeager, da força aérea dos Estados Unidos, pilotando o Bell X-1 com velocidade igual a 1,06 Mach, no dia 14 de outubro de 1947 (Figura 16.36).

Na verdade, as ondas de choque ocorrem em três dimensões, uma onda de choque forma um *cone* em torno da direção do movimento da fonte. Se a fonte (possivelmente um avião a jato supersônico ou a bala de um rifle) se move com velocidade constante, o ângulo α é constante, e a onda de choque se move acompanhando a fonte. É a chegada ao solo dessa onda de choque que produz o estrondo sônico que você ouve depois que um avião supersônico passa pela vertical acima do ponto onde você se encontra. Quanto maior for o avião, mais intenso será o estrondo sônico. A onda de choque produzida no solo pelo avião supersônico Concorde voando a uma altura de 12000 m produz um aumento repentino na pressão do ar de cerca de 20 Pa. Na parte dianteira do cone da onda de choque não existe nenhum som. No interior do cone, um ouvinte em repouso ouve o som com frequência deslocada pelo efeito Doppler do avião que se afasta.

ATENÇÃO **Ondas de choque** Enfatizamos que a onda de choque é produzida *continuamente* por qualquer objeto que se mova no ar com velocidade supersônica e não somente no instante em que ele 'quebra a barreira do som'. As ondas sonoras que se superpõem para formar a onda de choque, como na Figura 16.35b, são criadas pelo movimento do próprio objeto e não por qualquer fonte sonora que o objeto possa transportar. Os estampidos provocados por uma bala e pelo chicote em um circo decorrem do movimento supersônico desses objetos. Os motores de um avião a jato podem emitir sons muito intensos, porém esses sons não produzem ondas de choque. Na verdade um ônibus espacial produz um estrondo sônico muito intenso ao 'aterrissar' durante essa operação, seus motores são desligados, de modo que ele funciona como um planador supersônico.

Figura 16.36 O primeiro avião supersônico, Bell X-1, foi projetado com uma forma parecida com uma bala de calibre 0,50 — sabe-se que essa bala era capaz de se deslocar com velocidade supersônica.

As ondas de choque têm aplicações fora do âmbito da aviação. Elas são usadas para quebrar cálculos nos rins e na vesícula sem a necessidade de cirurgias invasivas, mediante o emprego de uma técnica que recebeu o extravagante nome de *litotripsia extracorpórea por ondas de choque*. Uma onda de choque produzida fora do corpo é focalizada por um refletor ou por uma lente acústica que faz com que ela incida o mais próximo possível do cálculo. Quando as tensões resultantes sobre o cálculo superarem seu limite de tensão de ruptura, ele se quebra em diversos fragmentos que podem ser eliminados. Essa técnica requer uma determinação precisa do local onde se encontra o cálculo, o que pode ser feito por meio de técnicas de imagem com ultra-som (veja a discussão a respeito das imagens de ultra-som na página 148).

Exemplo 16.12

ESTRONDO SÔNICO DO CONCORDE O Concorde está voando com Mach igual a 1,75 a uma altura de 8000 m, onde a velocidade do som é igual a 320 m/s. Quanto tempo depois de o avião passar verticalmente sobre sua cabeça você ouvirá o estrondo sônico?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a onda de choque forma um cone se afastando da parte traseira do avião, então o problema, na verdade, está perguntando quanto tempo transcorre desde o momento em que o avião passa sobre a sua cabeça até o momento em que o choque da onda chega até você.

PREPARAR: a Figura 16.37 mostra a situação no momento exato em que a onda de choque atinge você no ponto O. Um tempo t (a variável procurada) transcorreu desde que o avião passou bem em cima de sua cabeça, e durante esse tempo o avião, cuja velocidade é v, percorreu uma distância $v_S t$. Usamos trigonometria para calcular t.

EXECUTAR: pela Equação (16.31), o ângulo α é dado por

$$\alpha = \arcsen \frac{1}{1{,}75} = 34{,}8°$$

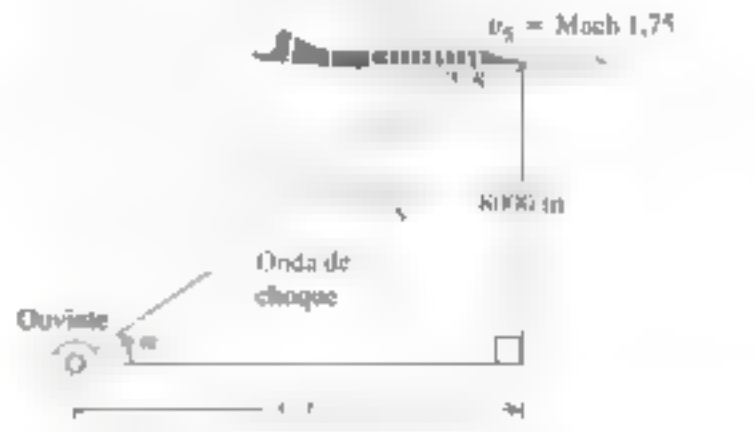


Figura 16.37 Você ouve o estrondo sônico quando a onda de choque atinge você no ponto O (e não no momento em que o avião quebra a barreira do som). Um ouvinte situado à direita do ponto O ainda não ouviu o estrondo sônico, porém o ouvirá logo a seguir; um ouvinte à esquerda do ponto O já ouviu o estrondo sônico e escutará o desvio de frequência produzido pelo efeito Doppler do som do avião.

A velocidade do avião é a velocidade do som multiplicada pelo número de Mach:

$$v_S = (1{,}75)(320\ \text{m/s}) = 560\ \text{m/s}$$

Pela Figura 16.37, temos

$$\tan\alpha = \frac{5000\ \text{m}}{v_S t}$$

$$t = \frac{5000\ \text{m}}{(560\ \text{m/s})(\tan 34{,}8^\circ)} = 20{,}5\ \text{s}$$

AVALIAR: você ouve o estrondo sônico 20,5 s depois que o Concorde passa verticalmente sobre sua cabeça, e nesse intervalo de tempo ele se deslocou (560 m/s) (20,5 s) = 11,5 km além do ponto situado verticalmente sobre sua cabeça.

Nos cálculos anteriores, consideramos a mesma velocidade do som em todas as altitudes, logo $\alpha = \arcsen v/v_S$ é constante, e a onda de choque forma um cone perfeito. Na verdade, a velocidade do som diminui com o aumento da altitude. Como você acha que isso afeta o resultado?

Teste sua compreensão da Seção 16.9 O que você ouviria se estivesse bem atrás (à esquerda) do avião supersônico da Figura 16.37? (i) um estrondo sônico; (ii) o som do avião, com desvio de Doppler nas frequências mais altas; (iii) o som do avião, com desvio de Doppler nas frequências baixas; (iv) nada. ❙

Resumo

Ondas sonoras O som é uma onda longitudinal que se propaga em um meio. Uma onda sonora senoidal é caracterizada por uma frequência f, um comprimento de onda λ (ou frequência angular ω e número de onda k) e uma amplitude A. A amplitude da pressão P_{max} é diretamente proporcional à amplitude do deslocamento, ao número de onda e ao módulo de compressão B do meio ondulatório. (Ver Exemplos 16.1 e 16.2.)

A velocidade da onda sonora em um fluido depende do módulo de compressão B e da densidade ρ. Se o fluido é um gás ideal, a velocidade pode ser expressa em função da temperatura T, da massa molar M e da razão das capacidades caloríficas γ do gás. A velocidade de ondas longitudinais em uma barra sólida depende da densidade e do módulo de Young Y. (Ver Exemplos 16.3-16.5.)

$$P_{max} = BkA \tag{16.5}$$

(onda sonora senoidal)

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{16.7}$$

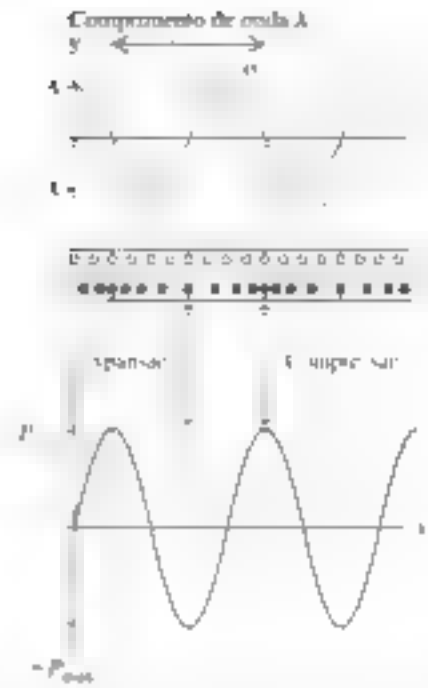
(onda longitudinal em um fluido)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{16.10}$$

(onda longitudinal em um gás)

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{16.8}$$

(onda longitudinal em uma barra sólida)



Intensidade e nível de intensidade sonora. A intensidade I de uma onda sonora é a taxa temporal média com a qual a energia é transferida pela onda, por unidade de área. Em uma onda senoidal, a intensidade pode ser expressa em função da amplitude A ou amplitude da pressão p_{max}. (Ver Exemplos 16.6-16.8.)

O nível da intensidade sonora β de uma onda sonora é a medida logarítmica de sua intensidade, medida em relação a I_0, uma intensidade arbitrária definida como igual a $10^{-12}\ \text{W/m}^2$. O nível da intensidade sonora é expresso em decibel (dB). (Ver Exemplos 16.9 e 16.10.)

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\mu B}\,\omega^2 A^2 = \frac{P_{max}^2}{2\sqrt{\mu B}} \tag{16.12, 16.14}$$

(intensidade de uma onda sonora senoidal)

$$\beta = (10\ \text{dB})\log\frac{I}{I_0} \tag{16.15}$$

(definição de nível de intensidade sonora)

Ondas sonoras estacionárias Ondas sonoras estacionárias podem percorrer um cano ou um tubo. Uma extremidade fechada é um nó de deslocamento e um ventre de pressão; uma extremidade aberta é um ventre de deslocamento e um nó de pressão. Em um tubo aberto nas duas extremidades, as frequências dos modos normais são múltiplos inteiros da velocidade do som divididos por $2L$. Em um tubo fechado em uma extremidade e aberto na outra, as frequências dos modos normais são múltiplos ímpares da velocidade do som divididas por $4L$. (Veja os exemplos 16.11 e 16.12).

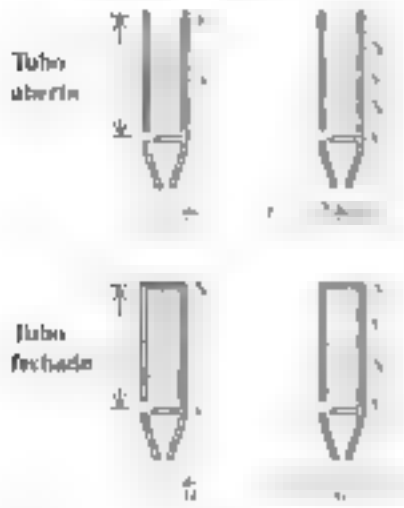
Um tubo ou outro sistema com frequências em modos normais pode ser estimulado a oscilar em qualquer frequência. Uma resposta máxima, ou ressonância, ocorre quando a frequência da força propulsora se aproxima de uma das frequências de modo normal do sistema. (Veja o exemplo 16.13.)

$$f_n = \frac{n\,[illegible]}{4L} \qquad (n = 1, 3, \ldots) \qquad (16.18)$$

(tubo aberto)

$$f_n = \frac{n\,[illegible]}{4L} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad (16.22)$$

(tubo fechado)

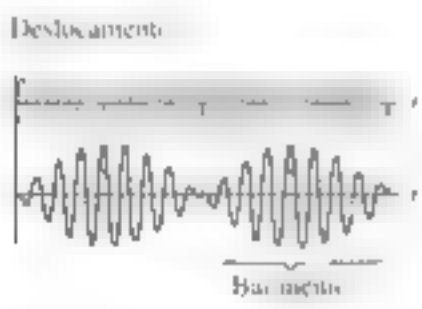


Interferência Quando duas ou mais ondas se superpõem na mesma região do espaço, os efeitos resultantes constituem o fenômeno da interferência. A amplitude resultante pode ser maior ou menor do que a amplitude da onda individual, dependendo das ondas estarem em fase (interferência construtiva) ou fora de fase (interferência destrutiva). (Ver Exemplo 16.14.)

Batimentos Ouvimos batimentos quando dois tons com frequências ligeiramente diferentes f_a e f_b são emitidos simultaneamente. A frequência dos batimentos f_{bat} é a diferença entre f_a e f_b.

$$f_{bat} = f_a - f_b \qquad (16.24)$$

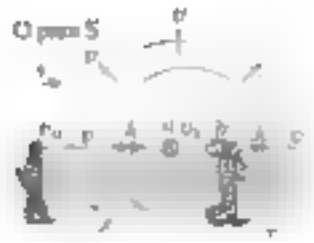
(frequência dos batimentos)



Efeito Doppler O efeito Doppler do som é o deslocamento da frequência que ocorre quando uma fonte sonora, um ouvinte ou ambos se movem em relação ao meio. A frequência da fonte f_s e a frequência do ouvinte f_O estão relacionadas à velocidade da fonte v_s e a velocidade do ouvinte v_O em relação a um meio e à velocidade do som v. (Ver Exemplos 16.15–16.19.)

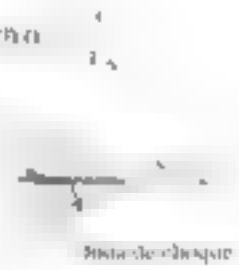
$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S \qquad (16.29)$$

(efeito Doppler, fonte em movimento e ouvinte em movimento)



Ondas de choque Uma fonte sonora que se move com velocidade v_s maior do que a velocidade do som v cria uma onda de choque. A frente da onda forma um cone de ângulo α. (Ver Exemplo 16.20.)

$$\operatorname{sen}\alpha = \qquad (16.31)$$



Principais termos

*número de Mach, 168
*onda de choque, 167
*supersônica, 167
altura, 144
amplitude da pressão, 142
amplitude de deslocamento, 141
batimentos, 161
curva de ressonância, 158
decibéis, 152
efeito Doppler, 163
frequência dos batimentos, 161
infra-som, 140
intensidade sonora, 144
intervalo audível, 140
nível da intensidade sonora, 151
nó de deslocamento, 153
nó de pressão, 154
ressonância, 157
ruído, 145
som, 140
timbre, 145
ultra-som, 140
ventre de deslocamento, 153
ventre de pressão, 154

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Tanto sons musicais quanto barulho são compostos por uma combinação de ondas sonoras senoidais. A diferença é que as frequências das ondas senoidais nos sons musicais são todas múltiplos inteiros de uma frequência fundamental, enquanto no barulho *todas* as frequências estão presentes.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

16.1 **Resposta: (vi).** Pela Equação (16.5), a amplitude de deslocamento é $A = P_{máx}/B\omega$. A amplitude da pressão e o módulo de compressão B não se alteram, mas a freqüência f aumenta de um fator igual a 4. Assim, o número de onda $k = \omega/v = 2\pi f/v$ também aumenta de um fator 4. Como A é inversamente proporcional a k, a amplitude de deslocamento se reduz a $\frac{1}{4}$. Em outras palavras, em freqüências mais altas, um menor deslocamento máximo é necessário para produzir a mesma flutuação máxima de pressão.

16.2 **Resposta: (i).** Pela Equação (16.7), a velocidade das ondas longitudinais (som) em um fluido é dada por $v = \sqrt{B/\rho}$. Podemos reagrupar essa expressão para obter uma expressão para o módulo de compressão B em função da densidade do fluido e da velocidade do som: $B = \rho v^2$. A 20 °C, a velocidade do som no mercúrio é ligeiramente menor do que na água (1451 m/s contra 1482 m/s), mas a densidade do mercúrio é maior do que a da água por um grande fator (13,6). Logo, o módulo de compressão do mercúrio é maior do que o da água por um fator de $(13{,}6)(1451)^2/(1482)^2 = 13{,}0$.

16.3 **Resposta: A e $P_{máx}$ aumentam de um fator igual a $\sqrt{2}$, B e v não se alteram, β aumenta em 3,0 dB.** As Equações (16.9) e (16.10) mostram que o módulo de compressão B e a velocidade do som v permanecem constantes porque as propriedades físicas do ar não se alteram. Pelas Equações (16.12) e (16.14), a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude do deslocamento, ou o quadrado da amplitude da pressão. Assim, dobrar a intensidade significa que tanto A quanto $P_{máx}$ aumentam de um fator igual a $\sqrt{2}$. O Exemplo 16.10 mostra que *multiplicar* a intensidade por um fator de $2(I/I_0 = 2)$ corresponde a *somar* (10 dB) $\log(I/I_0) = (10\text{ dB})\log 2 = 3{,}0$ dB ao nível de intensidade sonora.

16.4 **Resposta: (ii).** O hélio é menos denso e possui uma massa molar menor do que o ar, portanto o som se desloca mais rápido no hélio do que no ar. As freqüências de modo normal em um tubo são proporcionais à velocidade do som; logo, a freqüência e, portanto, a altura, elevam-se quando o ar no tubo é substituído pelo hélio.

16.5 **Resposta: (i) e (iv).** Haverá ressonância se 660 Hz for uma das freqüências de modo normal do tubo. Um tubo fechado de órgão possui freqüências de modo normal que são múltiplos ímpares de sua freqüência fundamental [ver Equação (16.22) e Figura 16.18]. Portanto, o tubo (i), que tem uma freqüência fundamental de 220 Hz, tem também uma freqüência de modo normal de $3(220) = 660$ Hz. O tubo (ii) possui o dobro do comprimento do tubo (i); pela Equação (16.20), a freqüência fundamental de um tubo fechado é inversamente proporcional ao comprimento, então o tubo (ii) tem uma freqüência fundamental de $(\frac{1}{2})(220\text{ Hz}) = 110$ Hz. As suas outras freqüências de modo normal são 330 Hz, 550 Hz, 770 Hz..., portanto um diapasão de 660 Hz não provocará ressonância. O tubo (iii) é aberto e do mesmo comprimento que o tubo (i), logo sua freqüência fundamental é o dobro da freqüência fundamental do tubo (i) [compare as Equações (16.16) e (16.20)], ou $2(220) = 440$ Hz. Suas outras freqüências de modo normal são múltiplos inteiros da freqüência fundamental [ver Equação (16.19)], ou 880 Hz, 1320 Hz,... Nenhuma delas é igual à frequência de 660 Hz do diapasão. O tubo (iv) também é aberto, mas possui o dobro do comprimento do tubo (iii) [ver Equação (16.18)], portanto suas freqüências de modo normal são a metade das freqüências do tubo (iii): 220 Hz, 440 Hz, 660 Hz,... Logo, o terceiro harmônico ressoará com o diapasão.

16.6 **Resposta: (iii).** Interferências construtivas e destrutivas entre duas ondas ocorrem apenas se as duas ondas possuem a mesma freqüência. Neste caso, as freqüências são diferentes, então não há pontos em que as duas ondas sempre reforcem uma à outra (interferência construtiva) ou sempre anulem uma à outra (interferência destrutiva).

16.7 **Resposta: (vi).** A freqüência de batimento é 3 Hz, portanto a diferença entre as freqüências dos dois diapasões também é 3 Hz. Assim, o segundo diapasão vibra em uma freqüência de 443 Hz ou de 437 Hz. Você pode verificar as duas possibilidades comparando as alturas dos dois diapasões quando eles soam juntos: a freqüência é 437 Hz se o segundo diapasão possuir uma altura menor, e de 443 Hz se possuir uma altura maior.

16.8 **Resposta: não.** O ar (o meio em que as ondas sonoras se propagam) está se movendo da fonte para o ouvinte. Assim, relativamente ao ar, tanto a fonte quanto o ouvinte estão se movendo no sentido do ouvinte para a fonte. Logo, ambas as velocidades são positivas e $v_S = v_O = +10$ m/s. O fato de essas duas velocidades serem iguais significa que o numerador e o denominador na Equação (16.29) são iguais e, assim, $f_L = f_S$: não há efeito Doppler.

16.9 **Resposta: (iii).** A Figura 16.37 mostra que não há ondas sonoras dentro do cone da onda de choque. Atrás do avião, as cristas de onda estão espalhadas, assim como atrás da fonte em movimento na Figura 16.27. Logo, as ondas que chegam até você possuem um comprimento de onda maior e uma freqüência menor.

Questões para discussão

Q16.1 Quando o som sai do ar e penetra na água, sua freqüência se altera? E sua velocidade? E seu comprimento de onda? Explique suas respostas.

Q16.2 O herói de um filme de aventuras escuta a aproximação de um trem colocando seu ouvido no trilho. Por que esse método funciona melhor para perceber a aproximação do trem?

Q16.3 A altura (ou freqüência) do tubo de um órgão aumenta ou diminui quando a temperatura aumenta? Explique.

Q16.4 Em muitos instrumentos de sopro modernos, a altura de um som pode ser mudada por meio de chaves ou válvulas que alteram o comprimento da coluna vibratória de ar. Contudo, um clarim não possui chaves nem válvulas, e ainda assim pode emitir muitas notas. Como isso é possível? Existe alguma restrição em relação aos tipos de notas emitidas por um clarim?

Q16.5 Os músicos que tocam instrumentos de sopro em uma orquestra sinfônica 'aquecem' seus instrumentos soprando-os antes da apresentação. Para que serve isso?

Q16.6 Em uma demonstração científica bastante popular e divertida, uma pessoa inala hélio e sua voz se torna aguda e estridente. Por que isso acontece? (*Atenção.* Inalar hélio demais pode levar à perda de consciência e até à morte.)

Q16.7 Em algumas estradas, as pistas são divididas por pequenas saliências ou ondulações espaçadas regularmente. Quando os pneus de um carro que se move passam sobre essas divisórias, pode ocorrer a produção de uma nota musical. Por quê? Mostre como esse fenômeno pode ser usado para medir a velocidade do carro.

Q16.8 A qualidade do tom de uma guitarra acústica quando a corda é puxada perto da ponte (a extremidade inferior da corda) é diferente do tom quando a corda é puxada nas proximidades do buraco (próximo do centro da corda). Por quê?

Q16.9 Qual dos dois fatores influi mais diretamente sobre a intensidade sonora de uma corda: sua amplitude de *deslocamento* ou sua amplitude da *pressão*? Explique sua resposta.

Q16.10 Quando a amplitude da pressão de uma onda sonora se reduz à metade do seu valor, qual é o fator de diminuição da intensidade sonora? Qual deve ser o fator de aumento da amplitude da pressão de uma onda sonora para que sua intensidade cresça de um fator igual a 16? Explique.

Q16.11 O nível de intensidade sonora β obedece à lei do inverso do quadrado? Por quê?

Q16.12 Uma pequena fração da energia de uma onda sonora é absorvida pelo ar através do qual a onda se propaga. Como esse efeito modifica a relação do inverso do quadrado entre a intensidade e a distância da fonte? Explique seu raciocínio.

Q16.13 Um fio sob tensão e vibrando em seu primeiro sobretom produz um som de comprimento de onda λ. Qual será o novo comprimento de onda do som (em termos de λ) se a tensão for dobrada?

Q16.14 Uma pequena tira de metal é introduzida em um dos dentes de um diapasão. À medida que essa tira é movida na direção da extremidade do dente, que efeito isso exerce sobre o comprimento de onda e a frequência do som que o dente produz? Por quê?

Q16.15 Um organista em uma catedral toca um acorde forte e a seguir solta as teclas. O som persiste durante alguns segundos e se extingue gradualmente. Por que ele persiste? O que ocorre com a energia sonora quando o som se extingue?

Q16.16 Dois diapasões vibram com frequências idênticas, porém um está fixo e o outro está montado na beirada de uma plataforma que gira. O que um ouvinte escutará? Explique.

Q16.17 Uma grande igreja possui parte de um órgão na frente e a outra parte no final da igreja. Uma pessoa andando rapidamente ao longo da reta que une as duas partes do órgão enquanto elas estão tocando simultaneamente afirma que as duas partes estão desafinadas entre si. Por quê?

Q16.18 Uma fonte sonora e um ouvinte estão em repouso sobre a Terra, porém um vento forte sopra no sentido da fonte para o ouvinte. Existe efeito Doppler? Justifique sua resposta.

Q16.19 Você é capaz de imaginar situações em que o efeito Doppler poderia ser observado em ondas que se propagam na superfície da água? E em ondas elásticas que se propagam em grandes profundidades? Em caso afirmativo, descreva as circunstâncias imaginadas e explique seu raciocínio. Em caso negativo, explique por que não.

Q16.20 Estrelas que não são o nosso Sol normalmente parecem inertes quando vistas com telescópios. Entretanto, os astrônomos podem facilmente usar a luz dessas estrelas para verificar que elas estão girando e até mesmo medir a velocidade de sua superfície. Como eles conseguem fazer isso?

Q16.21 Se você espera um trem se aproximar e passar em um cruzamento da ferrovia, você ouve o som do trem com um desvio Doppler. Mas se você escutar com atenção, ouvirá que a mudança na frequência é contínua: não existe uma súbita passagem de uma frequência elevada para uma frequência baixa. A frequência passa *suavemente* (mas rapidamente) de alta para baixa à medida que o trem passa. Por que ocorre essa variação suave?

Q16.22 No caso 1, uma fonte sonora se aproxima de um observador parado com velocidade v. No caso 2, o observador se move na direção da fonte estacionária com a mesma velocidade v. Se a fonte está sempre produzindo um som de mesma frequência, o observador escutará a mesma frequência em ambos os casos, já que a velocidade relativa é a mesma em ambas as vezes? Por que não?

*Q16.23 Um avião produz estrondo sônico apenas no instante em que sua velocidade supera o valor Mach 1? Explique seu raciocínio.

*Q16.24 Caso você esteja pilotando um avião supersônico, o que ouve? Explique seu raciocínio. Em particular, você ouve um estrondo sônico contínuo? Justifique sua resposta.

*Q16.25 Um avião a jato está voando a uma altitude constante com uma velocidade uniforme v_S maior do que a velocidade do som. Descreva o que está sendo ouvido por observadores situados nos pontos *A*, *B* e *C* no instante indicado na Figura 16.38, quando a onda de choque acabou de chegar ao ponto *B*. Explique seu raciocínio.

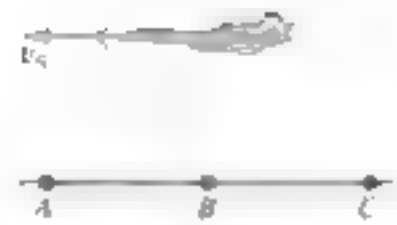


Figura 16.38 Questão 16.25

Exercícios

A menos que haja alguma indicação em contrário, suponha que a velocidade do som no ar possua módulo $v = 344$ m/s.

Seção 16.1 Ondas sonoras

16.1 O Exemplo 16.1 (Seção 16.1) mostrou que, em ondas sonoras deslocando-se no ar com frequência de 1000 Hz, uma amplitude de deslocamento igual a $1,2 \times 10^{-8}$ m produz uma amplitude de pressão igual a $3,0 \times 10^{-2}$ Pa. a) Qual é o comprimento de onda dessas ondas? b) Para uma onda de 1000 Hz no ar, qual é a amplitude de deslocamento necessária para que a amplitude da pressão esteja no limiar da dor, que corresponde a 30 Pa? c) Em qual comprimento de onda e frequência uma onda com amplitude de deslocamento igual a $1,2 \times 10^{-4}$ m produziria uma amplitude de pressão igual a $1,5 \times 10^{3}$ Pa?

16.2 O Exemplo 16.1 (Seção 16.1) mostrou que, em ondas sonoras deslocando-se no ar com frequência de 1000 Hz, uma amplitude de deslocamento igual a $1,2 \times 10^{-8}$ m produz uma amplitude de pressão igual a $3,0 \times 10^{-2}$ Pa. O módulo de compressão da água a 20 °C é $2,2 \times 10^{9}$ Pa, e a velocidade do som na água nessa temperatura é igual a 1480 m/s. Em ondas sonoras de 1000 Hz na água a 20 °C, que amplitude de deslocamento é produzida quando a amplitude da pressão é igual a $3,0 \times 10^{4}$ Pa? Explique por que sua resposta é um valor muito menor do que $1,2 \times 10^{-8}$ m.

16.3 Considere uma onda sonora no ar com amplitude de deslocamento igual a 0,0200 mm. Calcule a amplitude da pressão para as frequências: a) 150 Hz, b) 1500 Hz, c) 15000 Hz. Em cada caso, compare os resultados com a pressão do limiar da dor, que é igual a 30 Pa.

16.4 Uma máquina barulhenta em uma fábrica produz um som de amplitude de deslocamento igual a 1,0 μm, mas a frequência desse som pode ser ajustada. A fim de prevenir danos aos ouvidos dos trabalhadores, a amplitude de pressão máxima das ondas sonoras é limitada a 10,0 Pa. Nas condições dessa fábrica, o módulo de compressão do ar é $1,42 \times 10^{5}$ Pa. Qual é o som de frequência mais alta para o qual essa máquina pode ser ajustada sem exceder o limite recomendado? Essa frequência é audível para os trabalhadores?

Seção 16.2 Velocidade das ondas sonoras

16.5 a) Em um líquido com densidade igual a 1300 kg/m^3, propaga-se uma onda longitudinal com frequência igual a 400 Hz e comprimento de onda igual a 8,0 m. Calcule o módulo de compressão do líquido. b) Uma barra metálica com 1,50 m de comprimento possui densidade igual a 6400 kg/m^3. Uma onda sonora longitudinal leva um tempo de $3,90 \times 10^{-4}$ s para ir de uma extremidade até a outra da barra. Qual é o módulo de Young do metal?

16.6 Um grande terremoto com epicentro em Loma Prieta, na Califórnia, perto de São Francisco, ocorreu às 5 h 04 da tarde, hora local, no dia 17 de outubro de 1989 (em TUC, Tempo Universal

Coordenado, ocorreu à 0 h 4 min 15 s no dia 18 de outubro de 1989. As ondas sísmicas primárias (ondas *P*) de um terremoto são ondas longitudinais que se propagam na crosta terrestre. Ondas *P* desse terremoto foram detectadas em Caracas, na Venezuela, à 0 h 13 min 54 s, TUC,[1] em Kevo, na Finlândia, à 0 h 15 min 35 s, TUC e em Viena, Áustria, à 0 h 17 min 02 s, TUC. As distâncias percorridas pelas ondas *P* desde o epicentro em Loma Prieta foram de 6280 km até Caracas, 8698 km até Kevo e 9650 km até Viena. a) Use os tempos de chegada das ondas para calcular a velocidade média de propagação das ondas *P* até essas três cidades. Como você explica eventuais diferenças entre essas velocidades medias? b) A densidade média da crosta terrestre é igual a aproximadamente 3,3 g/cm³. Use esse valor para calcular o módulo de compressão da crosta terrestre ao longo da trajetória seguida pelas ondas *P* até elas atingirem cada uma das três cidades. Como suas respostas se comparam com os módulos de compressão listados na Tabela 11.1?

16.7 Um mergulhador transportando uma *scuba*, que contém ar comprimido para respiração, escuta um som proveniente da buzina de um barco que está diretamente sobre ele na superfície de um lago. No mesmo instante, um amigo que está nas margens do lago a uma distância de 22,0 m da buzina também ouve o som da buzina (Figura 16.39). A buzina está 1,2 m acima da superfície da água. Calcule a distância (indicada pelo "?" na Figura 16.39) entre a buzina e o mergulhador. A temperatura do ar e da água é de 20 °C.

Figura 16.39 Exercício 16.7

16.8 Para uma temperatura de 27 °C, qual é a velocidade de uma onda longitudinal a) no hidrogênio (massa molecular igual a 2,02 g/mol)?; b) no hélio (massa molecular igual a 4,0 g/mol)?; c) no argônio (massa molecular igual a 39,9 g/mol)? Encontre os valores de γ na Tabela 19.1. Compare as respostas dos itens (a), (b) e (c) com a velocidade do som no ar na mesma temperatura.

16.9 Um oscilador vibrando a 1250 Hz produz uma onda sonora que se desloca em um gás ideal a 325 m/s quando a temperatura do gás é 22 °C. Em um certo experimento, você precisa que o mesmo oscilador produza um som de comprimento de onda igual a 28,5 cm nesse gás. Qual deveria ser a temperatura do gás para obter esse comprimento de onda?

16.10 a) Mostre que a variação relativa na velocidade do som (dv/v) devido a uma pequena variação de temperatura dT é dada por $dv/v = \frac{1}{2}\,dT/T$. (*Sugestão*: Conecte com a Equação 16.10.) b) A velocidade do som no ar a 20 °C é 344 m/s. Use o resultado da parte (a) para encontrar a variação na velocidade do som devido a uma variação de 1,0 °C na temperatura do ar.

16.11 Um cabo de latão com 80,0 m de comprimento é golpeado em uma extremidade. Na outra extremidade, uma pessoa ouve dois sons vindos de duas ondas longitudinais, uma se deslocando no cabo metálico e a outra no ar. Qual é o intervalo de tempo entre os dois sons? A velocidade do som no ar é igual a 344 m/s; as informações relevantes sobre o latão podem ser encontradas nas Tabelas 11.1 e 14.1.

16.12 Qual é a diferença entre a velocidade de propagação de ondas longitudinais no ar a 27 °C e sua velocidade de propagação a –13 °C?

16.13 Qual deve ser a tensão (F/A) em um fio esticado de um material cujo módulo de Young é Y para que a velocidade de propagação de uma onda longitudinal seja 30 vezes maior do que a velocidade de propagação de uma onda transversal?

Seção 16.3 Intensidade do som

16.14 Use as informações da Tabela 16.2 para responder às questões seguintes sobre o som no ar. A 20 °C o módulo de compressão do ar é $1,42 \times 10^5$ Pa, e sua densidade é 1,20 kg/m³. Nessa temperatura, quais são a amplitude de pressão (em Pa e atm) e a amplitude de deslocamento (em m e nm) a) para o som mais suave que uma pessoa consegue ouvir normalmente a 1000 Hz e b) para o som de uma máquina de rebitar à mesma frequência? c) Quanta energia por segundo cada onda fornece a um quadrado de 5,0 mm de lado?

16.15 **Ondas longitudinais em diversos fluidos.** a) Uma onda longitudinal se propagando em um tubo cheio de água possui frequência igual a 3400 Hz e intensidade igual a $3,0 \times 10^{-6}$ W/m². Calcule a amplitude A e o comprimento de onda λ da onda. A densidade da água é 1000 kg/m³ e seu módulo de compressão é igual a $2,18 \times 10^9$ Pa. b) Se o tubo está cheio de ar sob pressão de $1,0 \times 10^5$ Pa e com densidade igual a 1,20 kg/m³, qual deve ser a amplitude A e o comprimento de onda λ de uma onda longitudinal com a mesma frequência e intensidade do item (a)? c) Em qual fluido a amplitude é maior, no ar ou na água? Qual é a razão entre as duas amplitudes? Por que essa razão é muito diferente de um?

16.16 Deduza a Equação (16.9) a partir das equações que a precedem.

16.17 Uma onda sonora no ar a 20 °C tem uma frequência igual a 150 Hz e uma amplitude de deslocamento igual a $5,0 \times 10^{-5}$ m (massa molecular). Para essa onda sonora, calcule: a) a amplitude da pressão (em Pa); b) a intensidade (em W/m²); c) o nível da intensidade sonora (em dB).

16.18 a) Qual é o nível da intensidade sonora no ouvido quando a intensidade do som é igual a 0,500 μW/m²? b) Qual é o nível da intensidade sonora nas proximidades de um bate-estacas quando a amplitude de pressão do som é de 0,150 Pa e a temperatura é igual a 20 °C?

16.19 Para uma pessoa com audição normal, o som mais fraco que pode ser ouvido a uma frequência de 400 Hz possui uma amplitude de pressão aproximadamente igual a $6,0 \times 10^{-5}$ Pa. Calcule a intensidade correspondente e o nível da intensidade sonora a 20 °C.

16.20 A intensidade devida a diversas fontes sonoras independentes é igual à soma das intensidades individuais. a) Quando quatro bebês choram simultaneamente com a mesma intensidade, em quantos decibéis o nível da intensidade sonora é maior do que o nível da intensidade quando apenas um bebê chora? b) Para aumentar novamente o nível da intensidade sonora no mesmo número de decibéis calculado no item (a), quantos bebês chorando são necessários?

16.21 A boca de um bebê está a 30 cm de distância do ouvido do pai e a 1,50 m de distância do ouvido da mãe. Qual é a diferença entre o nível da intensidade do som ouvido pelo pai e o nível da intensidade do som ouvido pela mãe?

16.22 A câmara da cidade de Sacramento aprovou recentemente uma lei para reduzir o nível de intensidade sonora permitido dos barulhentos aspiradores de folhas de seu nível atual, de 95 dB para 70 dB. Com a nova lei, qual é a razão entre a intensidade que é permitida agora e a intensidade permitida anteriormente?

16.23 a) De qual fator deve a intensidade do som ser aumentada para que o nível da intensidade sonora aumente em 13,0 dB? b) Explique por que você não precisa conhecer a intensidade do som original.

Seção 16.4 Ondas estacionárias e modos normais

16.24 A frequência fundamental de um tubo aberto em ambas as extremidades é 594 Hz. a) Qual é o comprimento desse tubo? Se

agora fechamos uma extremidade, calcule b) o comprimento de onda e c) a nova frequência fundamental.

16.25 Ondas sonoras estacionárias são produzidas em um tubo de comprimento igual a 1,70 m. Para o modo fundamental e os dois primeiros sobretons, determine a posição ao longo do tubo (medida a partir da extremidade esquerda) dos nós de deslocamento e dos nós de pressão supondo que a) o tubo possui as duas extremidades abertas, b) a extremidade esquerda do tubo está fechada e a extremidade direita do tubo está aberta.

16.26 Ache a frequência fundamental e a frequência de cada um dos três primeiros sobretons de um tubo de 45,0 cm de comprimento sabendo que a) o tubo possui as duas extremidades abertas, b) uma das extremidades do tubo está fechada. Use o valor $v = 344$ m/s. c) Em cada um dos casos anteriores, qual é o número de harmônicos superiores que podem ser ouvidos por uma pessoa capaz de ouvir frequências no intervalo de 20 Hz até 20000 Hz?

16.27 **A voz humana.** O trato vocal humano é um tubo cujo comprimento é igual a 17 cm e se estende desde os lábios até as cordas vocais situadas no meio da garganta. As cordas vocais são parecidas com as palhetas de uma clarineta e o trato vocal humano é um tubo fechado em uma das extremidades. Faça uma estimativa das três primeiras frequências das ondas estacionárias que se formam no tubo vocal. Use o valor $v = 344$ m/s. (A resposta é apenas uma estimativa porque a posição dos lábios e da língua altera o movimento do ar no tubo vocal.)

16.28 **O ouvido humano.** O canal auditivo humano (Figura 16.14) é cheio de ar. Uma extremidade é aberta, e a outra é fechada pelo tímpano. O canal auditivo de uma pessoa em particular mede 2,40 cm de extensão e pode ser considerado, de modo aproximado, um tubo. a) Quais são a frequência fundamental e o comprimento de onda do canal auditivo dessa pessoa? Esse som é audível? b) Calcule a frequência do harmônico mais alto *audível* do canal dessa pessoa. Que harmônico é esse?

16.29 Um certo tubo produz uma frequência fundamental de 262 Hz no ar. a) Se o tubo estiver cheio de hélio à mesma temperatura, qual é a frequência fundamental que ele produz? (A massa molar do ar é igual a 28,8 g/mol e a massa molar do hélio é igual a 4,0 g/mol.) b) Sua resposta do item (a) depende de o tubo ser aberto ou fechado? Justifique sua resposta.

16.30 **Cantando no chuveiro.** Um tubo fechado em ambas as extremidades pode ter ondas estacionárias dentro dele, só que você normalmente não as ouve porque muito pouco do som pode sair do tubo. Entretanto, você pode ouvir esse som se estiver *dentro* do tubo, como alguém cantando no chuveiro. a) Mostre que os comprimentos de onda das ondas estacionárias em um tubo de comprimento L fechado em ambas as extremidades são $\lambda_n = 2L/n$, e que as frequências são dadas por $f_n = nv/2L = nf_1$, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. b) Imaginando que essa pessoa tomando banho estivesse dentro de um tubo, encontre a frequência fundamental e a frequência dos dois primeiros sobretons de um chuveiro a 2,50 m de altura. Essas frequências são audíveis?

Seção 16.5 Ressonância e som

16.31 Você sopra na extremidade aberta de um tubo de ensaio e produz uma onda sonora estacionária fundamental na coluna de ar do interior do tubo. A velocidade do som no ar é igual a 344 m/s, e o tubo de ensaio funciona como um tubo fechado. a) Sabendo que o comprimento da coluna de ar no tubo de ensaio é igual a 14,0 cm, qual é a frequência dessa onda estacionária? b) Qual seria a frequência da onda estacionária supondo que o tubo de ensaio esteja completamente cheio de água?

16.32 Você aproxima um tubo fechado de comprimento ajustável de um fio esticado de 85,0 cm de comprimento e de massa igual a 7,25 g sob uma tensão de 4110 N. Você quer ajustar o comprimento do tubo de modo que, quando ele produzir som em sua frequência fundamental, esse som faça o fio vibrar em seu segundo *sobretom* com uma amplitude bastante grande. Que comprimento deve ter o tubo?

Seção 16.6 Interferência de ondas

16.33 Dois alto-falantes, A e B (Figura 16.40), são alimentados por um mesmo amplificador e emitem ondas senoidais em fase. O alto-falante B está a uma distância de 2,0 m à direita do alto-falante A. A velocidade do som no ar é igual a 344 m/s. Considere um ponto Q ao longo da extensão da linha reta que une os dois alto-falantes, situado a uma distância de 1,0 m à direita do alto-falante B. Os dois alto-falantes emitem ondas sonoras que se propagam diretamente dos alto-falantes até o ponto Q. a) Qual é a *menor* frequência capaz de produzir interferência *construtiva* no ponto Q? b) Qual é a menor frequência capaz de produzir interferência *destrutiva* no ponto Q?

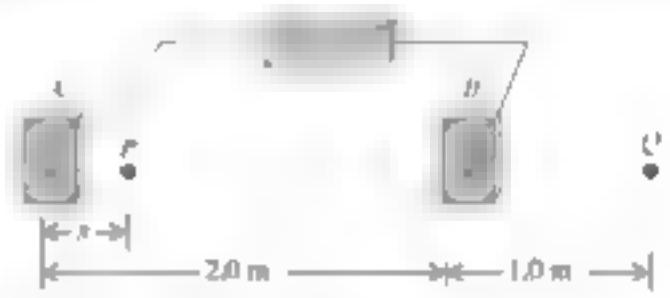


Figura 16.40 Exercícios 16.33 e 16.34

16.34 Dois alto-falantes, A e B (Figura 16.40), são alimentados por um mesmo amplificador e emitem ondas senoidais em fase. O alto-falante B está a uma distância de 2,0 m à direita do alto-falante A. Os dois alto-falantes emitem ondas sonoras com uma frequência igual a 206 Hz e a velocidade do som no ar é igual a 344 m/s. Considere um ponto P ao longo da linha reta que une os dois alto-falantes e situado entre os alto-falantes a uma distância x à direita do alto-falante A. Os dois alto-falantes emitem ondas sonoras que se propagam diretamente dos alto-falantes até o ponto P. a) Quais são os valores de x em que ocorre interferência *destrutiva* no ponto P? b) Quais são os valores de x em que ocorre interferência *construtiva* no ponto P? c) Os efeitos de interferência como aqueles que você encontrou nos itens (a) e (b) quase nunca são ouvidos no equipamento de som estereofônico de uma casa. Por quê?

16.35 Dois alto-falantes, A e B, são alimentados por um mesmo amplificador e emitem ondas senoidais em fase. O alto-falante B está a uma distância de 12,0 m à direita do alto-falante A. A frequência das ondas emitidas por cada um dos alto-falantes é 686 Hz. Você está em pé entre os dois alto-falantes, sobre a linha reta que os une, em um ponto onde há interferência construtiva. A que distância você precisa andar na direção do alto-falante B para atingir um ponto de interferência destrutiva?

16.36 Dois alto-falantes, A e B, são alimentados por um mesmo amplificador e emitem ondas senoidais em fase. A frequência das ondas emitidas por cada um dos alto-falantes é 172 Hz. Você está a 8,0 m do alto-falante A. Qual é a menor distância de B em que você deve ficar para estar em um ponto de interferência destrutiva?

16.37 Dois alto-falantes, A e B, são alimentados por um mesmo amplificador e emitem ondas senoidais em fase. A frequência das ondas emitidas por cada um dos alto-falantes é 860 Hz. O ponto P está a 12,0 m do alto-falante A e a 13,4 m do alto-falante B. A interferência em P é construtiva ou destrutiva? Justifique a sua resposta.

Seção 16.7 Batimentos

16.38 Dois violonistas tentam tocar a mesma nota de comprimento de onda igual a 6,50 cm ao mesmo tempo, mas um dos instrumentos está levemente desafinado e toca uma nota de comprimento de onda igual a 6,52 cm. Qual é a frequência do batimento que esses músicos ouvem quando tocam juntos?

16.39 Dois tubos de órgão, abertos em uma extremidade e fechados em outra, medem cada um 1,14 m de comprimento. Um desses tubos é encompridado em 2,0 cm. Calcule a frequência do batimento que eles produzem quando tocam juntos em sua frequência fundamental.

16.40 Duas cordas idênticas sob a mesma tensão F possuem uma frequência fundamental igual a f_0. A seguir, a tensão em uma delas é aumentada em um valor bastante pequeno ΔF. a) Se elas são tocadas ao mesmo tempo em sua frequência fundamental, mostre que a frequência do batimento produzido é $f_{bat} = f_0(\Delta F/2F)$. b) Duas cordas de violino idênticas, quando estão em ressonância e esticadas com a mesma tensão, possuem uma frequência fundamental igual a 440,0 Hz. Uma das cordas é afinada novamente, tendo sua tensão aumentada. Quando isso é feito, ouvem-se 1,5 batimento por segundo quando as duas cordas são puxadas simultaneamente em seus centros. Em que porcentagem variou a tensão na corda?

Seção 16.8 O efeito Doppler

16.41 No planeta Arrakis, um pássaro macho voa no sentido da fêmea com velocidade de 25,0 m/s enquanto canta com uma frequência de 1200 Hz. A fêmea está em repouso e ouve um tom com frequência de 1240 Hz. Qual é a velocidade do som na atmosfera do planeta Arrakis?

16.42 No Exemplo 16.19 (Seção 16.8), suponha que o carro de polícia se afaste do armazém a 20 m/s. Qual é a frequência do som refletido pelo armazém que é ouvido pelo motorista do carro de polícia?

16.43 Dois trens, A e B, apitam simultaneamente com a mesma frequência de 392 Hz. O trem A está em repouso e o trem B se desloca para a direita (se afastando de A) com velocidade igual a 35,0 m/s. Um ouvinte está entre os dois apitos e se desloca para a direita com velocidade de 15,0 m/s (Figura 16.41). Não existe vento. a) Qual é a frequência que o ouvinte escuta do apito de A? b) Qual é a frequência que ele escuta de B? c) Qual é a frequência dos batimentos que o ouvinte escuta?

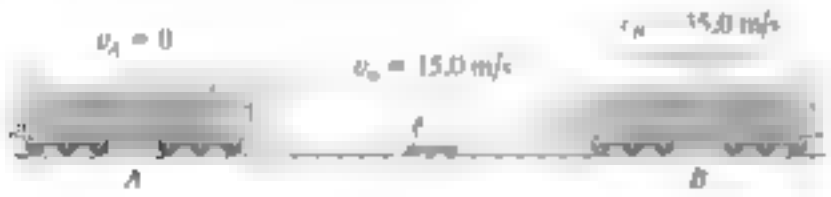


Figura 16.41 Exercício 16.43

16.44 Um trem se desloca com velocidade de 25,0 m/s com o ar calmo. A frequência da nota emitida pelo apito da locomotiva é igual a 400 Hz. Qual é o comprimento de onda das ondas sonoras a) na parte frontal da locomotiva? b) atrás da locomotiva? Qual é a frequência do som que um ouvinte em repouso escuta quando ele está c) na frente da locomotiva? d) atrás da locomotiva?

16.45 Um pato nadando agita os pés uma vez a cada 1,6 s, produzindo ondas superficiais com esse período. O pato está se movendo com velocidade constante em um lago no qual a velocidade das ondas superficiais é 0,32 m/s, e a distância entre as cristas das ondas em frente ao pato é 0,12 m. a) Qual é a velocidade do pato? b) Qual é a distância entre as cristas das ondas atrás do pato?

16.46 **Fonte em movimento x ouvinte em movimento.** a) Uma fonte sonora que produz ondas de 1,0 kHz se desloca na direção de um ouvinte estacionário em uma velocidade igual à metade da velocidade do som. Que frequência o ouvinte escutará? b) Suponha que, em vez disso, a fonte esteja parada e o ouvinte esteja se movendo na direção da fonte com uma velocidade igual à metade da velocidade do som. Que frequência o ouvinte escutará? Como a sua resposta se compara à do item (a)? Explique fisicamente por que as duas respostas diferem.

16.47 O alarme de um carro está emitindo ondas sonoras de frequência igual a 520 Hz. Você está dirigindo uma motocicleta, afastando-se em linha reta do carro. Com que velocidade você está andando se escuta uma frequência de 490 Hz?

16.48 Um trem se desloca com velocidade igual a 30,0 m/s e o ar está calmo. A frequência da nota do apito do trem é igual a 262 Hz. Qual é a frequência ouvida por um passageiro no interior de um trem que se move em sentido contrário ao do primeiro trem a 18,0 m/s, supondo que: a) os trens se aproximam?; b) os trens se afastam?

16.49 **Radar Doppler.** Uma tempestade fortíssima está se aproximando da estação meteorológica a 20,1 m/s. Se a estação enviar um sinal de radar de frequência 200,0 MHz na direção da tempestade, qual é a diferença de frequência entre o raio emitido e o raio refletido de volta pela tempestade? Tenha o cuidado de acrescentar um número de casas decimais suficiente! (*Sugestão*: a tempestade reflete a mesma frequência que recebe.)

16.50 **Planetas fora do sistema solar.** Em um futuro não tão distante, será possível detectar a presença de planetas se movendo ao redor de outras estrelas medindo o desvio Doppler na luz infravermelha que elas emitem. Se um planeta está orbitando ao redor de sua estrela a 90,0 km/s e emitindo luz infravermelha de frequência $3,330 \times 10^{14}$ Hz, que frequência será recebida desse planeta quando ele se afasta em linha reta de nós? (*Nota*: Luz infravermelha é uma luz com comprimentos de onda maiores do que os da luz visível.)

16.51 Com que velocidade (em termos de porcentagem da velocidade da luz) uma estrela teria de se mover para que a frequência da luz que recebemos dela fosse 10,0% maior do que a frequência da luz que ela emite? Ela estaria se afastando ou se aproximando de nós? (Suponha que a estrela esteja se afastando ou se aproximando em linha reta.)

*Seção 16.9 Ondas de choque

*16.52 O cone das ondas de choque criado pelo ônibus espacial em um instante durante a sua reentrada na atmosfera forma um ângulo de 58° com a direção de seu movimento. A velocidade do som nessa altitude é 331 m/s. a) Qual é o número de Mach do ônibus espacial nesse instante, e b) com que velocidade (em m/s) ela está se deslocando em relação à atmosfera? c) Qual seria o seu número de Mach e o ângulo do cone das ondas de choque se ela viajasse na mesma velocidade, mas em altitudes baixas, onde a velocidade do som é 344 m/s?

*16.53 Um avião a jato voa passando verticalmente sobre sua cabeça com Mach 1,70 e permanece a uma altura constante de 950 m. a) Qual é o ângulo α do cone das ondas de choque? b) Quanto tempo depois de o avião passar sobre a vertical acima da sua cabeça você ouvirá o estrondo sônico? Despreze a variação da velocidade do som com a altura.

Problemas

16.54 a) **Defenda a seguinte afirmação:** "Em cada onda sonora senoidal, a variação da pressão dada pela Equação (16.4) atinge o valor máximo quando o deslocamento dado pela Equação (16.1) é igual a zero." b) Para uma onda sonora senoidal dada pela Equação (16.1), com amplitude $A = 10,0\ \mu m$ e comprimento de onda $\lambda = 0,250$ m, faça um gráfico do deslocamento y e da flutuação de

pressão p em função de x para $t = 0$. Mostre pelo menos dois comprimentos de onda em seus gráficos. c) O deslocamento y em uma onda sonora *não* senoidal é mostrado na Figura 16.42 em função de x para $t = 0$. Faça um gráfico mostrando a flutuação de pressão p desta onda em função de x para $t = 0$. Essa onda sonora possui a mesma amplitude de 10,0 μm da onda do item (b). Ela possui a mesma amplitude de pressão? Justifique sua resposta. d) A afirmação do item (a) é necessariamente verdadeira quando a onda sonora *não* for senoidal? Explique seu raciocínio.

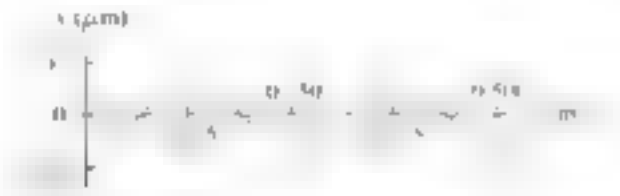


Figura 16.42 Problema 16.54

16.55 Uma soprano e um baixo estão cantando um dueto. Enquanto a soprano canta um lá sustenido a 932 Hz, o baixo canta um lá sustenido, porém três oitavas mais baixo. Nessa sala de concertos, a densidade do ar é 1,20 kg/m^3 e o módulo de compressão é $1{,}42 \times 10^5$ Pa. Para que suas notas tenham o mesmo nível de intensidade sonora, qual deve ser a) a razão entre a amplitude de pressão do baixo e a amplitude de pressão da soprano, e b) a razão da amplitude de deslocamento do baixo e a amplitude de deslocamento da soprano? c) Que amplitude de deslocamento (em m e em cm) a soprano produz ao cantar seu lá sustenido com 72,0 dB?

16.56 O som de um trompete se propaga uniformemente no ar, em todas as direções, a 20 °C. A uma distância de 5,0 m do trompete o nível da intensidade sonora é 52,0 dB. A frequência é 587 Hz. a) Qual é a amplitude da pressão a essa distância? b) Qual é a amplitude do deslocamento? c) A que distância o nível da intensidade sonora é igual a 30,0 dB?

16.57 **Um termômetro.** Suponha que você tenha um tubo de comprimento L contendo um gás cuja temperatura você deseja medir sem entrar no tubo. Uma das extremidades é fechada, e a outra é aberta, mas um pequeno alto-falante produzindo um som de frequência variável está nessa extremidade. Você aumenta gradualmente a frequência do alto-falante até que o som do tubo fique bastante intenso. Aumentando ainda mais a frequência, a intensidade sonora diminui, depois aumenta outra vez quando atinge frequências ainda mais altas. Chame de f_0 a frequência mais baixa em que a intensidade sonora é máxima. Mostre que a temperatura absoluta desse gás é dada por $T = 16ML^2f_0^2/\gamma R$, onde M é a massa molar do gás, γ é a razão das capacidades caloríficas e R é a constante universal dos gases. b) Em que frequência acima de f_0 o som do tubo atingirá sua máxima intensidade sonora? c) Como é possível calcular a velocidade do som nesse tubo à temperatura T?

16.58 Uma barra de ferro de 65 N é sustentada horizontalmente por dois fios idênticos, A e B (Figura 16.43). Um pequeno cubo de chumbo de 185 N é colocado a $\frac{1}{3}$ do caminho entre A e B. Os fios medem cada um 75,0 cm de comprimento e possuem uma massa de 5,50 g. Se ambos os fios são puxados simultaneamente em seu centro, qual é a frequência dos batimentos que eles produzirão ao vibrar em sua frequência fundamental?

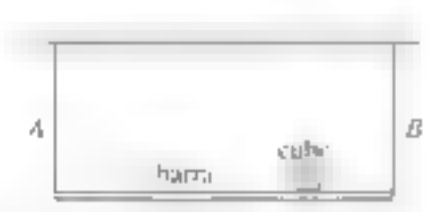


Figura 16.43 Problema 16.58

16.59 Uma pessoa está tocando uma pequena flauta de 10,75 cm de comprimento, aberta em uma das extremidades e fechada na outra, perto de uma corda esticada que possui uma frequência fundamental de 600,0 Hz. Se a velocidade do som for 344 m/s, com que harmônicos da flauta a corda ressoará? Em cada caso, que harmônico da corda está em ressonância?

16.60 **Um novo instrumento musical.** Você projetou um novo instrumento musical bastante simples, formado por uma lata metálica de comprimento L e diâmetro $L/10$. Uma corda de massa por unidade de comprimento μ é esticada de um lado ao outro do bocal aberto do tubo. A outra extremidade do tubo é fechada. Para produzir o efeito musical que deseja, você quer que a frequência da onda estacionária do terceiro harmônico na corda seja igual à frequência fundamental das ondas sonoras na coluna de ar do tubo. A velocidade das ondas sonoras nessa coluna de ar é v_s. a) Qual deve ser a tensão na corda para produzir o efeito desejado? b) O que acontece com o som produzido pelo instrumento se a tensão mudar para duas vezes o valor calculado no item (a)? c) Para a tensão calculada no item (a), que outros harmônicos da corda, se houver algum, estão em ressonância com as ondas estacionárias na coluna de ar?

16.61 Um tubo de um órgão possui dois harmônicos sucessivos com frequências iguais a 1372 Hz e 1764 Hz. a) Esse tubo é aberto ou fechado? Explique. b) Que harmônicos são esses? c) Qual é o comprimento do tubo?

16.62 **Ondas estacionárias longitudinais em um sólido.** Podemos produzir ondas estacionárias longitudinais em uma barra sólida segurando-a entre os dedos de uma mão e golpeando-a com a outra mão. A barra oscila formando ventres nas duas extremidades. a) Por que as extremidades são ventres e não nós? b) A frequência fundamental pode ser obtida golpeando-se a barra quando ela é mantida fixa no seu centro. Explique a razão pela qual este é o *único* local para se fixar a barra de modo a se obter o harmônico fundamental. c) Calcule a frequência fundamental de uma barra de aço com 1,50 m de comprimento (ver a Tabela 16.1). d) Qual é a próxima frequência possível da onda estacionária dessa barra? Onde a barra deve ficar presa para excitar uma onda estacionária com essa frequência?

16.63 a) Determine as frequências dos três primeiros modos normais de um tubo de comprimento L fechado em *ambas* as extremidades. Explique seu raciocínio. b) Use o resultado do item (a) para fazer uma estimativa das frequências normais do box de um banheiro. Explique a conexão entre essas frequências e a observação de que quando você está cantando no banheiro os sons produzidos provavelmente soam melhor, especialmente quando você está cantando com certas frequências.

16.64 Um tipo de aço possui densidade igual a $7{,}8 \times 10^3$ kg/m^3, e uma tensão de ruptura igual a $7{,}0 \times 10^8$ N/m^2. Uma corda cilíndrica de uma guitarra deve ser fabricada usando-se 4,0 g desse aço. a) Qual deve ser o comprimento e o raio da corda mais grossa e da corda mais fina para suportar uma tensão de 900 N sem se romper? Qual é a frequência fundamental mais elevada que essa corda pode ter?

16.65 Um tubo longo contém ar sob pressão de 1,0 atm à temperatura de 77 °C. Uma das extremidades do tubo é aberta, enquanto a outra extremidade está fechada por um pistão móvel. Um diapasão nas vizinhanças da extremidade aberta vibra com uma frequência igual a 500 Hz. Ocorre ressonância quando a distância entre o pistão e a extremidade aberta do tubo é igual a 18,0 cm, 55,5 cm e 93,0 cm. a) Com esses dados, qual é a velocidade do som no ar a 77 °C? b) Pelo resultado do item (a), qual é o valor de γ? c) Esses dados mostram que o nó de deslocamento está situado ligeiramente fora da extremidade aberta do tubo. A que distância dessa extremidade ele se encontra?

16.66 **Audição humana.** O canal auditivo humano (Figura 16.4) possui uma extensão de 2,5 cm e está compreendido entre o ouvido externo e o tímpano. a) Explique por que o ouvido humano é especialmente sensível a sons com freqüências em torno de 3500 Hz. Use $v = 344$ m/s. b) Você acha que o ouvido é especialmente sensível a sons com freqüências em torno de 7000 Hz? E a freqüências em torno de 10500 Hz? Justifique suas respostas.

16.67 Um fio de platina (densidade igual a 21,4 g/cm^3) tem 225 μm de diâmetro e 0,450 m de comprimento. Uma das extremidades do fio está presa ao teto, e na outra extremidade amarramos um corpo de massa igual a 420 g, de modo que o fio fica em equilíbrio na vertical sob tensão. Quando um diapasão vibra com uma determinada freqüência nas suas proximidades, o fio também começa a vibrar com a mesma freqüência. a) Quais são as possíveis freqüências do diapasão para que esse fenômeno ocorra? Suponha que a extremidade inferior do fio (à qual a massa está presa) esteja fixa e que a tensão no fio seja essencialmente constante ao longo do seu comprimento. b) Justifique as hipóteses feitas no item (a).

16.68 A freqüência da nota F_4 é 349 Hz. a) Se um tubo de um órgão está aberto em uma extremidade e fechado na outra, qual deve ser o comprimento no modo fundamental para produzir essa nota a 20 °C? b) Qual seria a temperatura do ar para que a freqüência fosse de 370 Hz, correspondendo a um aumento da altura de F para F$^\#$ (de fá para fá sustenido)? (Despreze a variação do comprimento do tubo produzida pela variação da temperatura.)

16.69 Uma onda estacionária com freqüência igual a 1100 Hz em uma coluna cheia de metano (CH_4) a 20 °C possui dois nós consecutivos separados por uma distância de 0,200 m. Qual é a razão das capacidades caloríficas γ para o metano? (A massa molar do metano é igual a 16,0 g/mol.)

16.70 Dois alto-falantes idênticos *A* e *B* estão separados por uma distância de 2,0 m. Os alto-falantes são alimentados por um mesmo amplificador e produzem ondas sonoras com freqüência igual a 784 Hz. Considere a velocidade do som no ar igual a 344 m/s. Um pequeno microfone se afasta do ponto *B* ao longo da direção da perpendicular à reta que une o ponto *B* com o ponto *A* (reta *BC* indicada na Figura 16.44). a) A que distâncias do ponto *B* haverá interferência *destrutiva*? b) A que distâncias do ponto *B* haverá interferência *construtiva*? c) Quando a freqüência é suficientemente baixa, não existe nenhum ponto da reta *BC* com interferência destrutiva. Quão baixa deve ser a freqüência para que isso ocorra?

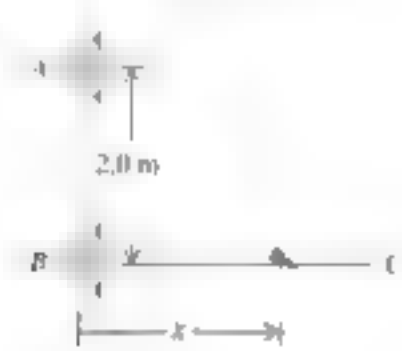


Figura 16.44 Problema 16.70

16.71 **Ópera wagneriana.** Um homem se casa com uma célebre soprano wagneriana. Infelizmente, ele descobre que não suporta óperas de Wagner. Para poupar seus tímpanos, o homem desafortunado decide silenciar a esposa para sempre. Seu plano é amarrá-la na frente de seu carro e enviar carro e soprano a toda velocidade contra uma parede de tijolos. A soprano, contudo, é bastante astuta, e estudou física em seus dias de aluna do conservatório de música. Ela percebe que a parede possui uma freqüência de ressonância de 600 Hz, o que significa que, se uma onda sonora contínua com essa freqüência atingir a parede, ela ruirá, e a soprano estará a salvo para continuar cantando a Isolda. O carro está se deslocando no sentido da parede à alta velocidade de 30 m/s. a) Em que freqüência a soprano precisa cantar para que a parede desmorone? b) Que freqüência a soprano ouvirá refletida pela parede logo antes que esta desmorone?

16.72 Um morcego voa na direção de uma parede, emitindo um som constante de frequência igual a 2,0 kHz. O morcego ouve o seu próprio som e também o som refletido pela parede. Com que velocidade ele deve voar para escutar uma freqüência de batimento igual a 10,0 Hz?

16.73 Uma pequena esfera de raio *R* foi projetada para oscilar de tal modo que seu raio varie com MHS entre um valor mínimo $R - \Delta R$ e um valor máximo $R + \Delta R$ com freqüência *f*. Essa oscilação produz ondas sonoras no ar circundante com densidade ρ e módulo de compressão *B*. a) Ache a intensidade das ondas sonoras na superfície da esfera (a amplitude da oscilação da esfera é a mesma que a do ar que está em contato com a superfície da esfera). b) Ache a potência acústica total irradiada pela esfera. c) A uma distância $d \gg R$ do centro da esfera, calcule a amplitude, a amplitude da pressão e a intensidade da onda sonora.

16.74 **Medicina com ultra-som.** Uma onda sonora de 2,0 MHz se propaga ao longo do ventre de uma mulher grávida, sendo refletida pela parede do coração do feto. A parede do coração se move no sentido do receptor do som quando o coração bate. O som refletido é a seguir misturado com o som transmitido, e 85 batimentos por segundo são detectados. A velocidade do som nos tecidos do corpo é 1900 m/s. Calcule a velocidade da parede do coração do feto no instante em que essa medida é realizada.

16.75 A fonte sonora do sistema de sonar de um navio opera com uma freqüência igual a 22,0 kHz. A velocidade do som na água (supostamente uniforme a 20 °C) é igual a 1482 m/s. a) Qual é o comprimento de onda das ondas emitidas pela fonte? b) Qual é a diferença entre a freqüência das ondas irradiadas diretamente e a freqüência das ondas refletidas por uma baleia que se aproxima do navio em linha reta com velocidade de 4,95 m/s? O navio está em repouso na água.

16.76 Uma sirene de polícia com freqüência f_0 está fixa em uma plataforma em vibração. A plataforma e a sirene oscilam para cima e para baixo com movimento harmônico simples de amplitude A_p e freqüência f_p. a) Calcule a freqüência máxima e a freqüência mínima do som que você ouve em um ponto diretamente acima da sirene. b) Em que ponto do movimento da plataforma a freqüência máxima é ouvida? E a freqüência mínima? Explique.

16.77 Morcegos-ferradura (do gênero *Rhinolophus*) emitem sons através de suas narinas e depois escutam a freqüência do som refletido pela sua presa para determinar a velocidade dela. (O termo "ferradura" dado a esse morcego decorre de uma reentrância em forma de ferradura existente em torno de suas narinas que desempenha o papel de um espelho que focaliza o som, de modo que o morcego emite um feixe muito estreito de ondas sonoras semelhante ao feixe luminoso de uma lanterna.) Um *Rhinolophus* se deslocando com uma velocidade v_{mor} emite um som com freqüência f_{mor}, ele ouve o som refletido por um inseto que se aproxima dele com uma freqüência mais elevada igual a f_{ref}. a) Mostre que a velocidade do inseto é dada por

$$v_{inseto} = v\left[\frac{f_{ref}(v - v_{mor}) - f_{mor}(v + v_{mor})}{f_{ref}(v - v_{mor}) + f_{mor}(v + v_{mor})}\right]$$

onde v é a velocidade do som. b) Se $f_{mor} = 80,7$ kHz, $f_{ref} = 83,5$ kHz e $v_{mor} = 5,9$ m/s, calcule a velocidade do inseto.

16.78 a) Mostre que a Equação (16.30) pode ser escrita na forma

$$f_R = f_S\left(1 - \frac{v}{c}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-1/2}$$

b) Use a série binomial para mostrar que quando $v << c$, esse resultado é aproximadamente igual a

$$f_R = f_S\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

c) Um avião de reconhecimento sem piloto emite um sinal de rádio com freqüência igual a 243 MHz. Ele está voando em linha reta rumo ao engenheiro que está no solo. O engenheiro detecta batimentos entre o sinal recebido e o sinal local cuja freqüência é também igual a 243 MHz. A frequencia dos batimentos é igual a 46,0 Hz. Qual é a velocidade do avião? (As ondas de rádio se deslocam com velocidade igual à velocidade da luz, $c = 3{,}0 \times 10^8$ m/s.)

16.79 **Supernova!** A nuvem de gás conhecida como Nebulosa do Caranguejo pode ser observada até mesmo com um pequeno telescópio. Ela é formada pelos resíduos de uma *supernova*, uma estrela que explode violentamente. A explosão foi vista na Terra no dia 4 de julho de 1054. O brilho emitido pela Nebulosa tem a característica cor vermelha do gás hidrogênio aquecido. Em um laboratório na Terra, o hidrogênio aquecido produz uma luz vermelha com freqüência igual a $4{,}568 \times 10^{14}$ Hz; a luz vermelha detectada na periferia da Nebulosa do Caranguejo chegou à Terra com uma freqüência igual a $4{,}586 \times 10^{14}$ Hz. a) Estime a velocidade da expansão da periferia da Nebulosa do Caranguejo. Suponha que a velocidade do centro da nebulosa em relação à Terra seja desprezível. (Você pode usar as fórmulas deduzidas no Problema 16.78. A velocidade da luz é $c = 3{,}0 \times 10^8$ m/s.) b) Supondo que a velocidade da expansão tenha permanecido constante desde o instante em que ocorreu a explosão, estime o diâmetro da Nebulosa do Caranguejo. Forneça sua resposta em metros e em anos-luz. c) O diâmetro angular da Nebulosa do Caranguejo observado na Terra é igual a um arco de 5 minutos (o arco de 1 minuto equivale a $\frac{1}{60}$ do arco de um grau). Estime a distância (em anos-luz) entre a Terra e a Nebulosa do Caranguejo e estime o ano em que a explosão da supernova ocorreu de fato.

16.80 **Previsão do tempo.** Uma instalação de radar usada para monitorar tempestades emite ondas de rádio com freqüência igual a 2800 MHz. Uma frente de tempestades se aproxima da instalação com velocidade de 42,0 km/h. a) No sistema de referência da tempestade, a freqüência das ondas de rádio é maior ou menor do que 2800 MHz? Por quê? Qual é a diferença existente entre a freqüência no referencial da tempestade e a freqüência de 2800 MHz? (Você poderá usar as fórmulas deduzidas no Problema 16.78. As ondas de rádio se deslocam com a velocidade da luz $c = 3{,}0 \times 10^8$ m/s.) b) As ondas de rádio são refletidas pelas gotas de água da tempestade, e as ondas refletidas são detectadas pela instalação. O receptor da instalação mede uma freqüência maior ou menor do que 2800 MHz? Por quê? Qual é a diferença entre a freqüência da onda refletida medida pelo receptor e a freqüência 2800 MHz?

16.81 Uma mulher está em pé em repouso em frente a uma parede grande e lisa. Ela segura um diapasão que vibra com freqüência f_0 diretamente à sua frente (entre ela e a parede). a) A seguir a mulher corre em direção à parede com velocidade v_m. Ela detecta batimentos provocados pela interferência entre as ondas sonoras que ela ouve diretamente do diapasão e as ondas sonoras refletidas pela parede. Quantos batimentos por segundo a mulher detecta? (*Nota*: quando a freqüência dos batimentos é muito grande, a mulher deve usar algum instrumento além dos ouvidos para detectar e contar os batimentos.) b) Se, em vez de se aproximar, ela se afastar da parede, mantendo o diapasão às suas costas, entre ela e a parede, quantos batimentos por segundo ela mede?

16.82 Em um dia claro você vê um avião a jato passar por um ponto na vertical acima da sua cabeça. A partir do tamanho aparente do avião, você conclui que ele está voando a uma altura constante h. Você ouve o estrondo sônico em um instante T depois que ele passou pelo ponto situado na vertical acima da sua cabeça. Mostre que, se a velocidade do som v for a mesma em todas as altitudes, a velocidade do avião é dada por

$$v_s = \frac{h v}{\sqrt{h^2 - v^2 T^2}}$$

(*Sugestão*: As identidades trigonométricas serão úteis.)

Problemas desafiadores

16.83 A Figura 16.45 mostra a flutuação de pressão P de uma onda sonora não senoidal em função de x para $t = 0$. A onda se propaga no sentido $+x$. a) Faça o gráfico da flutuação de pressão P em função de t para $x = 0$. Mostre pelo menos dois ciclos de oscilações. b) Faça um gráfico do deslocamento y nessa onda sonora em função de x para $t = 0$. No ponto $x = 0$, o deslocamento para $t = 0$ é igual a zero. Mostre pelo menos dois comprimentos de onda da onda. c) Faça um gráfico do deslocamento y em função de t para $x = 0$. Mostre pelo menos dois ciclos de oscilações. d) Calcule a velocidade máxima e a aceleração máxima de um elemento de ar através do qual esta onda se propaga. e) Descreva como o cone de um alto-falante deve se mover em função do tempo para produzir a onda sonora desse problema.

Figura 16.45 Problema desafiador 16.83

16.84 Dois alto-falantes, A e B, emitem sons uniformemente no ar, em todas as direções, a 20 °C. A potência acústica emitida por A é igual a $8{,}0 \times 10^{-4}$ W, e a potência de B é igual a $6{,}0 \times 10^{-3}$ W. Os dois alto-falantes estão vibrando em fase com freqüência igual a 172 Hz. a) Determine a diferença de fase entre os dois sinais em um ponto C ao longo da reta que une A a B, a 3,0 m de B e 4,0 de A (Figura 16.46). b) Determine a intensidade e o nível da intensidade sonora no ponto C devido ao alto-falante A quando o alto-falante B é desligado, bem como a intensidade e o nível da intensidade sonora devido ao alto-falante B quando o alto-falante A é desligado. c) Quando os dois alto-falantes estão ligados, calcule a intensidade e o nível da intensidade sonora no ponto C.

Figura 16.46 Problema desafiador 16.84

TEMPERATURA E CALOR

17

Em fundições, ferro derretido é aquecido a 1500° Celsius para remover impurezas. Seria correto dizer que ferro derretido contém calor?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O significado de equilíbrio térmico, e o que os termômetros medem realmente.
- Como funcionam diversos tipos de termômetros.
- A física por trás da escala de temperatura absoluta, ou Kelvin.
- Como as dimensões de um objeto variam em resultado de uma variação de temperatura.
- O significado do calor, e em que ele difere da temperatura.
- Como fazer cálculos envolvendo transferências de calor, variações de temperatura e transições de fase.
- Como o calor se transfere por condução, convecção e radiação.

Tanto em um dia escaldante de verão quanto em uma noite fria de inverno, seu corpo precisa manter uma temperatura aproximadamente constante. Ele possui mecanismos de controle de temperatura eficientes, mas, algumas vezes, precisa de ajuda. Em um dia quente, você usa menos roupa para melhorar a troca de calor entre seu corpo e o ar ambiente, e para melhorar o resfriamento produzido pela evaporação do suor. Você toma bebidas geladas e talvez fique em uma sala com ar-condicionado, ou perto de um ventilador. Em um dia frio, você usa mais roupas ou fica dentro de casa em local quente. Quando você sai de casa, procura manter-se ativo e bebe líquidos quentes para ficar aquecido. Os conceitos deste capítulo auxiliarão você a entender os processos físicos básicos para preservar o calor ou o frio.

Os termos "temperatura" e "calor" costumam ser usados como sinônimos na linguagem do dia-a-dia. Em física, contudo, esses dois termos têm significados bastante diferentes. Neste capítulo, definiremos *temperatura* em termos de sua medição, e veremos como a variação de temperatura afeta as dimensões dos objetos. Veremos que calor se refere à transferência de energia provocada pelas diferenças de temperatura, e aprenderemos a calcular e controlar essas transferências de energia.

Daremos ênfase neste capítulo aos conceitos de temperatura e de calor em suas relações com objetos *macroscópicos*, tais como cilindros de gás, cubos de gelo e o corpo humano. No Capítulo 18, estudaremos esses mesmos conceitos sob o ponto de vista *microscópico*, referente ao comportamento dos átomos e moléculas do sistema. Esses dois capítulos fornecerão ferramentas básicas para a **termodinâmica**, o estudo das transformações de energia envolvendo calor, trabalho mecânico e outros tipos de energia, e de como essas transformações se relacionam com as propriedades da matéria. A termodinâmica constitui uma parte indispensável dos fundamentos da física, da química e da biologia, e encontra aplicação em áreas como motores de automóveis, refrigeradores, processos bioquímicos e a estrutura das estrelas. Vamos analisar os conceitos básicos da termodinâmica nos Capítulos 19 e 20.

17.1 Temperatura e equilíbrio térmico

O conceito de **temperatura** tem origem nas idéias qualitativas de "quente" e "frio", que são baseadas em nosso tato. Um corpo que parece estar quente normalmente está

em uma temperatura mais elevada do que um corpo análogo que parece estar frio. Isso é vago, e os sentidos podem ser enganosos. Contudo, muitas propriedades da materia que podemos *medir* dependem da temperatura. O comprimento de uma barra metálica, a pressão no interior de uma caldeira, a intensidade da corrente elétrica transportada por um fio e a cor de um objeto incandescente muito quente — todas essas grandezas dependem da temperatura.

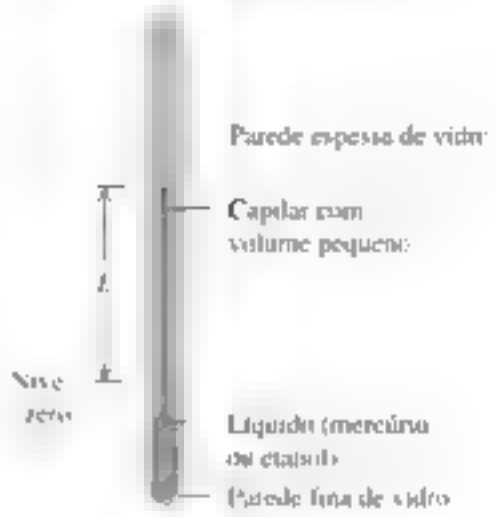
A temperatura também está relacionada à energia cinética das moléculas de um material. Em geral, essa relação é bastante complexa, por isso não é uma boa idéia começar com uma *definição* de temperatura. No Capítulo 18, vamos estudar a relação entre a temperatura e a energia do movimento das moléculas de um gás ideal. Entretanto, é importante entender que o calor e a temperatura podem ser definidos independentemente de qualquer movimento molecular. Nesta seção, vamos desenvolver uma definição macroscópica de temperatura.

Antes de usar a temperatura como uma medida para saber se um corpo está quente ou frio, precisamos construir uma escala de temperatura. Para isso, podemos usar qualquer propriedade do sistema que dependa do fato de o corpo estar 'quente' ou 'frio'. A Figura 17.1a mostra um conhecido sistema para medir temperatura. Quando o sistema torna-se mais quente, um líquido (geralmente o etanol ou o mercúrio) se expande e sobe no tubo, e o valor de L cresce. Outro sistema simples é um gás no interior de um recipiente mantido a volume constante (Figura 17.1b). A pressão p, medida com o manômetro, aumenta ou diminui à medida que o gás se aquece ou esfria. Um terceiro exemplo é a resistência elétrica R de um fio condutor, a qual varia quando o fio se aquece ou esfria. Cada uma dessas propriedades nos fornece um número (L, p ou R) que varia quando o corpo se aquece ou esfria, de modo que a respectiva propriedade pode ser usada para fazer um **termômetro**.

Para medir a temperatura de um corpo, você coloca o termômetro em contato com o corpo. Se você deseja saber a temperatura de uma xícara com café quente, coloca o bulbo do termômetro no café; quando ele interage com o líquido, o termômetro se aquece e o café esfria ligeiramente. Quando o estado estacionário é atingido, você pode ler a temperatura. Dizemos que o sistema atingiu o *equilíbrio*, um estado em que não existe mais nenhuma variação de temperatura nem do termômetro nem do café. Chamamos esse estado de **equilíbrio térmico**.

Quando dois sistemas estão separados por um material **isolante**, tal como a madeira, o plástico, o isopor ou a fibra de vidro, um sistema influencia o outro muito lentamente. As geladeiras usadas em piqueniques são feitas com materiais isolantes para impedir que o gelo e os alimentos gelados se aqueçam e atinjam o equilíbrio térmico com o ar quente do verão fora da geladeira. Um *isolante ideal* é um material que impede qualquer tipo de interação entre os sistemas. Ele impede que o equilíbrio térmico seja atingido quando os dois sistemas não estão em equilíbrio no início. Um isolante ideal é, como o próprio nome indica, uma idealização; um isolante real, como as geladeiras de piquenique, não é ideal, de modo que o conteúdo da geladeira acabará esquentando.

(a) As variações na temperatura provocam variações no volume do líquido.



(b) As variações na temperatura provocam variações na pressão do gás.

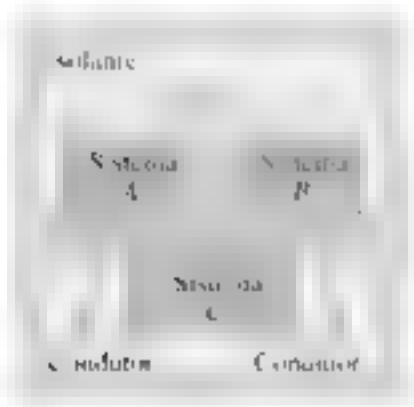
Figura 17.1 Dois instrumentos para medir a temperatura

A lei zero da termodinâmica

Podemos descobrir uma propriedade importante do equilíbrio térmico considerando três sistemas A, B e C, que não estão inicialmente em equilíbrio térmico (Figura 17.2). Colocamos os sistemas no interior de uma caixa isolante ideal para que não possam interagir com nada a não ser um com o outro. Separamos A e B por meio de uma parede isolante ideal (Figura 17.2a), porém, deixamos C interagir com A e com B. Essa interação ocorre porque as paredes entre C e A e entre C e B são constituídas por um material **condutor** térmico, um material que *permite* a interação térmica através dele. Esperamos até que o equilíbrio térmico seja atingido; então A e B estão simultaneamente em equilíbrio com C. Porém, será que o *sistema A* está em equilíbrio térmico com o *sistema B*?

Para responder a essa pergunta, separamos o sistema C de A e de B por meio de uma parede isolante ideal (Figura 17.2b) e, a seguir, trocamos a parede isolante que existia entre eles por uma parede *condutora* que permite a

(a) Se os sistemas A e B estão em equilíbrio térmico com o sistema C, então



(b) os sistemas A e B estão em equilíbrio térmico entre si.

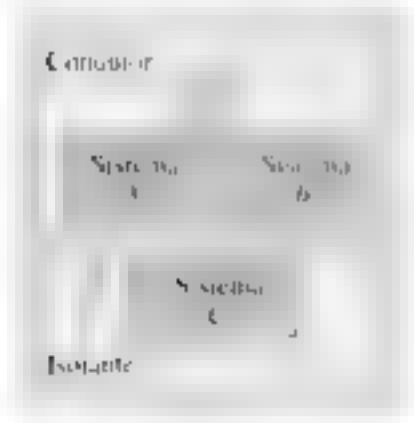


Figura 17.2 A lei zero da termodinâmica.

interação entre A e B. O que ocorrerá? A experiência mostra que *nada* ocorrerá; não haverá nenhuma interação entre A e B. Concluímos, então, que:

Quando C está em equilíbrio térmico com A e com B, então A também está em equilíbrio com B. Esse fenômeno é conhecido como a lei zero da termodinâmica.

(A importância dessa lei só foi reconhecida depois que a primeira, a segunda e a terceira leis foram enunciadas. Como essa lei é básica para as demais leis, o nome "lei zero" parece apropriado.)

Suponha agora que o sistema C seja um termômetro, tal como o termômetro de bulbo com líquido da Figura 17.1a. Na Figura 17.2a, o termômetro C está em contato com A e com B. No equilíbrio térmico, quando a leitura do termômetro atingir um valor estável, ele estará medindo a temperatura tanto de A quanto de B; logo, A e B possuem a *mesma* temperatura. A experiência mostra que o equilíbrio térmico não é alterado quando se introduz ou se remove um isolante; logo, a leitura do termômetro C não se alteraria se ele estivesse em contato separadamente com A ou com B. Concluímos, assim, que:

Dois sistemas estão em equilíbrio térmico se e somente se eles possuem a mesma temperatura.

É isso que torna útil o termômetro; na realidade, um termômetro mede *sua própria* temperatura, mas quando um termômetro está em equilíbrio térmico com outro corpo, as temperaturas devem ser iguais. Quando as temperaturas de dois sistemas são diferentes, eles *não podem* estar em equilíbrio térmico.

Teste sua compreensão da Seção 17.1 Você introduz um termômetro em uma panela de água quente e registra a leitura. Que temperatura você registrou? (i) a temperatura da água; (ii) a temperatura do termômetro; (iii) uma média aritmética das temperaturas da água e do termômetro; (iv) uma média ponderada das temperaturas da água e do termômetro, sendo que o peso da temperatura da água é maior; (v) uma média ponderada das temperaturas da água e do termômetro, sendo que o peso da temperatura do termômetro é maior. ∎

17.2 Termômetros e escalas de temperatura

Para que o dispositivo com líquido no bulbo mostrado na Figura 17.1a se transforme em um termômetro útil, é necessário marcar uma escala numérica sobre o vidro. Esses números são arbitrários, e historicamente muitos sistemas diferentes têm sido utilizados. Suponha que o 'zero' da escala corresponda ao ponto de congelamento da água pura e o número '100' corresponda ao ponto de ebulição, e a distância entre essas duas marcações seja subdividida em 100 intervalos iguais chamados de *graus*. Isso corresponde à **escala Celsius de temperatura** (também chamada de escala *centígrado*). A temperatura Celsius é um número negativo quando se refere a um estado cuja temperatura é menor do que a do ponto de congelamento da água. A escala Celsius é usada na vida cotidiana, na ciência e na indústria em quase todos os países do mundo.

Outro tipo de termômetro utiliza uma *lâmina bimetálica*, obtida com a junção de dois metais diferentes (Figura 17.3a). Quando a temperatura desse sistema aumenta, um dos metais se dilata mais do que o outro, e a lâmina composta se encurva (Figura 17.3b). Essa lâmina costuma ser enrolada em espiral, com a extremidade externa fixa na caixa do termômetro e a extremidade interna ligada a um ponteiro (Figura 17.3c). O ponteiro gira em reação à variação de temperatura.

Em um *termômetro de resistência*, a variação de temperatura pode ser medida pela variação do valor da resistência elétrica de um fio fino, de cilindro de carbono ou cristal de germânio. Como a resistência pode ser medida com grande precisão, os termômetros de resistência, em geral, são mais precisos do que os outros tipos de termômetro.

Alguns termômetros funcionam detectando a quantidade de radiações infravermelhas emitidas por um objeto. (Veremos na Seção 17.7 que *todos* os objetos emitem radiação eletromagnética, inclusive infravermelha, em conseqüência de sua temperatura.) Um exemplo moderno é o *termômetro de testa* ou *termômetro infravermelho* (Figura 17.4). Uma enfermeira passa um desses termôme-

tros sobre a testa do paciente nas proximidades da artéria temporal, e um sensor de radiações infravermelhas no termômetro mede a radiação que vem da pele. Os testes mostram que esse aparelho fornece valores mais precisos da temperatura corporal do que os termômetros orais ou timpânicos.

Na **escala Fahrenheit de temperatura**, ainda bastante usada cotidianamente em países como os Estados Unidos, a temperatura de congelamento da água é 32 °F (trinta e dois graus Fahrenheit), e a temperatura de ebulição é 212 °F, ambas em condições normais de pressão atmosférica. Há 180 graus entre a temperatura de congelamento e a de ebulição, em vez dos 100 graus da escala Celsius, portanto um grau Fahrenheit corresponde a apenas $\frac{100}{180}$ ou $\frac{5}{9}$ de um grau na escala Celsius.

Para converter graus Celsius em graus Fahrenheit, note que T_C, a temperatura na escala Celsius, é o número de graus Celsius acima da temperatura de congelamento; o número de graus Fahrenheit acima da temperatura de congelamento é $\frac{9}{5}$ desse valor. Entretanto, o congelamento na escala Fahrenheit ocorre aos 32 °F. Assim, para obter T_F, a verdadeira temperatura na escala Fahrenheit, multiplique o valor em Celsius por $\frac{9}{5}$ e acrescente 32. Em símbolos,

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32° \qquad (17.1)$$

Para converter temperaturas da escala Fahrenheit na escala Celsius basta usar a fórmula

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32°) \qquad (17.2)$$

Em palavras: subtraia 32° para obter o número de graus em Fahrenheit acima da temperatura de congelamento, e depois multiplique por $\frac{5}{9}$ para obter o número de graus Celsius acima do congelamento, ou seja, a temperatura em Celsius.

Recomendamos que você não memorize as equações (17.1) e (17.2). Em vez disso, tente entender o raciocínio usado e deduza novamente essas relações quando você precisar delas, combinando o seu raciocínio com a relação 100 °C = 212 °F.

Alguns livros americanos usam o símbolo °C para a temperatura e o símbolo °C para um *intervalo* de temperatura. Contudo, no Brasil, o último símbolo não é adotado, e nesta obra não faremos a distinção entre esses dois símbolos, ou seja, usaremos o símbolo °C tanto para uma temperatura quanto para um *intervalo* de temperatura.

Teste sua compreensão da Seção 17.2 Quais dos seguintes tipos de termômetro precisam estar em equilíbrio térmico com o objeto a ser medido a fim de fornecerem leituras precisas? (i) uma lâmina bimetálica; (ii) um termômetro de resistência; (iii) um termômetro infravermelho. (iv) as alternativas (i) e (ii) estão corretas. (v) as alternativas (i), (ii) e (iii) estão corretas. ■

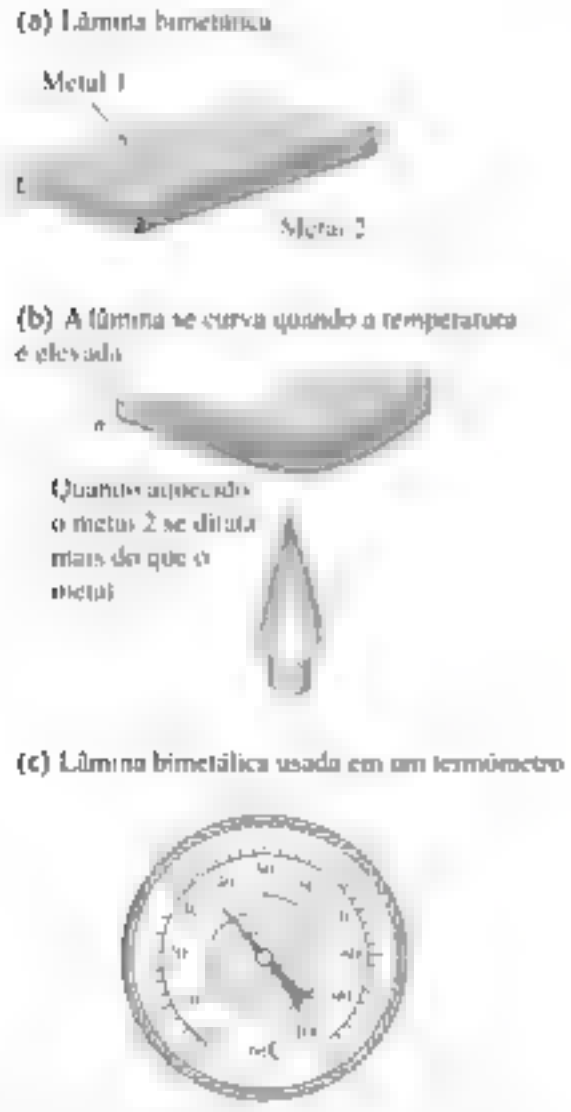

(a) Lâmina bimetálica
Metal 1
Metal 2
(b) A lâmina se curva quando a temperatura é elevada
Quando aquecido, o metal 2 se dilata mais do que o metal 1
(c) Lâmina bimetálica usada em um termômetro

Figura 17.3 Lâmina bimetálica funcionando como termômetro

17.3 Termômetro de gás e escala Kelvin

Quando calibramos dois termômetros — por exemplo, um termômetro com líquido no interior de um bulbo e um termômetro de resistência —, fazendo as duas leituras coincidirem em 0 °C e em 100 °C, as leituras podem não coincidir precisa-

Figura 17.4 Um termômetro de testa ou termômetro infravermelho pode ser adequado para medir a temperatura da pele que recobre uma das mais importantes artérias da cabeça. Embora o revestimento do termômetro toque a pele, o detector de infravermelho dentro do termômetro não toca.

mente nas temperaturas intermediárias. Qualquer escala de temperatura definida desse modo sempre depende em parte das propriedades específicas dos materiais usados. Idealmente, seria preciso definir uma escala de temperaturas que *não* dependesse das propriedades de um material particular. Para isso, são necessários alguns princípios da termodinâmica. Voltaremos a essa questão fundamental no Capítulo 20. Aqui discutiremos o *termômetro de gás*, um tipo de termômetro que apresenta um comportamento próximo do ideal.

O termômetro de gás se baseia no fato de que a pressão de um gás mantido a volume constante aumenta quando a temperatura aumenta. Um gás é colocado no interior de um recipiente mantido a volume constante (Figura 17.5a), e sua pressão é medida por meio de um dos dispositivos descritos na Seção 14.2. Para calibrar um termômetro de gás a volume constante, medimos as pressões em duas temperaturas diferentes, digamos 0 °C e 100 °C, assinalamos esses pontos sobre um gráfico e desenhamos uma linha reta, ligando-os. Podemos então usar esse gráfico para ler a temperatura correspondente a qualquer outra pressão. A Figura 17.5b mostra os resultados de três experiências desse tipo, cada uma usando um tipo e uma quantidade diferente de gás.

Extrapolando esse gráfico, vemos que deve existir uma temperatura hipotética igual a –273,15 °C, em que a pressão absoluta do gás deveria ser igual a zero. Você poderia pensar que essa temperatura seria diferente para gases diferentes, contudo verifica-se que ela é sempre a mesma para qualquer tipo de gás (pelo menos no limite de densidades muito pequenas). Na verdade, é impossível observar esse ponto de pressão igual a zero. Os gases se liquefazem e depois se solidificam à medida que a temperatura atinge valores muito pequenos, e a proporcionalidade entre a pressão e a temperatura deixa de ser válida.

Usamos essa temperatura extrapolada para uma pressão nula como a base para definir uma escala cujo zero corresponde a essa temperatura. Essa escala denomina-se **escala Kelvin de temperatura,** assim chamada em homenagem ao físico inglês Lord Kelvin (1824-1907). As unidades dessa escala são as mesmas que as da escala Celsius, porém o zero é deslocado de tal modo que 0 K = −273,15 °C e 273,15 K = 0 °C, ou seja,

$$T_K = T_C + 273{,}15 \tag{17.3}$$

Essa escala é demonstrada na Figura 17.5b. Para uma temperatura ambiente de 20 °C, obtemos 20 + 273,15, ou cerca de 293 K.

ATENÇÃO Nunca diga "graus kelvin" Na nomenclatura do SI, não se usa o termo "grau" na escala Kelvin, a temperatura acima é lida "293 kelvins" e não "graus kelvin" (Figura 17.6). Devemos usar a inicial maiúscula para Kelvin quando nos referimos à escala de temperatura; contudo, a *unidade* de temperatura é o *kelvin* com inicial minúscula (no entanto, a abreviação K deve ser escrita com letra maiúscula).

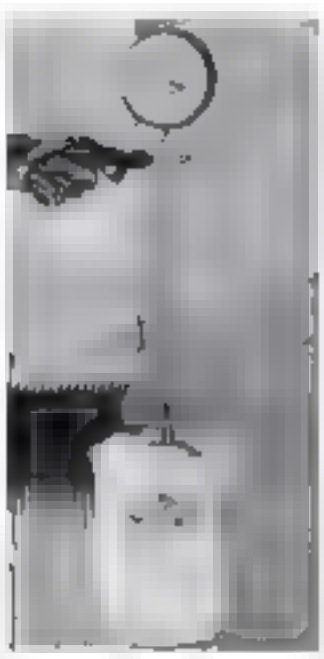
Exemplo 17.3

TEMPERATURA DO CORPO HUMANO Você coloca um pedaço de gelo na boca. O gelo, à temperatura $T_1 = 32$ °F, acaba sendo todo convertido em água à temperatura do corpo $T_2 = 98{,}6$ °F. Expresse essas temperaturas em °C e K e calcule $\Delta T = T_2 - T_1$ nas duas escalas.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as variáveis procuradas são as temperaturas T_1 e T_2 expressas em graus Celsius e em kelvins, assim como a diferença entre essas duas temperaturas.

(a) Um termômetro de gás a volume constante



(b) Gráficos da pressão em função da temperatura a volume constante para três tipos e quantidades diferentes de gás

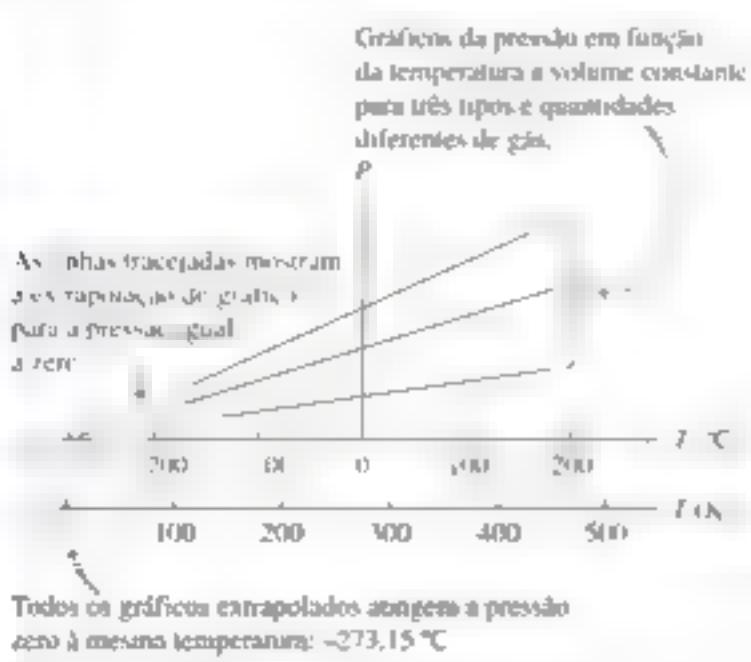

Gráficos da pressão em função da temperatura a volume constante para três tipos e quantidades diferentes de gás.
P
Todos os gráficos extrapolados atingem a pressão zero à mesma temperatura: −273,15 °C
T (°C)
T (K)
100
200
400
500

Figura 17.5 (a) Um termômetro de gás a volume constante. (b) Quanto maior a quantidade de gás no termômetro, mais alto é o gráfico da pressão P em função da temperatura T.

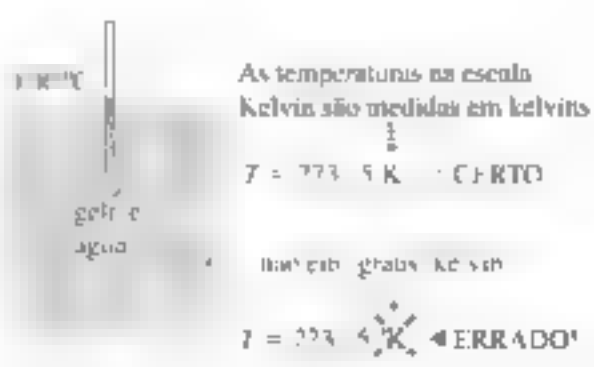


Figura 17.6 Uso correto e incorreto da escala Kelvin.

PREPARAR convertemos as temperaturas de Fahrenheit em Celsius com a Equação (17.3), e de Celsius em Kelvin usando a Equação (17.3).

EXECUTAR. inicialmente achamos as temperaturas na escala Celsius. Sabemos que $T_1 = 32\ °F = 0\ °C$, e 98,60 °F está a uma temperatura 98,6 – 32 = 66,6 °F acima do ponto de congelamento; multiplique esse resultado por (5 °C/9 °F) para encontrar 37 °C acima do ponto de congelamento, ou $T_2 = 37\ °C$.

Para obter a temperatura na escala Kelvin, basta somar 273,15 K ao valor da temperatura em graus Celsius. $T_1 = 273{,}15$ K e $T_2 = 310{,}15$ K. A temperatura "normal" do corpo humano é de ontem de 37 °C; porém, se o médico disser que a temperatura do seu corpo é 310 K, não fique preocupado.

A *diferença* de temperatura é dada por $\Delta T = T_2 - T_1 = 37\ °C = 17\ K$.

AVALIAR. as escalas Kelvin e Celsius têm o zero em pontos diferentes, porém o intervalo de um grau é o mesmo nas duas escalas. Portanto, qualquer diferença entre as temperaturas é a *mesma* nas duas escalas: na escala Fahrenheit, contudo, isso não ocorre.

A escala Kelvin e a temperatura absoluta

A escala Celsius tem dois pontos fixos: o ponto de congelamento normal da água e o ponto de ebulição da água. Podemos, no entanto, definir a escala Kelvin usando um termômetro de gás com apenas um ponto de referência para a temperatura. Definimos a razão entre duas temperaturas T e T_2 na escala Kelvin como a razão entre as pressões P_1 e P_2 medidas pelo termômetro de gás.

$$\frac{T}{T_1} = \frac{P}{P_1} \qquad \begin{array}{l}\text{(termômetro de gás a volume}\\ \text{constante, } T \text{ em kelvins).}\end{array} \qquad (17.4)$$

A pressão p é diretamente proporcional à temperatura na escala Kelvin, conforme mostra a Figura 17.5b. Para completar a definição de T, basta especificar a temperatura Kelvin de um único estado específico. Por razões de precisão e de facilidade de reprodução das condições, o ponto escolhido é o *ponto triplo* da água. Esse é o único ponto em que a água sólida (gelo), a água líquida e o vapor d'água podem coexistir em equilíbrio. Isso ocorre a uma temperatura de 0,01 °C e uma pressão de vapor igual a 610 Pa (cerca de 0,006 atm). (Essa pressão é da *água*; não tem nenhuma relação com a temperatura no gás do *termômetro*.) A temperatura do ponto triplo da água T_{triplo} é *definida* pelo valor $T_{triplo} = 273{,}16$ K, correspondente a 0,01 °C. Pela Equação (17.4), se P_{triplo} for a pressão em um termômetro de gás para uma temperatura T_{triplo} e P for a pressão para uma outra temperatura T, então T é dada na escala Kelvin por

$$T = T_{triplo}\frac{P}{P_{triplo}} = (273{,}16\ \text{K})\frac{P}{P_{triplo}} \qquad (17.5)$$

Verifica-se que os termômetros contendo gases a baixas pressões são bastante precisos, mas como eles ocupam volumes muito grandes, levam muito tempo para atingir o equilíbrio térmico. Eles são usados principalmente para estabelecer padrões com elevada precisão e para calibrar outros termômetros.

As relações entre as três escalas de temperatura que discutimos são apresentadas graficamente na Figura 17.7. A escala Kelvin denomina-se **escala absoluta de temperatura**, e seu ponto zero ($T = 0\ K = -273{,}15\ °C$, a temperatura que na Equação (17.5) corresponde a $P = 0$) denomina-se **zero absoluto**. No zero absoluto, um sistema molecular (tal como uma porção de um gás, de um líquido ou de um sólido) possui um valor *mínimo* para a energia total (energia cinética mais energia potencial); contudo, por causa de efeitos quânticos, *não* é correto dizer que todo movimento molecular cessa no zero absoluto. Para definir de modo mais preciso o que significa o zero absoluto, precisamos usar os princípios termodinâmicos que serão desenvolvidos nos capítulos que se seguem. Voltaremos a estudar esse conceito no Capítulo 20.

Teste sua compreensão da Seção 17.3 Ordene as seguintes temperaturas do maior para o menor valor: (i) 0 °C; (ii) 0 °F; (iii) 260 K; (iv) 77 K; (v) −180 °C. ∎

17.4 Expansão térmica

A maioria dos materiais sofre expansão ou dilatação térmica quando aquecidos. Temperaturas em elevação fazem o líquido se expandir em um termômetro formado por um líquido dentro de um tubo (Figura 17.1a) e curvam lâminas bimetálicas (Figura 17.3b). As estruturas das pontes devem ser projetadas com suportes e juntas especiais para permitir a dilatação dos materiais. Uma garrafa cheia de água e tampada muito firmemente pode quebrar quando for aquecida; no entanto, você pode afrouxar a tampa metálica de um recipiente jogando água quente sobre ela. Todas essas situações exemplificam a *dilatação térmica*.

Dilatação linear

Suponha que uma barra possua comprimento L_0 em uma dada temperatura T_0. Quando a temperatura varia de ΔT, o comprimento varia de ΔL. A experiência mostra que,

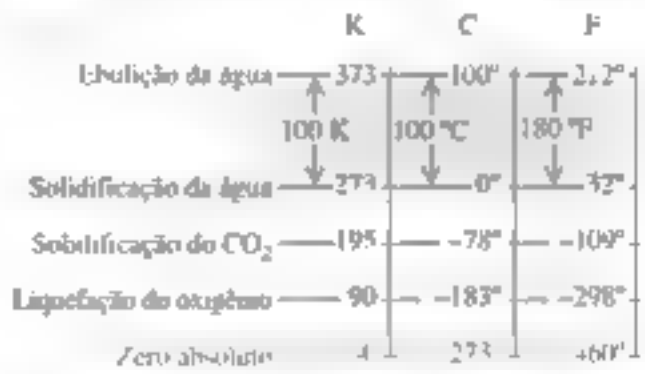


Figura 17.7 Relações entre as escalas Kelvin (K), Celsius (C) e Fahrenheit (F). As frações dos graus das temperaturas foram aproximadas para os graus inteiros mais próximos.

quando ΔT não é muito grande (digamos, menor do que cerca de 100 °C), ΔL é *diretamente proporcional* a ΔT (Figura 17.8a). Quando duas barras feitas com o mesmo material sofrem a mesma variação de temperatura, mas uma possui o dobro do comprimento da outra, então a *variação* do comprimento também é duas vezes maior. Portanto, ΔL também deve ser proporcional a L_0 (Figura 17.8b). Introduzindo uma constante de proporcionalidade (que não é a mesma para todos os materiais), podemos expressar essas dependências mediante a equação:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad \text{(dilatação térmica linear)} \qquad (17.6)$$

Se o comprimento de um corpo a uma temperatura T_0 é L_0, então seu comprimento L a uma temperatura $T = T_0 + \Delta T$ é

$$L = L_0 + \Delta L = L_0 + \alpha L_0 \Delta T = L_0(1 + \alpha \Delta T)$$

A constante α, que descreve as propriedades de expansão térmica de um dado material, denomina-se **coeficiente de dilatação linear**. As unidades de α são K^{-1} ou $(°C)^{-1}$. (Lembre-se de que o *intervalo* de um grau é o mesmo na escala Kelvin e na escala Celsius.) Em muitos materiais, as dimensões lineares sofrem variações de acordo com a Equação (17.6) ou (17.7). Logo, L pode ser a espessura de uma barra, o comprimento do lado de um quadrado, ou o diâmetro de um buraco. Alguns materiais, como a madeira, ou o cristal, dilatam-se de modo diferente em diferentes direções. Não vamos levar em conta esse efeito.

Podemos entender a dilatação térmica qualitativamente, em termos das moléculas do material. Imagine as forças interatômicas de um sólido sendo molas, como na Figura 17.9 (já exploramos a analogia entre uma força interatômica e a força de uma mola na Seção 13.4). Cada átomo vibra em torno de uma posição de equilíbrio. Quando a temperatura aumenta, a energia e a amplitude das vibrações também aumentam. As forças das molas interatômicas não são simétricas em relação à posição de equilíbrio; em geral elas se comportam como molas que se dilatam com mais facilidade do que se comprimem. Conseqüentemente, quando a amplitude das vibrações aumenta, a distância *média* entre as moléculas também aumenta. À medida que os átomos se afastam, todas as dimensões aumentam.

ATENÇÃO Aquecendo um objeto que tenha um buraco Quando um objeto sólido contém um buraco em seu interior, o que ocorre com o tamanho do buraco quando a temperatura do objeto aumenta? Um erro muito comum é pensar que quando o objeto se expande o buraco se contrai, porque o objeto se expande para dentro do buraco. Na verdade, quando o objeto se dilata, o buraco também se dilata (Figura 17.10), conforme dissemos anteriormente, *todas* as dimensões lineares do objeto se dilatam do mesmo modo quando a temperatura varia. Caso você ainda não tenha se convencido, pense nos átomos da Figura 17.9a como se fossem o contorno de um buraco cúbico. Quando o objeto se expande, os átomos se separam e o buraco aumenta de tamanho. A única situação em que um 'buraco' será preenchido devido à dilatação térmica é na qual dois objetos distintos se dilatam e fecham a brecha existente entre eles (Figura 17.11).

A proporcionalidade direta expressa na Equação (17.6) não é exata; ela é *aproximadamente* correta somente quando ocorrem variações de temperatura muito pequenas. Em um dado material, α varia ligeiramente com a temperatura inicial T_0 e com a amplitude do intervalo de temperatura. Vamos, porém, desprezar esse efeito aqui.

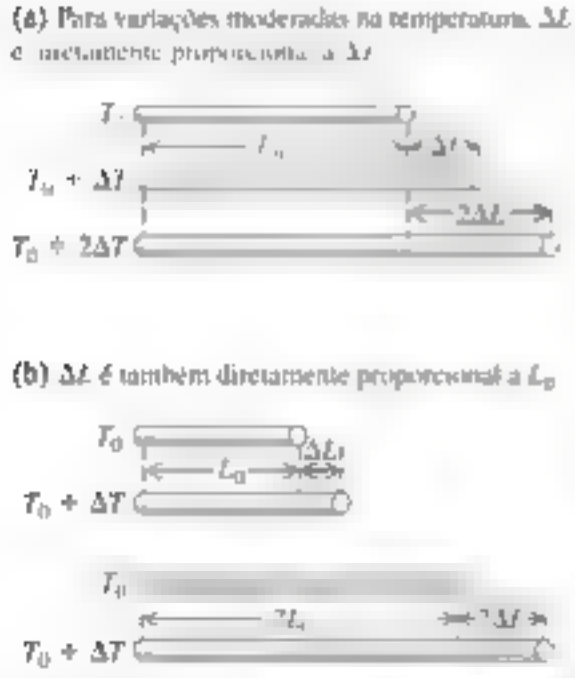


Figura 17.8 Como o comprimento de uma barra se comporta com uma variação de temperatura. As variações de comprimento são exageradas para maior visibilidade.)

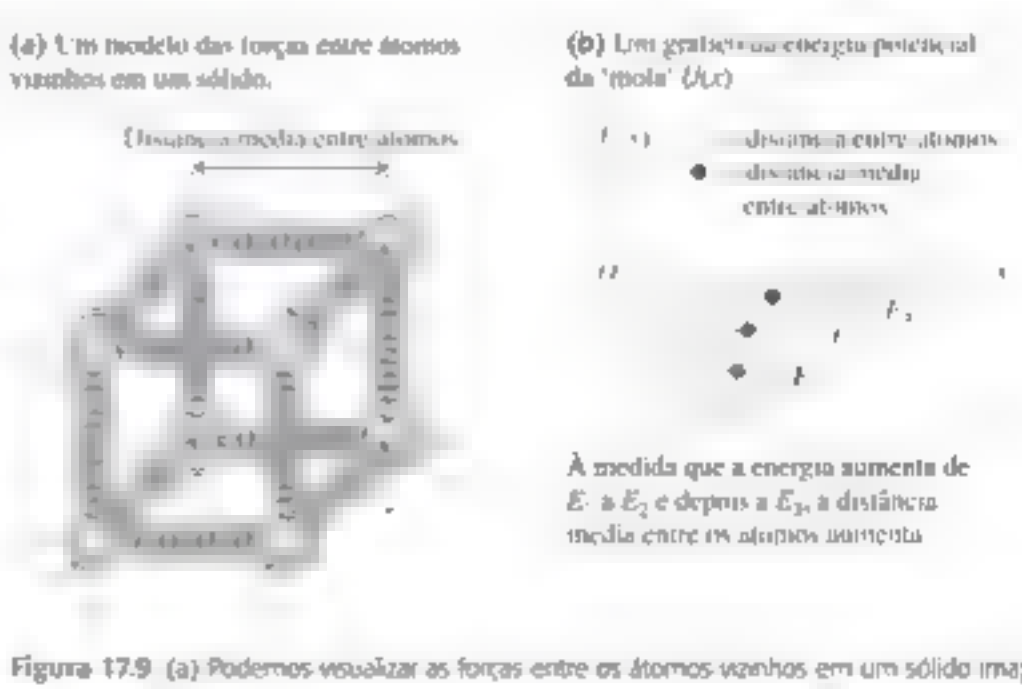

(a) Um modelo das forças entre átomos vizinhos em um sólido.
(b) Um gráfico da energia potencial da 'mola' U(x)
À medida que a energia aumenta de E₁ a E₂ e depois a E₃, a distância média entre os átomos aumenta

Figura 17.9 (a) Podemos visualizar as forças entre os átomos vizinhos em um sólido imaginando-as como molas. (b) Um gráfico da energia potencial de uma mola que se dilata com mais facilidade do que se comprime. A área sob a curva é igual à energia potencial gerada pela deformação da mola. Quanto maior a energia, maior a distância entre dois átomos vizinhos. Observe que as curvas não são simétricas. Em comparação com a Figura 13.21b, a medida que a energia aumenta e os átomos oscilam com maior amplitude, a distância média aumenta.

Valores médios de α para diversos materiais são listados na Tabela 17.1. Dentro da margem de precisão desses valores, não precisamos nos preocupar se T_0 é 0 °C ou 20 °C, ou alguma outra temperatura. Note que os valores típicos de α são muito pequenos; mesmo considerando uma variação de temperatura de 100 °C, a variação relativa do comprimento $\Delta L/L_0$ é da ordem de apenas 1/1000 para os metais listados na tabela.

Dilatação volumétrica

O aumento da temperatura geralmente produz aumento de *volume*, tanto em líquidos, quanto em sólidos. Analogamente ao caso da dilatação linear, a experiência mostra que, quando a variação de temperatura ΔT não é muito grande (menor do que cerca de 100 °C), o aumento de volume ΔV é aproximadamente proporcional à variação de temperatura ΔT e ao volume inicial V_0.

$$\Delta V = \beta V_0 \, \Delta T \quad \text{(dilatação térmica volumétrica)} \tag{17.8}$$

Tabela 17.1 Coeficientes de dilatação linear

Material	α [K^{-1} ou $(°C)^{-1}$]
Alumínio	$2,4 \times 10^{-5}$
Latão	$2,0 \times 10^{-5}$
Cobre	$1,7 \times 10^{-5}$
Vidro	$0,4–0,9 \times 10^{-5}$
Invar (liga de ferro-níquel)	$0,09 \times 10^{-5}$
Quartzo (fundido)	$0,04 \times 10^{-5}$
Aço	$1,2 \times 10^{-5}$

A constante β caracteriza as propriedades da dilatação volumétrica de um dado material, ela se chama **coeficiente de dilatação volumétrica**. As unidades de β são K^{-1} ou $(°C)^{-1}$. Analogamente ao caso da dilatação linear, β varia ligeiramente com a temperatura, e a Equação (17.8) é uma relação aproximada que só vale para pequenas variações de temperatura. Em muitas substâncias, β diminui em temperaturas baixas. Diversos valores de β nas vizinhanças da temperatura ambiente são listados na Tabela 17.2. Note que os valores para líquidos são geralmente maiores do que os valores para sólidos.

Em materiais sólidos, existe uma relação simples entre o coeficiente de dilatação volumétrica β e o coeficiente de dilatação linear α. Para deduzir essa relação, consideremos um cubo de um material com um lado L e volume $V = L^3$. Na temperatura inicial, os valores são L_0 e V_0. Quando a temperatura aumenta de dT, a aresta aumenta de dL, e o volume aumenta de uma quantidade dV dada por

$$dV = \frac{dV}{dL} dL = 3L^2 \, dL$$

Substituímos agora L e V pelos valores iniciais L_0 e V_0. Conforme a Equação (17.6), dL é dado por

$$dL = \alpha L_0 \, dT$$

Como $V_0 = L_0^3$, podemos expressar dV do seguinte modo

$$dV = 3L_0^2 \, \alpha L_0 \, dT = 3\alpha V_0 \, dT$$

Esse resultado está de acordo com a forma diferencial da Equação (17.8), $dV = \beta V_0 dT$, somente quando

$$\beta = 3\alpha \tag{17.9}$$

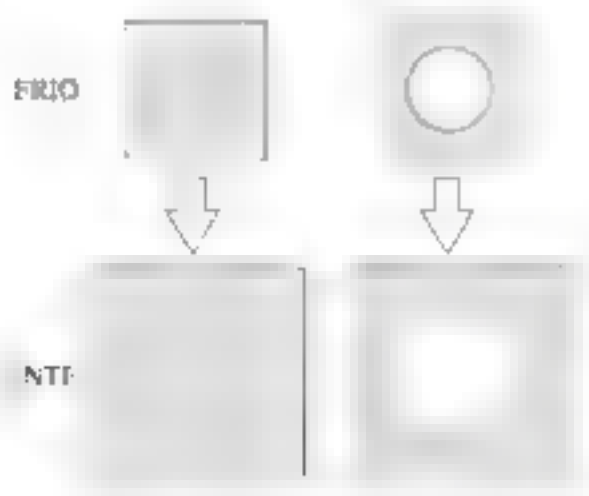
Seria conveniente você conferir essa relação para alguns materiais listados na Tabelas 17.1 e 17.2.

Dilatação térmica de uma placa metálica

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* Verifique se o problema envolve variações em comprimento (dilatação térmica linear) ou em volume (dilatação térmica volumétrica).

PREPARAR *por meio dos seguintes passos.*

1. Use a Equação (17.6) para a dilatação linear e a Equação (17.8) para a dilatação volumétrica.



Uma chapa se dilata quando aquecida... ...então um buraco recortado na chapa também deve se dilatar

Figura 17.10 Quando um objeto passa por dilatação térmica, quaisquer buracos existentes no objeto também se dilatam. (A dilatação foi exagerada na gravura.)

Figura 17.11 Quando o avião SR-71 está em repouso no solo, os encaixes dos painéis das asas são tão frouxos que vaza combustível das asas para o solo. Porém, quando ele voa com uma velocidade três vezes maior do que a velocidade do som, o atrito com o ar aquece tanto os painéis que eles se dilatam e o encaixe passa a ser perfeito. (O reabastecimento em vôo compensa o combustível perdido.)

Tabela 17.2 Coeficientes de dilatação volumétrica

Sólidos	β [K^{-1} ou (°C)$^{-1}$]	Líquidos	β [K^{-1} ou (°C)$^{-1}$]
Alumínio	$7,2 \times 10^{-5}$	Álcool etílico	75×10^{-5}
Latão	$6,0 \times 10^{-5}$	Dissulfeto de carbono	115×10^{-5}
Cobre	$5,1 \times 10^{-5}$	Glicerina	49×10^{-5}
Vidro	$1,2–2,7 \times 10^{-5}$	Mercúrio	18×10^{-5}
Invar (liga de ferro-níquel)	$0,27 \times 10^{-5}$		
Quartzo (fundido)	$0,12 \times 10^{-5}$		
Aço	$3,6 \times 10^{-5}$		

2. Identifique quais grandezas das equações (17.6) e (17.8) são fornecidas e quais são as incógnitas.

EXECUTAR *da seguinte forma:*

1. Aplique as equações para encontrar as incógnitas. Geralmente são fornecidas duas temperaturas e você deve calcular ΔT. Ou então uma temperatura inicial T_0 é fornecida e você deve calcular a temperatura final correspondente a uma dada variação de comprimento ou de volume. Nesse último caso, calcule ΔT primeiro, a seguir, a temperatura final será dada por $T_0 + \Delta T$.
2. A coerência das unidades é fundamental, como sempre. L_0 e ΔL (ou V_0 e ΔV) devem possuir as mesmas unidades. Se você usar um valor de α ou de β em K^{-1} ou (°C)$^{-1}$, então ΔT deve ser dado em kelvins ou em graus Celsius. Você pode usar K ou °C, como melhor lhe convier.

AVALIAR *a sua resposta:* Verifique se os seus resultados fazem sentido. Lembre-se de que as dimensões de um buraco em um material se expandem com o aumento da temperatura do mesmo modo que qualquer outra dimensão linear, e o volume de um buraco (tal como o volume de um recipiente) se dilata do mesmo modo que a dilatação da forma sólida correspondente.

Exemplo 17.3

VARIAÇÃO DE COMPRIMENTO CAUSADA POR UMA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA I Um agrimensor usa uma fita de aço de 50000 m de comprimento a uma temperatura de 20 °C. Qual é o comprimento da fita em um dia de verão quando a temperatura é igual a 35 °C?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este é um problema de dilatação linear. O problema nos fornece o comprimento inicial e a temperatura inicial da fita, e as incógnitas são o comprimento da fita e a temperatura final.

PREPARAR: usamos a Equação (17.6) para encontrar a variação no comprimento da fita. Sabemos que $L_0 = 50000$ m, $T_0 = 20$ °C, $T = 35$ °C, e o valor de α pode ser encontrado na Tabela 17.1. A incógnita é o novo comprimento $L = L_0 + \Delta L$.

EXECUTAR: a variação de temperatura é $\Delta T = T - T_0 = 15$ °C. Então, pela Equação (17.6), a variação de comprimento ΔL e o comprimento final $L = L_0 + \Delta L$ são

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T = (1,2 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1})(50\ \text{m})(15\ \text{K})$$

$$= 9,0 \times 10^{-3}\ \text{m} = 9,0\ \text{mm}$$

$$L = L_0 + \Delta L = 50000\ \text{m} + 0,009\ \text{m} = 50009\ \text{m}.$$

Portanto, o comprimento a 35 °C é igual a 50009 m.

AVALIAR: note que L_0 foi dado com cinco algarismos significativos, mas precisamos usar somente dois desses algarismos para calcular ΔL. Note também que ΔL é proporcional ao comprimento inicial L_0. Uma fita de 5,0 m se dilataria 0,90 mm, e uma fita de 0,50 m (50 cm) se dilataria apenas 0,090 mm.

Este exemplo mostra que os metais se dilatam muito pouco sob variações moderadas de temperatura. Até mesmo uma panela de metal em um forno a 200 °C fica apenas levemente maior do que à temperatura ambiente.

Exemplo 17.4

VARIAÇÃO DE COMPRIMENTO CAUSADA POR UMA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA II No Exemplo 17.2, o agrimensor usa a fita para medir uma distância quando a temperatura é igual a 35 °C; o valor lido na fita é igual a 35.794 m. Qual é a distância real? Suponha que a fita foi calibrada para uso a 20 °C.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como vimos no Exemplo 17.2, a 35 °C a fita se dilatou só um pouco. A distância entre as duas marcas sucessivas de medição é ligeiramente maior do que um metro, de modo que a escala fornece um valor ligeiramente menor do que a verdadeira distância.

PREPARAR: a verdadeira distância (nossa incógnita) é *maior* do que a distância lida na fita por um fator igual à razão entre o comprimento da fita L a 35 °C e seu comprimento L_0 a 20 °C.

EXECUTAR: a razão L/L_0 é (50.009 m)/(50.000 m), logo, a verdadeira distância é

$$\frac{50009\ \text{m}}{50000\ \text{m}}(35.794\ \text{m}) = 35.800\ \text{m}$$

AVALIAR: embora a diferença de 0,006 m = 6 mm entre a leitura da escala e a verdadeira distância pareça pequena, ela pode ser importante em um trabalho de precisão.

Exemplo 17.5

VARIAÇÃO DO VOLUME CAUSADA POR UMA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA Um frasco de vidro com volume igual a 200 cm^3 a 20 °C está cheio de mercúrio até a borda. Qual é a quantidade de mercúrio que transborda quando a temperatura do sistema se eleva até 100 °C? O coeficiente de dilatação linear do vidro é igual a $0,40 \times 10^{-5}$ K^{-1}.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR este problema envolve a dilatação volumétrica do vidro e do mercúrio. A quantidade que transborda depende da *diferença* entre a variação de volume desses dois materiais.

PREPARAR A quantidade que transborda é igual à diferença entre os valores de ΔV do mercúrio e do vidro, ambos dados pela Equação (17.8). Para o mercúrio transbordar, o seu coeficiente de dilatação volumétrica β deve ser maior do que o do vidro. O valor de β para o mercúrio é $\beta_{mercúrio} = 18 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, conforme a Tabela 17.2. Como vimos, o valor de β para esse tipo de vidro é dado pela Equação (17.9), $\beta = 3\alpha$.

EXECUTAR o coeficiente de dilatação volumétrica do vidro é

$$\beta_{vidro} = 3\alpha_{vidro} = 3\,(0{,}40 \times 10^{-5}\ K^{-1}) = 1{,}2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$$

O aumento de volume do frasco de vidro é

$$\begin{aligned}\Delta V_{vidro} &= \beta_{vidro} V_0 \Delta T \\ &= (1{,}2 \times 10^{-5}\ K^{-1})(200\ cm^3)(100\ °C - 20\ °C) \\ &= 0{,}19\ cm^3\end{aligned}$$

O aumento de volume do mercúrio é

$$\begin{aligned}\Delta V_{mercúrio} &= \beta_{mercúrio} V_0 \Delta T \\ &= (18 \times 10^{-5}\ K^{-1})(200\ cm^3)(100\ °C - 20\ °C) \\ &= 2{,}9\ cm^3\end{aligned}$$

O volume do mercúrio que transborda é

$$\Delta V_{mercúrio} - \Delta V_{vidro} = 2{,}9\ cm^3 - 0{,}19\ cm^3 = 2{,}7\ cm^3$$

AVALIAR isso é basicamente o que ocorre em um termômetro de vidro com mercúrio, a não ser pelo fato de que, em vez de deixar o mercúrio transbordar e escorrer no local onde se encontra, o termômetro permite que o mercúrio se dilate no interior de um tubo fechado quando a temperatura aumenta.

Como pode ser visto nas Tabelas 17.1 e 17.2, o vidro possui coeficientes de dilatação α e β menores do que os coeficientes de dilatação dos metais. Isso explica por que você pode afrouxar uma tampa metálica de um recipiente de vidro jogando água quente sobre a tampa: o metal se dilata mais do que o vidro.

Dilatação térmica da água

A água, no intervalo de temperaturas entre 0 °C e 4 °C, *diminui* de volume quando a temperatura aumenta. Nesse intervalo, o coeficiente de dilatação volumétrica da água é *negativo*. Acima de 4 °C, a água se expande quando aquecida (Figura 17.12). Portanto, a densidade da água apresenta seu valor mais elevado a 4 °C. A água também se expande quando congela, sendo essa a razão pela qual ela se curva para cima no meio dos compartimentos cúbicos das formas para fazer gelo. Em contraste, quase todos os materiais se contraem quando congelam.

Esse comportamento anômalo da água tem um efeito importante na vida de animais e de plantas em lagos. Um lago se congela da superfície para baixo; acima de 4 °C, a água fria flui para a parte inferior por causa de sua maior densidade. Porém, quando a temperatura da superfície se torna menor do que 4 °C, a água próxima da superfície é menos densa do que a água abaixo da superfície. Logo, o movimento para baixo termina, e a água nas proximidades da superfície permanece mais fria do que a água embaixo da superfície. À medida que a superfície se congela, o gelo flutua porque possui densidade menor do que a da água. A água no fundo permanece com uma temperatura da ordem de 4 °C até que ocorra o congelamento total do lago. Caso a água se contraísse ao se esfriar, como a maior parte das substâncias, lagos começariam a se congelar do fundo para a superfície. A circulação por diferença de densidade faria com que a água quente fosse transportada para a superfície, e os lagos ficariam totalmente congelados mais facilmente. Isso provocaria a destruição de todas as plantas e animais que não suportam o congelamento. Caso a água não tivesse essa propriedade especial, a evolução da vida provavelmente teria seguido um curso muito diferente.

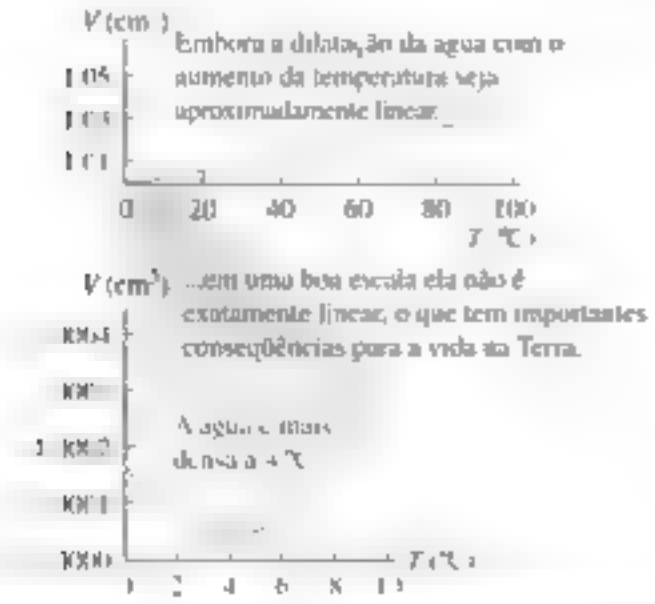


Figura 17.12 O volume de um grama de água no intervalo de 0 °C até 100 °C. A 20 °C o volume aumentou para 1,0018 cm³. Se o coeficiente de dilatação volumétrica fosse constante, a curva deveria ser uma linha reta.

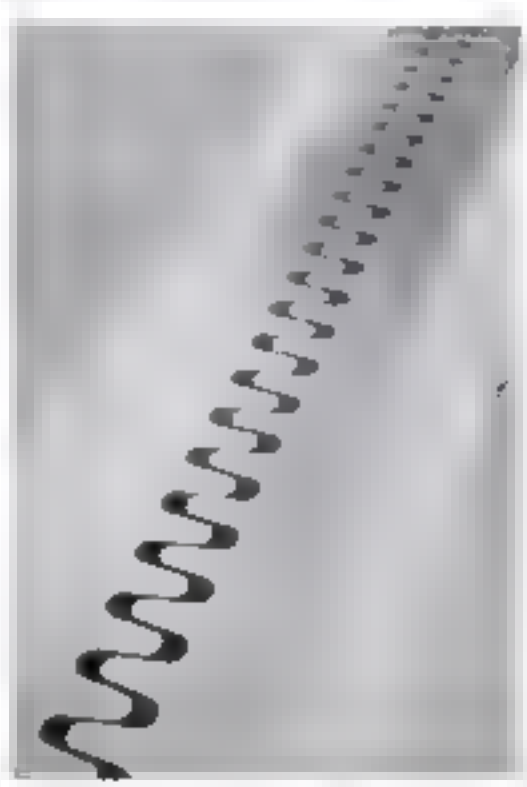


Figura 17.13 Detalhe da extremidade de um vão de uma ponte. Essas placas são projetadas para acomodar as variações de comprimento causadas pela dilatação térmica.

Tensão térmica

Caso você prenda rigidamente as extremidades de uma barra para impedir a sua dilatação ou compressão, e a seguir produza uma variação de temperatura, surgem tensões de dilatação ou de compressão chamadas de **tensões térmicas**. A barra tenderia a se dilatar ou a se comprimir, mas os dispositivos que seguram suas extremidades impedem que isso ocorra. As tensões resultantes podem se tornar suficientemente elevadas a ponto de deformar a barra de modo irreversível, ou até mesmo quebrá-la. (Talvez você queira rever a discussão a respeito de tensões na Seção 11.4.)

Os engenheiros precisam levar em conta as tensões térmicas quando projetam estruturas. Os blocos de concreto em estradas e as estruturas das pontes geralmente contêm um espaço vazio entre as seções que é preenchido com um material flexível, ou são ligadas por meio de juntas em forma de dentes (Figura 17.13), para permitir a dilatação e a contração do concreto. Os tubos longos que transportam vapor apresentam juntas de dilatação ou seções em forma de U para impedir contrações ou alongamentos com as variações de temperatura. Se uma das extremidades de uma ponte de aço está rigidamente presa ao seu suporte, a outra extremidade fica apoiada sobre rolamentos.

Para calcular a tensão térmica em uma barra presa, calculamos a dilatação (ou contração) que *ocorreria* caso ela não estivesse presa, e a seguir achamos a tensão necessária para comprimi-la (ou esticá-la) até que ela atinja seu comprimento original. Suponha que uma barra de comprimento L_0 e seção reta com área A seja mantida com o comprimento constante enquanto sua temperatura se reduz (ΔT negativa), produzindo uma tensão na barra. A variação relativa do comprimento caso a barra estivesse livre e pudesse se contrair seria dada por

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{térmica}} = \alpha \Delta T \qquad (17.9)$$

As variações ΔT e ΔL são negativas. A tensão deve aumentar de um valor F precisamente suficiente para produzir uma variação relativa de comprimento igual e contrária $(\Delta L/L_0)_{\text{tensão}}$. De acordo com a definição de módulo de Young, Equação (11.10), temos

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} \quad \text{logo} \quad \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{tensão}} = \frac{F}{AY} \qquad (17.11)$$

Como o comprimento deve permanecer constante, a variação relativa *total* do comprimento deve ser igual a zero. Pelas equações (17.10) e (17.11), isso significa que

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{térmica}} + \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{tensão}} = \alpha \Delta T + \frac{F}{AY} = 0$$

Explicitando a tensão necessária F/A para manter o comprimento da barra constante, achamos

$$\frac{F}{A} = -Y\alpha\,\Delta T \qquad \text{(tensão térmica)} \qquad (17.12)$$

Em uma diminuição de temperatura, como ΔT é negativa, F e F/A são positivas; isso significa que uma *força de tração* e uma tensão são necessárias para manter o comprimento constante. Se ΔT é positiva, F e F/A são grandezas negativas, e a força de tração e a tensão necessárias são de *compressão*.

Se existem diferenças de temperatura no interior de um corpo, dilatações ou contrações não uniformes são produzidas e tensões térmicas podem ser induzidas. Você pode quebrar um recipiente de vidro se despejar água muito quente nele; as tensões térmicas entre as partes quentes e frias do recipiente excedem a tensão de ruptura do vidro, produzindo fraturas. O mesmo fenômeno produz fraturas em cubos de gelo despejados em um recipiente com água quente. Alguns vidros resistentes ao calor, como o vidro *Pyrex*, possuem coeficientes de dilatação extremamente pequenos e resistências elevadas.

Exemplo

TENSÕES TÉRMICAS Um cilindro de alumínio de 10 cm de comprimento e seção reta com área igual a 20 cm² deve ser usado para separar duas paredes de aço. A 17,2 °C ele encaixa livremente entre as duas paredes. Quando aquecido até 22,3 °C, calcule a tensão no cilindro e a força total que ele exerce sobre cada parede, supondo que as paredes sejam completamente rígidas e a distância entre elas permaneça constante.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as variáveis que desejamos encontrar são a tensão térmica no cilindro e a força que ela exerce sobre cada uma das paredes que mantêm o cilindro no lugar.

PREPARAR: a Figura 17.14 é um esboço da situação. Usamos a Equação (17.12) para relacionar a tensão à variação de temperatura. Os valores do módulo de Young Y e do coeficiente de dilatação linear que importam são os do alumínio, o material de que é feito o cilindro; encontramos esses valores nas tabelas 11.1 e 17.1, respectivamente.

EXECUTAR: procurando o valor para o alumínio nas tabelas 11.1 e 17.1, achamos $Y = 7{,}0 \times 10^{10}$ Pa e $\alpha = 2{,}4 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1}$. A variação de temperatura é dada por $\Delta T = 22{,}3\ ^\circ\text{C} - 17{,}2\ ^\circ\text{C} = 5{,}1\ ^\circ\text{C} = 5{,}1$ K. A tensão é F/A. Da Equação (17.12),

$$\frac{F}{A} = -Y\alpha\,\Delta T = -(7{,}0 \times 10^{10}\ \text{Pa})(2{,}4 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1})(5{,}1\ \text{K})$$
$$= -8{,}6 \times 10^{6}\ \text{Pa}\ (\text{ou} -1200\ \text{lb/in.}^2)$$

O sinal negativo indica que é necessária uma tensão de compressão, em vez de tração, para manter o comprimento do cilindro constante. Essa tensão não depende nem do comprimento nem da

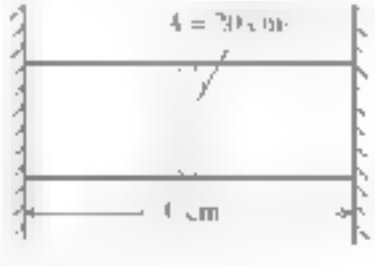


Figura 17.14 Nosso esboço para este problema.

área da seção reta do cilindro. A força total F é dada pelo produto da área da seção reta vezes a tensão:

$$F = A\left(\frac{F}{A}\right) = (20 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(-8{,}6 \times 10^6\ \text{Pa})$$
$$= -1{,}7 \times 10^4\ \text{N}$$

ou quase duas toneladas. O sinal negativo indica tensão de compressão.

AVALIAR A tensão sobre o cilindro e a força exercida sobre as paredes são imensas. Isso mostra a importância de levar em conta as tensões térmicas na engenharia.

Teste sua compreensão da Seção 17.4 Na lâmina bimetálica mostrada na Figura 17.3a, o metal 1 é cobre. Quais dos seguintes materiais podem ser usados como metal 2? (Pode haver mais de uma resposta correta.) (i) aço; (ii) latão; (iii) alumínio. ■

17.5 Quantidade de calor

Quando você coloca uma colher em uma xícara de café quente, a colher esquenta e o café esfria, e eles tendem a atingir o equilíbrio térmico. A interação que produz essas variações de temperatura é basicamente uma transferência de *energia* entre uma substância e a outra. A transferência de energia produzida apenas por uma diferença de temperatura denomina-se *transferência de calor* ou *fluxo de calor*, e a energia transferida desse modo denomina-se **calor**.

O estudo da relação entre o calor e outras formas de energia evoluiu gradualmente durante o século XVIII e o século XIX. Sir James Joule (1818-1889) estudou como a água pode ser aquecida ao ser vigorosamente mexida com um agitador (Figura 17.15a). As pás do agitador transferem energia para a água, realizando um *trabalho* sobre ela, e Joule verificou que o *aumento de temperatura é proporcional ao trabalho realizado*. A mesma variação de temperatura pode também ser obtida colocando-se a água em contato com algum corpo mais quente (Figura 17.15b); logo, essa interação também deve envolver uma troca de energia. Nos Capítulos 19 e 20 discutiremos a relação entre calor e energia mecânica mais detalhadamente.

ATENÇÃO **Temperatura x calor** É extremamente importante que você entenda a diferença entre *calor* e *temperatura*. A temperatura depende do estado físico de um material, indicando, por meio de uma descrição quantitativa, se o material está quente ou frio. Na física, o termo "calor" sempre se refere a uma transferência de energia de um corpo ou sistema para outro em virtude de uma diferença de temperatura existente entre eles, nunca indica a quantidade de energia contida em um sistema particular. Podemos alterar a temperatura de um corpo fornecendo ou retirando calor dele ou retirando ou fornecendo outras formas de energia, tal como a energia mecânica (Figura 17.15a). Quando dividimos um corpo em duas metades, cada metade possui a mesma temperatura do corpo inteiro; porém, para aumentar a temperatura de cada metade até um mesmo valor final, devemos fornecer a *metade* da energia que seria fornecida ao corpo inteiro. ■

Podemos definir uma *unidade* de quantidade de calor com base na variação de temperatura de materiais específicos. A **caloria** (abreviada como cal) é definida como *a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de um grama de água de* 14,5 °C *até* 15,5 °C. A quilocaloria (kcal), igual a 1000 cal, também é uma unidade muito usada; a *caloria* usada para alimentos, também chamada de *grande caloria*, é na realidade uma quilocaloria (Figura 17.16).

Como o calor é uma energia em trânsito, deve existir uma relação entre essas unidades e as unidades de energia mecânica que conhecemos, como, por exemplo, o joule. Experiências semelhantes às realizadas por Joule mostraram que

$$1\ \text{cal} = 4186\ \text{J}$$
$$1\ \text{kcal} = 1000\ \text{cal} = 4186\ \text{J}$$
$$1\ \text{Btu} = 778\ \text{ft} \cdot \text{lb} = 252\ \text{cal} = 1055\ \text{J}$$

A caloria não é uma unidade SI fundamental. O Comitê Internacional de Pesos e Medidas recomenda o uso do joule como a unidade básica de todas as formas de energia, inclusive o calor. Neste livro seguiremos essa recomendação.

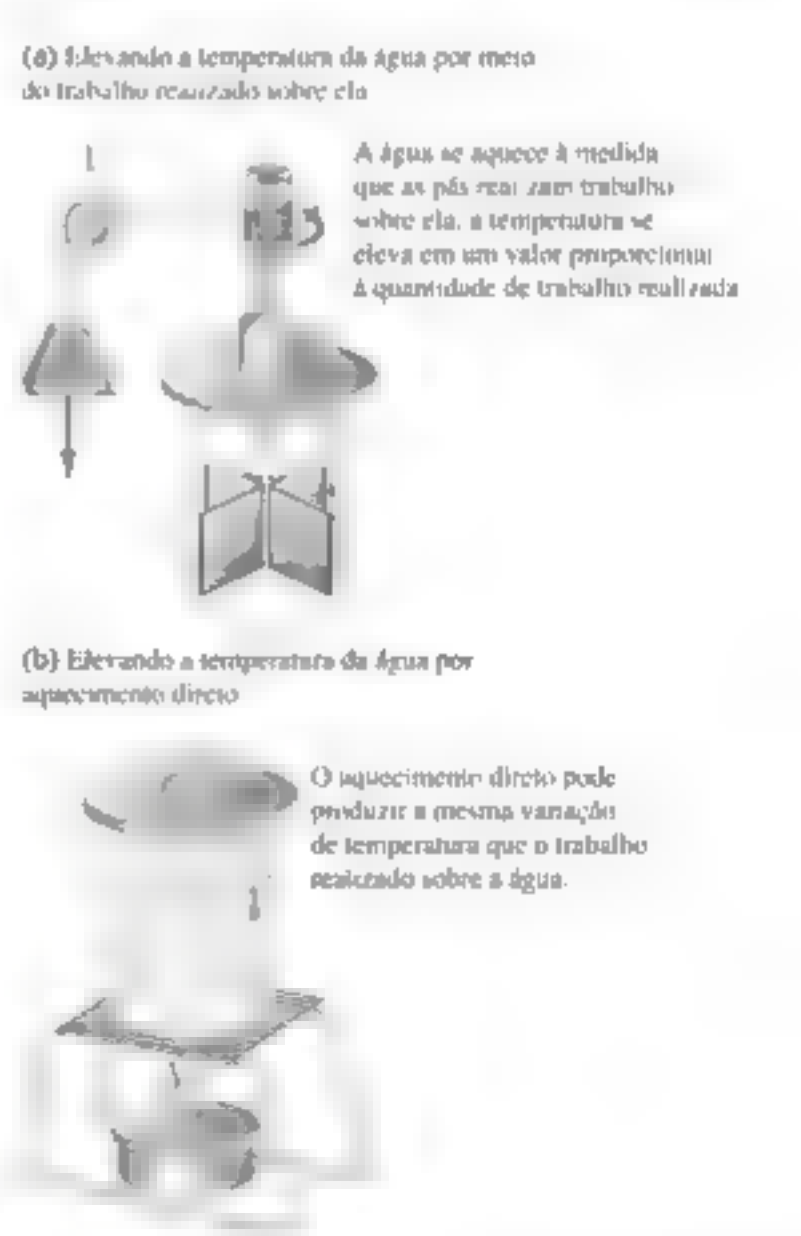

(a) Elevando a temperatura da água por meio do trabalho realizado sobre ela
A água se aquece à medida que as pás realizam trabalho sobre ela, a temperatura se eleva em um valor proporcional à quantidade de trabalho realizada
(b) Elevando a temperatura da água por aquecimento direto
O aquecimento direto pode produzir a mesma variação de temperatura que o trabalho realizado sobre a água.

Figura 17.15 A mesma variação de temperatura produzida em um mesmo sistema pode ser obtida (a) realizando-se um trabalho sobre o sistema e (b) transferindo-se calor para o sistema.

Calor específico

Usamos o símbolo Q para a quantidade de calor. Quando associada a uma variação infinitesimal de temperatura dT, chamamos essa quantidade de dQ. Verifica-se que a quantidade de calor Q necessária para elevar a temperatura da massa m de um material de T_1 até T_2 é aproximadamente proporcional à variação de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$. Ela também é proporcional à massa m do material. Quando você aquece água para fazer o chá, precisa o dobro da quantidade de calor para fazer duas xícaras em vez de uma, se a variação de temperatura for a mesma. A quantidade de calor também depende da natureza do material: para elevar de 1 °C a temperatura de um quilograma de água é necessário transferir uma quantidade de calor igual a 4190 J, enquanto basta transferir 910 J de calor para elevar a temperatura de um quilograma de alumínio de 1 °C.

Reunindo todas as relações mencionadas, podemos escrever

$$Q = mc\Delta T \quad \text{(calor necessário para uma variação de temperatura } \Delta T \text{ em uma massa } m) \qquad (17.13)$$

onde a grandeza c, que possui valores diferentes para cada tipo de material, é denominada **calor específico** (ou também chamada de *capacidade calorífica específica*) do material. Para uma variação de temperatura infinitesimal dT e uma correspondente quantidade de calor dQ, temos,

$$dQ = mc\,dT \qquad (17.14)$$

$$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \quad \text{(calor específico)} \qquad (17.15)$$

Nas equações (17.13), (17.14) e (17.15), Q (ou dQ) e ΔT (ou dT) podem ter valores positivos ou negativos. Quando esses valores são positivos, o calor é transferido para o corpo e sua temperatura aumenta; quando são negativos, o calor é libertado pelo corpo e sua temperatura diminui.

ATENÇÃO A definição de calor Lembre-se de que dQ não representa nenhuma variação ou quantidade de calor *contida* no corpo; esse conceito não faz sentido. O calor é sempre uma energia *em trânsito* em virtude de uma diferença de temperatura. Não existe nenhuma "quantidade de calor em um corpo".

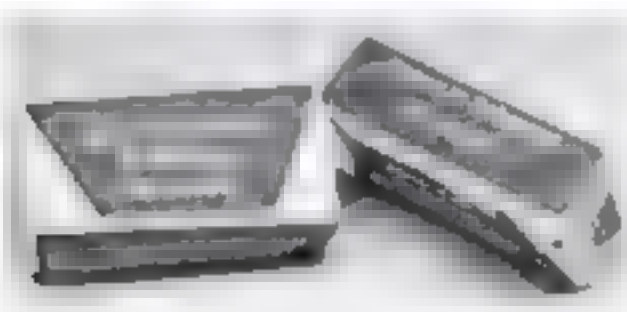


Figura 17.16 O slogan *"Komm in Schwung mit Zucker"* nessas embalagens alemãs de açúcar pode ser traduzido como "açúcar é energia". E isso é verdade! Conforme o rótulo, cada pacote contém 22 quilocalorias (22 calorias alimentares), ou 92 quilojoules.

O calor específico da água é aproximadamente igual a

$$4190\ \text{J/kg} \cdot \text{K} \quad \text{ou} \quad 1\ \text{cal/g} \cdot ^\circ\text{C}, \quad \text{ou} \quad 1\ \text{Btu/lb} \cdot ^\circ\text{F}$$

O calor específico de um material depende até certo ponto da temperatura inicial e do intervalo de temperatura. A Figura 17.17 mostra essa dependência no caso da água. Nos problemas e exemplos deste capítulo desprezaremos essa pequena variação.

Exemplo 17.5

CONSUMO DE ENERGIA DURANTE UMA FEBRE Em um episódio de gripe, um homem de 80 kg tem 39 °C de febre (cerca de 2 °C acima da temperatura normal de 37 °C). Considerando que o corpo humano é constituído essencialmente de água, qual seria o calor necessário para produzir essa variação de temperatura?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR este problema usa a relação entre o calor (a incógnita), a massa, o calor específico e a variação de temperatura.

PREPARAR os valores fornecidos são $m = 80$ kg, $c = 4190$ J/kg · K (para a água), e $\Delta T = 39\ ^\circ\text{C} - 37\ ^\circ\text{C} = 2\ \text{C}^\circ = 2$ K. Usamos a Equação (17.13) para calcular o calor necessário.

EXECUTAR de acordo com a Equação (17.13), obtemos,

$$Q = mc\Delta T = (80\ \text{kg})(4190\ \text{J/kg} \cdot \text{K})(2.0\ \text{K}) = 6.7 \times 10^5\ \text{J}$$

AVALIAR isso corresponde a 160 kcal. Na realidade, o calor específico do corpo humano é aproximadamente igual a 3480 J/kg · K, ou 83% do calor específico da água. A diferença decorre da presença das proteínas, gorduras e minerais, que possuem um calor específico menor do que o da água. Usando esse valor de c, o calor necessário é igual a 5.6×10^5 J = 133 kcal. Esses dois resultados mostram que, se não fosse pelos sistemas de regulação da temperatura do corpo, o processo de extração de energia a partir de alimentos produziria variações mensuráveis na temperatura do corpo. (No caso de uma pessoa gripada, a temperatura elevada é decorrência da atividade extra do corpo no combate à infecção.)

Exemplo 17.6

SUPERAQUECIMENTO ELETRÔNICO Você está projetando um elemento para um circuito eletrônico constituído por 23 mg de silício. A corrente elétrica transfere energia para o elemento a

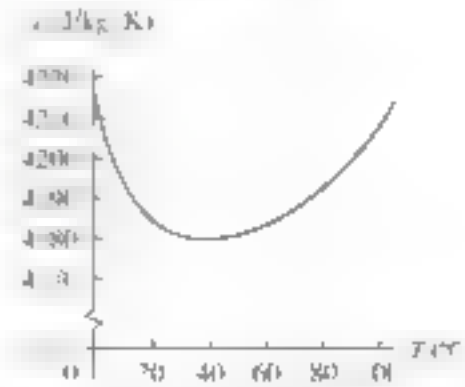


Figura 17.17 Calor específico da água em função da temperatura. O valor de c varia menos do que 1% entre 0 °C e 100 °C.

uma taxa igual a 7,4 mW = 7,4 × 10^{-3} J/s. Se o seu projeto não permite nenhuma transferência de calor a partir do elemento, qual é a taxa de aumento da temperatura do elemento? O calor específico do silício é igual a 705 J/kg · K.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a energia adicionada ao elemento do circuito provoca um aumento da temperatura, exatamente como se calor estivesse sendo transmitido para o elemento à taxa de 7,4 × 10^{-3} J/s. A incógnita é a *taxa* de variação da temperatura.

PREPARAR: conforme a Equação (17.13), a variação de temperatura ΔT em kelvins é proporcional ao calor transferido em joules, de modo que a taxa de variação da temperatura em K/s é proporcional à taxa de transferência de calor em J/s.

EXECUTAR: em um segundo, Q = (7,4 × 10^{-3} J/s)(1 s) = 7,4 × 10^{-3} J. De acordo com a Equação (17.13), $Q = mc\,\Delta T$, a variação de temperatura em um segundo é dada por

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{7{,}4 \times 10^{-3}\ \text{J}}{(23 \times 10^{-6}\ \text{kg})(705\ \text{J/kg} \cdot \text{K})} = 0{,}46\ \text{K}$$

De modo alternativo, dividindo ambos os membros da Equação (17.14) por dt e reagrupando, obtemos

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{mc}\frac{dQ}{dt} = \frac{7{,}4 \times 10^{-3}\ \text{J/s}}{(23 \times 10^{-6}\ \text{kg})(705\ \text{J/kg} \cdot \text{K})} = 0{,}46\ \text{K/s}$$

AVALIAR: com essa taxa de aumento de temperatura (27 K a cada minuto), o elemento do circuito seria autodestruído em pouco tempo. A transferência de calor é um fator importante no projeto dos elementos usados em circuitos eletrônicos.

Calor específico molar

Algumas vezes é mais conveniente descrever a quantidade de uma substância em termos de *moles n* em vez de especificar a *massa m* do material. Lembrando dos seus estudos de química, você sabe que um mol de qualquer substância pura sempre contém o mesmo número de moléculas. (Discutiremos esse ponto com mais detalhes no Capítulo 18.) A letra M indica o *mol* ou *massa molar* de qualquer substância. (A grandeza M, algumas vezes, é chamada de *peso molecular*; porém a expressão *massa molar* é mais apropriada: essa grandeza depende da massa da molécula, e não do seu peso.) Por exemplo, a massa molar da água é igual a 18.0 g/mol = 18.0 × 10^{-3} kg/mol: um mol de água possui massa igual a 18.0 g = 0.0180 kg. A massa total m de um material é igual à massa molecular M vezes o número de moles n.

$$m = nM \tag{17.16}$$

Substituindo a massa m na Equação (17.13) pelo produto nM, achamos

$$Q = nMc\,\Delta T \tag{17.17}$$

O produto Mc denomina-se **calor específico molar** (ou simplesmente *calor molar*) e será designado pela letra C (maiúscula). Usando essa notação, podemos reescrever a Equação (17.17) na forma

$$Q = nC\,\Delta T \quad \text{(calor necessário para a variação de temperatura de } n \text{ moles)} \tag{17.18}$$

Comparando essa equação com a Equação (17.15), podemos expressar o calor específico molar C (calor por mol por variação da temperatura) em termos de calor específico c (calor por massa por variação da temperatura) e da massa molar M (massa por mol):

$$C = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} = Mc \quad \text{(calor específico molar)} \tag{17.19}$$

Por exemplo, o calor específico molar da água é

$$C = Mc = (0{,}0180\ \text{kg/mol})(4190\ \text{J/kg} \cdot \text{K}) = 75{,}4\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

Na Tabela 17.3, encontramos os valores do calor específico e do calor específico molar de diversas substâncias. Note o valor especialmente alto do calor específico da água (Figura 17.18).

ATENÇÃO O significado de 'calor específico' O termo *calor específico* não é muito apropriado, porque pode sugerir a idéia errada de que um corpo *contém* certa quantidade de calor. Lembre-se de que calor é energia em trânsito entre corpos, não a energia contida em um corpo.

Medir precisamente o calor específico e o calor específico molar requer uma grande habilidade experimental. Normalmente, a quantidade de energia fornecida ao sistema é determinada medindo-se a corrente e a tensão que aquece um fio enrolado em torno do material. A variação de temperatura ΔT é medida com um termômetro ou com um termopar no interior do material. Isso parece simples, porém é necessário que se tome muito

Figura 17.18 A água possui um calor específico muito maior do que o do vidro ou de metais usados em utensílios de cozinha. Isso explica por que a água leva vários minutos para ferver, enquanto a chaleira ou panela atingem rapidamente uma temperatura elevada.

cuidado para evitar transferência de calor entre o material e o meio ambiente. As medidas de materiais sólidos normalmente são realizadas mantendo-se a pressão atmosférica constante; os valores correspondentes são denominados calores específicos à pressão constante, simbolizados por c_p ou C_p. Quando a substância é um gás, em geral é mais fácil mantê-la dentro de um recipiente a *volume* constante; os valores correspondentes denominam-se calores *específicos a volume constante*, designados por c_v ou C_v. Para uma dada substância, C_v é diferente de C_p. Se o sistema pode se expandir à medida que o calor é transferido, existe uma troca de energia adicional, porque o sistema realiza um trabalho sobre as vizinhanças. Se o volume permanece constante, o sistema não realiza nenhum trabalho. Nos gases, a diferença entre C_p e C_v é significativa. Na Seção 19.7, estudaremos em detalhe os calores específicos dos gases.

Tabela 17.3 Calor específico e calor específico molar (pressão constante)

Substância	Calor específico, c (J/kg · K)	Massa molar, M (kg/mol)	Calor específico molar, C (J/mol · K)
Alumínio	910	0,0270	24,6
Berílio	1970	0,00901	17,7
Cobre	390	0,0635	24,8
Álcool etílico	2428	0,0461	111,9
Glicol de etileno	2386	0,0620	148,0
Gelo (0 °C)	2.00	0,0180	37,8
Ferro	470	0,0559	26,3
Chumbo	130	0,207	26,9
Mármore ($CaCO_3$)	879	0,100	87,9
Mercúrio	138	0,201	27,7
Sal (NaCl)	879	0,0585	51,4
Prata	234	0,108	25,3
Água (líquida)	4190	0,0180	75,4

A última coluna da Tabela 17.3 mostra algo interessante. Os calores específicos molares de quase todos os sólidos elementares possuem aproximadamente o mesmo valor, cerca de 25 J/mol · K. Essa correlação, denominada *regra de Dulong e Petit* (em homenagem aos seus descobridores), é a base de uma idéia importante. O número de átomos contidos em um mol de qualquer elemento é sempre o mesmo. Isso significa que, considerando uma base *por átomo*, a mesma quantidade de calor é necessária para elevar em um determinado número de graus a temperatura de todos esses elementos, embora as *massas* dos átomos sejam muito diferentes. O calor necessário para produzir um dado aumento de temperatura depende somente da *quantidade* de átomos que a amostra contém, não da massa de cada átomo. No Capítulo 18, ao estudarmos do ponto de vista molecular os detalhes do calor específico, veremos por que a regra de Dulong e Petit funciona tão bem.

Teste sua compreensão da Seção 17.5 Coloque em ordem as seguintes substâncias, em termos de quantidade de calor necessária para elevar a sua temperatura de 20 °C a 21 °C, do maior ao menor valor: (i) um quilograma de mercúrio; (ii) um quilograma de álcool etílico; (iii) um mol de mercúrio; (iv) um mol de álcool etílico. ❚

17.6 Calorimetria e transições de fase

Calorimetria significa "medida de calor". Já discutimos a transferência de energia (calor) envolvida em variações de temperatura. Ocorre também transferência de calor nas *transições de fase*, tais como a liquefação do gelo ou a ebulição da água. Compreendendo essas relações de calor adicionais, podemos analisar vários problemas envolvendo quantidade de calor.

Transições de fase

Utilizamos a palavra **fase** para designar qualquer estado específico da matéria, tal como o de um sólido, um líquido ou um gás. O composto H_2O existe na *fase sólida* como gelo, na *fase líquida* como água e na *fase gasosa* como vapor d'água. A transição de uma fase para a outra é chamada de **transição de fase** ou *mudança de fase*. Em uma dada pressão, a transição de fase ocorre em uma temperatura definida, sendo usualmente acompanhada por uma emissão ou absorção de calor e por uma variação de volume e de densidade.

Um exemplo conhecido da transição de fase é a liquefação do gelo. Quando fornecemos calor ao gelo a 0 °C na pressão atmosférica normal, a temperatura do gelo *não* aumenta. O que ocorre é que uma parte do gelo derrete e se transforma em água líquida. Adicionando-se calor lentamente de modo que seja mantida a temperatura do sistema muito próxima do equilíbrio térmico, a temperatura do sistema permanece igual a 0 °C até que todo o gelo seja fundido (Figura 17.19). O calor fornecido a esse sistema não é

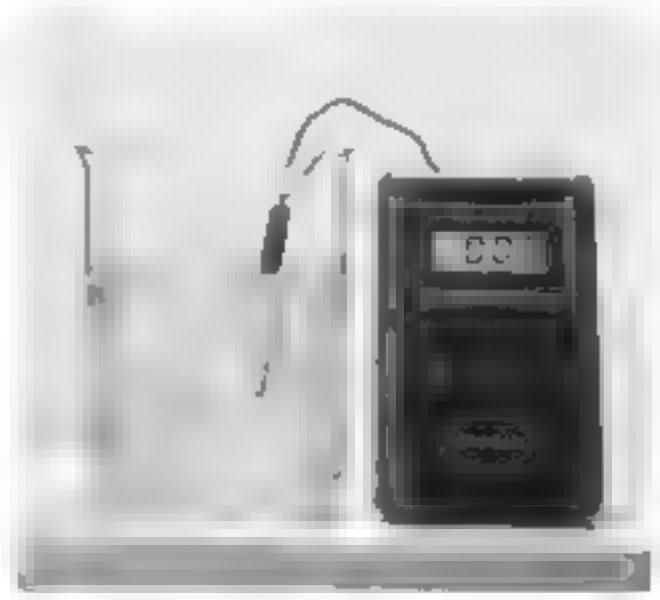


Figura 17.19 O ar circundante está à temperatura ambiente, mas essa mistura de água e gelo permanece a 0 °C até que todo o gelo tenha derretido e que a mudança de fase se complete.

usado para fazer sua temperatura aumentar, mas sim para produzir uma *transição de fase* de sólido para líquido.

São necessários $3{,}34 \times 10^5$ J de calor para converter 1 kg de gelo a 0 °C em 1 kg de água líquida a 0 °C em condições normais de pressão atmosférica. O calor necessário por unidade de massa denomina-se **calor de fusão** (algumas vezes chamado de *calor latente de fusão*), designado por L_f. Para a água submetida a uma pressão atmosférica normal, o calor de fusão é dado por

$$L_f = 3{,}34 \times 10^5 \text{ J/kg} = 79{,}6 \text{ cal/g} = 143 \text{ Btu/lb}$$

Generalizando, para liquefazer a massa m de um sólido cujo calor de fusão é L_f, é necessário fornecer ao material uma quantidade de calor Q dada por

$$Q = mL_f$$

Esse processo é *reversível*. Para congelar a água líquida a 0 °C, devemos *retirar* calor da água; o módulo do calor é o mesmo, mas, nesse caso, Q é negativo, porque estamos retirando calor, e não adicionando. Para englobar essas duas possibilidades e para incluir outras transições de fase, podemos escrever

$$Q = \pm mL \qquad \begin{array}{l}\text{(transferência de calor em uma}\\ \text{transição de fase)}\end{array} \qquad (17.20)$$

O sinal positivo (calor entrando no sistema) é usado quando o sólido se funde; o sinal negativo (calor saindo do sistema) é usado quando o líquido se solidifica. O calor de fusão depende do material e também varia ligeiramente com a pressão.

Para qualquer material, a uma dada pressão, a temperatura de fusão é sempre igual à temperatura de liquefação. Essa temperatura única em que a fase líquida coincide com a fase sólida (água e gelo, por exemplo) caracteriza uma condição chamada de **equilíbrio de fase**.

Podemos repetir o raciocínio anterior para o caso da *ebulição* ou *vaporização*, uma transição da fase líquida para a fase gasosa. O calor correspondente (por unidade de massa) denomina-se **calor de vaporização** L_v. Sob pressão atmosférica normal, o calor de vaporização L_v da água é

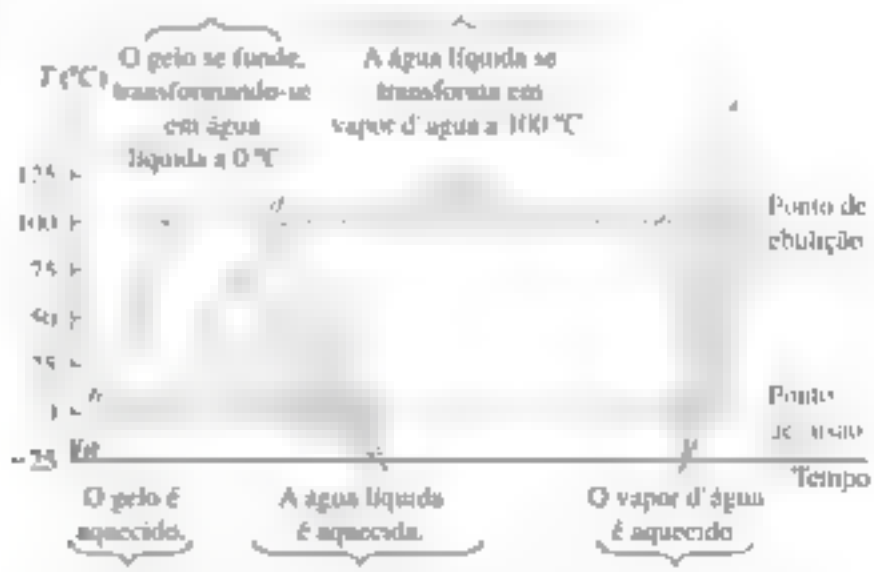
$$L_v = 2{,}256 \times 10^6 \text{ J/kg} = 539 \text{ cal/g} = 970 \text{ Btu/lb}$$

Ou seja, é necessário fornecer $2{,}256 \times 10^6$ J para fazer 1 kg de água líquida se transformar em 1 kg de vapor d'água a 100 °C. Em comparação, o calor necessário para aquecer 1 kg de água de 0 °C até 100 °C é dado por $Q = mc\Delta T = (1{,}0 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg} \cdot \text{°C}) \times (100 \text{ °C}) = 4{,}19 \times 10^5$ J, menos do que um quinto do calor necessário para a vaporização da água a 100 °C. Esse resultado está de acordo com nossa experiência cotidiana na cozinha: uma panela com água pode atingir a temperatura de ebulição em alguns minutos, porém é necessário um tempo muito maior para fazer a água vaporizar completamente.

Como a fusão, a ebulição é uma transição de fase reversível. Quando retiramos calor de um vapor, na temperatura de ebulição, o gás retorna para a fase líquida, ou se *condensa*, cedendo ao ambiente a mesma quantidade de calor que foi necessária para vaporizá-lo (calor de vaporização). A uma dada pressão, a temperatura de ebulição coincide com a temperatura de condensação; nessa temperatura existe um equilíbrio de fase no qual a fase líquida coexiste com a fase gasosa.

Tanto L_v quanto a temperatura de ebulição de um dado material dependem da pressão. Em um local elevado, como Ilatiaia, por exemplo, onde a pressão atmosférica média é menor do que a do nível do mar, a água ferve a uma temperatura menor (cerca de 95 °C) do que a temperatura de ebulição da água em um local no nível do mar (100 °C). Nessa pressão menor, o calor de vaporização, aproximadamente igual a $2{,}27 \times 10^6$ J/kg, é ligeiramente maior do que o calor de vaporização à pressão atmosférica normal.

Figura 17.20 O gálio metálico, aqui mostrado liquefazendo-se na mão de uma pessoa, é um dos poucos elementos que se fundem nas vizinhanças da temperatura ambiente. Sua temperatura de fusão é 29,8 °C, e seu calor de fusão é igual a $8{,}04 \times 10^4$ J/kg.


T (°C)
O gelo se funde, transformando-se em água líquida a 0 °C
A água líquida se transforma em vapor d'água a 100 °C
Ponto de ebulição
Tempo
O gelo é aquecido.
A água líquida é aquecida.
O vapor d'água é aquecido

Transições de fase da água. Durante esses períodos, a temperatura permanece constante e a transição de fase ocorre à medida que o calor é fornecido: $Q = \pm mL$.

A temperatura da água varia. Durante esses períodos, a temperatura sobe à medida que o calor é fornecido: $Q = mc\Delta T$

Figura 17.21 Gráfico da temperatura em função do tempo de uma amostra de água inicialmente na fase sólida (gelo). O calor é fornecido à amostra a taxa constante. A temperatura permanece constante durante todas as mudanças de fase, desde que a pressão permaneça constante.

Tabela 17.4 Calor de fusão e calor de vaporização

Substância	Ponto de fusão normal		Calor de fusão, L_f (J/kg)	Ponto de ebulição normal		Calor de vaporização, L_v (J/kg)
	K	C		K	C	
Hélio	*	*	*	4,216	−268,93	$20,9 \times 10^3$
Hidrogênio	13,84	−259,31	$58,6 \times 10^3$	20,26	−252,89	452×10^3
Nitrogênio	63,18	−209,97	$25,5 \times 10^3$	77,34	−195,8	201×10^3
Oxigênio	54,36	−218,79	$13,8 \times 10^3$	90,18	−182,9	213×10^3
Álcool etílico	159	−114	$104,2 \times 10^3$	351	78	854×10^3
Mercúrio	234	−39	$11,8 \times 10^3$	630	357	272×10^3
Água	273,15	0,0	334×10^3	373,15	100,0	2256×10^3
Enxofre	392	119	$38,1 \times 10^3$	717,75	444,60	326×10^3
Chumbo	600,5	327,3	$24,5 \times 10^3$	2023	1750	871×10^3
Antimônio	903,65	630,50	165×10^3	1713	1440	561×10^3
Prata	1233,95	960,80	$88,3 \times 10^3$	2466	2193	2336×10^3
Ouro	1336,15	1063,0	$64,5 \times 10^3$	2933	2660	1578×10^3
Cobre	358	1083	134×10^3	1460	187	5069×10^3

* É necessário aplicar uma pressão maior do que 25 atm para fazer o hélio solidificar. A 1 atm de pressão o hélio permanece líquido até o zero absoluto.

Na Tabela 17.4 fornecemos o calor de fusão e de vaporização de diversas substâncias e as respectivas temperaturas de fusão e ebulição sob pressão atmosférica normal. Pouquíssimos *elementos* possuem temperaturas de fusão nas vizinhanças da temperatura ambiente; um deles é o gálio metálico, que você pode ver na Figura 17.20.

A Figura 17.21 mostra como a temperatura varia quando fornecemos calor continuamente a uma amostra de gelo com temperatura inicial abaixo de 0 °C (ponto *a*). A temperatura aumenta até ser atingido o ponto de fusão (ponto *b*). A seguir, enquanto se fornece mais calor, a temperatura permanece constante até que todo gelo seja fundido (ponto *c*). Então a temperatura volta a subir novamente até atingir a temperatura de ebulição (ponto *d*). Nesse ponto, a temperatura permanece constante até que toda a água seja transformada em vapor d'água (ponto *e*). Caso a taxa de fornecimento de calor seja constante, a reta referente ao aquecimento da fase sólida (gelo) é mais inclinada do que a reta referente à fase líquida (água). Você sabe por quê? (Ver a Tabela 17.3.)

Em certas circunstâncias, uma substância pode passar diretamente da fase sólida para a fase gasosa. Esse processo denomina-se *sublimação*, e dizemos que o sólido *sublima*. O calor de transição correspondente denomina-se *calor de sublimação*, L_s. O dióxido de carbono líquido não pode existir a uma pressão menor do que cerca de 5×10^5 Pa (cerca de 5 atm), e o "gelo seco" (dióxido de carbono sólido) sublima na pressão atmosférica. A sublimação da água em um alimento congelado produz fumaça em uma geladeira. O processo inverso, uma transição da fase vapor para a fase sólida, ocorre quando se forma gelo sobre a superfície de um corpo frio, tal como no caso da serpentina de um refrigerador.

A água muito pura pode ser resfriada até diversos graus abaixo do ponto de congelamento sem se solidificar; o estado de equilíbrio instável resultante denomina-se *super-resfriado*. Quando jogamos nessa água um pequeno cristal de gelo, ou quando a agitamos, ela se cristaliza em um segundo ou em uma fração de segundo. O *vapor* d'água super-resfriado condensa rapidamente, formando gotículas de névoa na presença de alguma perturbação, como partículas de poeira ou radiações ionizantes. Esse princípio é usado na chamada "semeadura de nuvens" (bombardeio de nuvens com nitrato de prata), que geralmente possuem vapor d'água super-resfriado, provocando a condensação e a chuva.

Algumas vezes um líquido pode ser *superaquecido* acima da sua temperatura de ebulição normal. Novamente qualquer perturbação pequena, tal como a agitação do líquido ou a passagem de partículas carregadas em seu interior, produz ebulição local com a formação de bolhas.

Os sistemas de aquecimento a vapor de edifícios utilizam processos de vaporização e condensação para transferir calor do aquecedor para os radiadores. Cada quilograma de água que se transforma em vapor no *boiler* (aquecedor) absorve cerca de 2×10^{-6} J (o calor de vaporização L_v da água) do *boiler* e liberta essa mesma quantidade quando se condensa nos radiadores. Os processos de vaporização e de condensação também são usados em refrigeradores, condicionadores de ar e em bombas de calor. Esses sistemas serão discutidos no Capítulo 20.

Os mecanismos de controle de temperatura de muitos animais de sangue quente são baseados no calor de vaporização, removendo o calor do corpo ao usá-lo na vaporização da água da língua (respiração arquejante) ou da pele (transpiração). O esfriamento produzido pela vaporização possibilita a

manutenção da temperatura constante do corpo humano em um deserto seco e quente, onde a temperatura pode atingir até 55 °C. A temperatura da pele pode permanecer até cerca de 30 °C mais fria do que a temperatura do ar ambiente. Nessas circunstâncias, uma pessoa normal perde vários litros de água por dia por meio da transpiração, e essa água precisa ser reposta. Veteranos que fazem excursões em desertos, entre eles um dos autores deste livro, afirmam que, no deserto, qualquer cantil de menos de um galão (aproximadamente 3,78 litros) será visto como um brinquedo! O resfriamento produzido pela vaporização explica também por que você sente frio ao sair de uma piscina (Figura 17.22).

O resfriamento produzido pela vaporização é também usado para resfriar edifícios em climas secos e quentes, e para fazer condensar e reciclar o vapor 'usado' em usinas geradoras termelétricas com aquecimento produzido pela queima de carvão ou por reações termonucleares. É isso que ocorre naquelas enormes torres de concreto que você vê nas vizinhanças dessas usinas.

Reações químicas, tais como uma combustão, são análogas a uma transição de fase no que diz respeito ao envolvimento de uma troca de calor. A combustão completa de um grama de gasolina produz cerca de 46000 J, ou cerca de 11000 cal, de modo que o **calor de combustão** L_c de gasolina é dado por

$$L_c = 46000\ \text{J/g} = 4{,}6 \times 10^7\ \text{J/kg}$$

Os valores associados à energia dos alimentos podem ser definidos de modo semelhante; a unidade de energia obtida de um alimento, embora seja chamada de caloria, é na verdade a *quilocaloria*, igual a 1000 cal ou 4186 J. Quando dizemos que um grama de manteiga "contém 6 calorias", queremos dizer que ela libera 6 kcal de calor (6000 cal ou 25000 J) quando ocorre uma reação entre o oxigênio e os átomos de carbono e de hidrogênio da manteiga (com o auxílio de enzimas), e os produtos da reação são o CO_2 e H_2O. Nem toda essa energia é utilizada diretamente para produzir trabalho mecânico útil. Estudaremos a *eficiência* da utilização da energia no Capítulo 20.

Figura 17.22 Mesmo que água tenha sido aquecida e que seja um dia quente, estas crianças sentirão frio quando saírem da piscina. Isso acontece porque a água evapora da pele, removendo o calor de vaporização do corpo. Para não sentir frio, a criança precisa secar a pele imediatamente.

Cálculos envolvendo troca de calor

Vamos analisar alguns exemplos de calorimetria (cálculos envolvendo troca de calor). O princípio básico é muito simples: quando ocorre troca de calor entre dois corpos isolados do meio ambiente, o calor perdido por um dos corpos deve ser igual ao calor ganho pelo outro corpo. O calor é uma energia em trânsito, portanto esse princípio nada mais é do que uma consequência do princípio da conservação da energia. Por tratar de uma grandeza que se conserva, a calorimetria é, em muitos aspectos, a mais simples das teorias físicas!

PROBLEMAS DE CALORIMETRIA

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* quando ocorre fluxo de calor entre dois corpos que estão isolados do seu ambiente, a quantidade de calor perdida por um corpo deve ser igual à quantidade ganha pelo outro corpo.

PREPARAR *por meio dos seguintes passos:*

1. Identifique quais objetos estão trocando calor. Para não confundir os sinais algébricos, considere toda quantidade de calor que *entra* em um corpo *positiva*, e toda quantidade que *sai* de um corpo *negativa*. Quando dois ou mais corpos interagem, a *soma algébrica* das quantidades de calor transferidas deve ser igual a zero.
2. Todos os objetos passarão por uma variação de temperatura sem transição de fase, por uma transição de fase a temperatura constante ou por ambos os processos. Use a Equação (17.13) para lidar com as variações de temperatura, e a Equação (17.20) para lidar com as transições de fase.
3. Consulte a Tabela 17.3 quando precisar do calor específico ou do calor específico molar, e a Tabela 17.4 quando precisar dos calores de fusão ou vaporização.
4. Não deixe de identificar quais são as grandezas conhecidas e quais são as incógnitas do problema.

EXECUTAR *o problema da seguinte forma:*

1. Use a Equação (17.13) e/ou a Equação (17.20) para encontrar as variáveis procuradas. Muitas vezes a incógnita é uma das temperaturas. Represente-a por um símbolo algébrico tal como T. Se o corpo possui uma temperatura inicial de 20 °C e uma temperatura desconhecida T, a variação de temperatura do corpo é dada por $\Delta T = T_{final} - T_{inicial} = T - 293$ °C (não 293 °C − T).
2. Em problemas nos quais ocorre uma transição de fase, tal como no caso da fusão do gelo, talvez você não saiba previamente se *todo* o material sofre uma transição de fase ou se somente uma parte muda de fase. Podemos sempre supor uma hipótese ou outra, e quando o cálculo resultante fornece um resultado absurdo (tal com uma temperatura final maior ou menor do que *todas* as temperaturas iniciais), você conclui que a hipótese inicial estava errada. Refaça os cálculos e tente novamente!

AVALIAR *sua resposta:* um erro comum é trocar o sinal algébrico de Q ou ΔT. Confira os seus cálculos e tenha a certeza de que os resultados finais são fisicamente coerentes.

Exemplo 17.5

VARIAÇÃO DE TEMPERATURA SEM TRANSIÇÃO DE FASE Uma geóloga trabalhando no campo toma seu café-da-manhã em uma xícara de alumínio. A xícara possui uma massa igual a 0,120 kg e estava inicialmente a 20 °C quando a geóloga a encheu com 0,300 kg de um café que estava inicialmente a uma temperatura de 70 °C. Qual é a temperatura final depois que o café e a xícara atingem o equilíbrio térmico? (Suponha que o calor específico do café seja igual ao da água, e que não exista nenhuma troca de calor com o meio ambiente.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR os dois objetos que precisamos considerar são a xícara e o café, e a incógnita é a temperatura final comum do sistema.

PREPARAR não ocorre nenhuma transição de fase nessa situação, de modo que é suficiente usar a Equação (17.13).

EXECUTAR usando a Tabela 17.3, o calor perdido (negativo) pelo café é dado por

$$Q_{café} = m_{café}\, c_{água}\, \Delta T_{café}$$

$$= (0{,}300\ \text{kg})(4190\ \text{J/kg} \cdot \text{K})(T - 70\ ^\circ\text{C})$$

O calor ganho (positivo) pela xícara de alumínio é dado por

$$Q_{alumínio} = m_{alumínio}\, c_{alumínio}\, \Delta T_{alumínio}$$

$$= (0{,}120\ \text{kg})(910\ \text{J/kg} \cdot \text{K})(T - 20\ ^\circ\text{C})$$

A soma dessas duas quantidades de calor deve ser igual a zero, obtendo-se a seguinte equação algébrica para T

$$Q_{café} + Q_{alumínio} = 0, \quad \text{ou}$$

$$(0{,}300\ \text{kg})(4190\ \text{J/kg} \cdot \text{K})(T - 70\ ^\circ\text{C}) + (0{,}120\ \text{kg})(910\ \text{J/kg} \cdot \text{K})(T - 20\ ^\circ\text{C}) = 0$$

A solução dessa equação é $T = 66\ ^\circ\text{C}$.

AVALIAR a temperatura final é muito mais próxima da temperatura inicial do café do que da xícara de alumínio, a água possui um calor específico muito maior do que o calor específico do alumínio; além disso, a massa do café é mais do que o dobro da massa da xícara. Podemos também calcular as quantidades de calor substituindo o valor $T = 66\ ^\circ\text{C}$ nas equações originais. Encontramos: $Q_{café} = -5{,}0 \times 10^3\ \text{J}$ e $Q_{alumínio} = +5{,}0 \times 10^3\ \text{J}$. $Q_{café}$ é negativo, o que significa que o café perde calor.

Exemplo 17.6

VARIAÇÃO DE TEMPERATURA COM TRANSIÇÃO DE FASE Uma estudante de física deseja resfriar 0,25 kg de Coca-Cola *Diet* (constituída, em sua maior parte, por água), inicialmente a uma temperatura de 25 °C, adicionando gelo a –20 °C. Qual quantidade de gelo que ela deve usar para que a temperatura final seja igual a 0 °C, sabendo que todo gelo se funde e que o calor específico do recipiente pode ser desprezado?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR o gelo e a Coca são os objetos que trocam calor. A Coca sofre apenas uma variação de temperatura, enquanto o gelo passa tanto por uma variação de temperatura quanto por uma transição de fase de sólido para líquido. A incógnita é a massa do gelo, m_{gelo}.

PREPARAR usamos a Equação (17.13) para calcular a quantidade de calor envolvida no aquecimento do gelo até 0 °C e no resfriamento da Coca até 0 °C. Além disso, precisaremos da Equação (17.20) para calcular o calor necessário para fundir o gelo a 0 °C.

EXECUTAR a Coca perde calor, então o calor fornecido a ela é negativo:

$$Q_{Coca} = m_{Coca}\, c_{água}\, \Delta T_{Coca}$$

$$= (0{,}25\ \text{kg})(4190\ \text{J/kg} \cdot \text{K})(0\ ^\circ\text{C} - 25\ ^\circ\text{C})$$

$$= -26{,}000\ \text{J}$$

Conforme a Tabela 17.3, o calor específico do gelo (diferente do calor específico da água líquida) é igual a $2{,}1 \times 10^3\ \text{J/kg} \cdot \text{K}$. Seja m_{gelo} a massa do gelo, então o calor Q necessário para aquecer a água desde –20 °C até 0 °C é

$$Q_1 = m_{gelo}\, c_{gelo}\, \Delta T_{gelo}$$

$$= m_{gelo}(2{,}1 \times 10^3\ \text{J/kg} \cdot \text{K})|0\ ^\circ\text{C} - (-20\ ^\circ\text{C})|$$

$$= m_{gelo}(4{,}2 \times 10^4\ \text{J/kg})$$

De acordo com a Equação (17.20), a quantidade de calor adicional Q_2 necessária para fundir essa quantidade de gelo é igual ao produto da massa pelo calor de fusão. Usando a Tabela 17.4, achamos

$$Q_2 = m_{gelo} L_f$$

$$= m_{gelo}(3{,}34 \times 10^5\ \text{J/kg})$$

A soma das três quantidades anteriores deve ser igual a zero:

$$Q_{Coca} + Q_1 + Q_2 = -26{,}000\ \text{J} + m_{gelo}(42000\ \text{J/kg}) + m_{gelo}(334000\ \text{J/kg}) = 0$$

Explicitando m_{gelo} obtemos $m_{gelo} = 0{,}069\ \text{kg} = 69\ \text{g}$.

AVALIAR essa massa corresponde a três ou quatro cubinhos de gelo de tamanho médio, o que parece razoável para a quantidade de Coca deste problema.

Exemplo 17.7

O QUE VAMOS TER PARA O JANTAR? Uma panela de cobre pesada com massa igual a 2,0 kg (incluindo a tampa) está a uma temperatura de 150 °C. Você despeja 0,10 kg de água a 25 °C no interior dessa panela, a seguir fecha rapidamente a tampa de modo que não ocorra nenhuma perda de vapor. Calcule a temperatura final da panela e do seu conteúdo, e determine a fase (líquida ou gasosa) da água. Suponha que não haja nenhuma perda de calor para o ambiente.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR os dois objetos que trocam calor são a água e a panela. Note que há três possíveis alternativas para este problema. Na primeira, nenhuma parte da água ferve e a temperatura final é menor do que 100 °C; na segunda, uma parte da água ferve e no equilíbrio final existe uma mistura de água e vapor d'água a 100 °C ou mais; na terceira, toda água ferve, obtendo-se 0,10 kg de vapor a uma temperatura de 100 °C ou mais.

PREPARAR mais uma vez, usamos a Equação (17.13) para o calor transferido em uma variação de temperatura, e a Equação (17.20) para o calor transferido em uma transição de fase.

EXECUTAR É mais simples o cálculo usando a primeira hipótese. Seja T a temperatura final do líquido e da panela de cobre. Como não estamos supondo nenhuma mudança de fase, o calor cedido por um material é absorvido pelo outro; logo, a soma das quantidades de calor fornecidas aos dois materiais é

$$\begin{aligned} Q_{água} + Q_{cobre} &= m_{água}\, c_{água}\,(T - 25\ °C) \\ &\quad + m_{cobre}\, c_{cobre}(T - 150\ °C) \\ &= (0{,}20\ kg)(4190\ J/kg \cdot K)(T - 25\ °C) \\ &\quad + (2{,}0\ kg)(390\ J/kg \cdot K)(T - 150\ °C) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo essa equação, obtemos $T = 106\ °C$. Porém, esse valor é maior do que o valor da temperatura de ebulição da água, o que contradiz a hipótese de que nenhuma parte da água vaporeza! Logo, a primeira hipótese está errada; pelo menos uma parte da água deve sofrer uma transição de fase.

Para tentar a segunda hipótese, segundo a qual a temperatura final é de 100 °C, devemos achar a fração da água que é convertida na fase gasosa. Seja x essa fração, a quantidade de calor (positiva) necessária para vaporizar esta água é $(xm_{água})\,L_v$. Considerando $T = 100\ °C$, temos

$$\begin{aligned} Q_{água} &= m_{água}\, c_{água}\,(100\ °C - 25\ °C) + (xm_{água})\,L_v \\ &= (0{,}10\ kg)(4190\ J/kg \cdot K)(75\ °C) \\ &\quad + x(0{,}10\ kg)(2{,}256 \times 10^6\ J/kg) \\ &= 3{,}14 \times 10^4\ J + x(2{,}256 \times 10^5\ J) \\ Q_{cobre} &= m_{cobre}\, c_{cobre}\,(100\ °C - 150\ °C) \\ &= (2{,}0\ kg)(390\ J/kg \cdot K)(-50\ K) = -3{,}90 \times 10^4\ J \end{aligned}$$

A exigência de que a soma algébrica de todas as quantidades de calor deve ser igual a zero nos conduz a

$$\begin{aligned} Q_{água} + Q_{cobre} &= 3{,}14 \times 10^4\ J + x(2{,}256 \times 10^5\ J) \\ &\quad - 3{,}90 \times 10^4\ J = 0 \\ x &= \frac{3{,}90 \times 10^4\ J - 3{,}14 \times 10^4\ J}{2{,}256 \times 10^5\ J} = 0{,}034 \end{aligned}$$

Esse resultado faz sentido, e concluímos que a temperatura final da água e do cobre é igual a 100 °C. Da quantidade inicial de 0,10 kg de água, uma parcela de $0{,}034(0{,}10\ kg) = 0{,}0034\ kg = 3{,}4\ g$ foi convertida em vapor a 100 °C.

AVALIAR caso o valor encontrado para x fosse maior do que 1, teríamos novamente uma contradição (a fração da água vaporizada não pode ser maior do que 1). Nesse caso, a terceira possibilidade seria a opção correta: toda a água teria sido vaporizada, e a temperatura final seria maior do que 100 °C. Você é capaz de mostrar que seria isso o que ocorreria se a quantidade de água colocada na panela a 25 °C fosse menor do que 15 g?

Exemplo 17.11

COMBUSTÃO, VARIAÇÃO DE TEMPERATURA E TRANSIÇÃO DE FASE Em um fogareiro a gasolina para acampamentos, 30% da energia liberada na queima do combustível é usada para aquecer a água na panela. Para aquecermos 1,0 L (1,0 kg) de água desde 20 °C até 100 °C e fazer a vaporização de 0,25 kg, que quantidade de gasolina é necessário queimar?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR neste problema, toda a água passa por uma variação de temperatura e parte da água também passa por uma transição de fase de líquido para gás. Isso requer uma certa quantidade de calor, que nós usamos para calcular a quantidade de gasolina que precisa ser queimada (nossa incógnita).

PREPARAR usamos as equações (17.13) e (17.20), além da ideia de calor de combustão.

EXECUTAR o calor necessário para elevar a temperatura da água de 0 °C a 100 °C é dado por

$$\begin{aligned} Q_1 &= mc\,\Delta T = (1.0\ kg)(4190\ J/kg \cdot K)(80\ K) \\ &= 3{,}35 \times 10^5\ J \end{aligned}$$

O calor necessário para vaporizar 0,25 kg de água a 100 °C é dado por

$$Q_2 = mL_v = (0{,}25\ kg)(2{,}256 \times 10^6\ J/kg) = 5{,}64 \times 10^5\ J$$

A energia total necessária é a soma das duas quantidades anteriores, ou seja, $8{,}99 \times 10^5$ J. Isso é apenas 0,30 do calor total da combustão, de modo que a energia é $(8{,}99 \times 10^5\ J)(0{,}30) = 3{,}0 \times 10^6$ J. Como mencionamos anteriormente, cada grama de gasolina libera 46000 J, então a massa necessária de gasolina é

$$\frac{3{,}0 \times 10^6\ J}{46000\ J/g} = 65\ g$$

ou cerca de 0,09 L de gasolina.

AVALIAR esse resultado demonstra a enorme quantidade de energia que pode ser liberada pela queima de gasolina, mesmo que em uma quantidade pequena. Observe que a maior parte do calor produzido foi usada para vaporizar 0,25 L de água. Você consegue mostrar que seriam necessários mais 123 g de gasolina para vaporizar a água restante?

Teste sua compreensão da Seção 17.6 Um bloco de gelo inicialmente a 0 °C é aquecido a uma taxa constante. Um tempo t é necessário para transformar o bloco de gelo completamente em vapor d'água a 100 °C. O que temos após o tempo $t/2$? (i) apenas gelo a 0 °C; (ii) uma mistura de gelo e água a 0 °C; (iii) água a uma temperatura entre 0 °C e 100 °C; (iv) uma mistura de água e vapor a 100 °C. ■

17.7 Mecanismos de transferência de calor

Já falamos sobre *condutores*, materiais que permitem a condução de calor, e *isolantes*, materiais que impedem a transferência de calor entre corpos. Vamos agora examinar com mais detalhes as *taxas* de transferência de energia. Na

cozinha, você usa uma panela de alumínio para uma boa transferência de calor entre o fogão e o interior da panela, enquanto a parede da geladeira é feita com um material que *impede* a transferência de calor para o interior da geladeira. Como você pode descrever a diferença entre esses dois materiais?

Os três mecanismos de transferência de calor são a condução, a convecção e a radiação. A *condução* ocorre no interior de um corpo ou entre dois corpos em contato. A *convecção* depende do movimento da massa de uma região para outra. A *radiação* é a transferência de calor que ocorre pela radiação eletromagnética, tal como a luz solar, sem que seja necessária a presença de matéria no espaço entre os corpos.

Condução

Quando você segura uma das extremidades de uma barra de cobre e coloca a outra extremidade sobre uma chama, a extremidade que você está segurando fica cada vez mais quente, embora ela não esteja em contato direto com a chama. O calor é transferido por **condução** através do material até atingir a extremidade mais fria. Em nível atômico, verificamos que os átomos de uma região quente possuem em média uma energia cinética maior do que a energia cinética dos átomos de uma região vizinha. As colisões desses átomos com os átomos vizinhos fazem com que eles lhes transmitam parte da energia. Os átomos vizinhos colidem com *outros* átomos vizinhos, e assim por diante, ao longo do material. Os átomos, em si, não se deslocam de uma região a outra do material, mas a energia cinética se desloca.

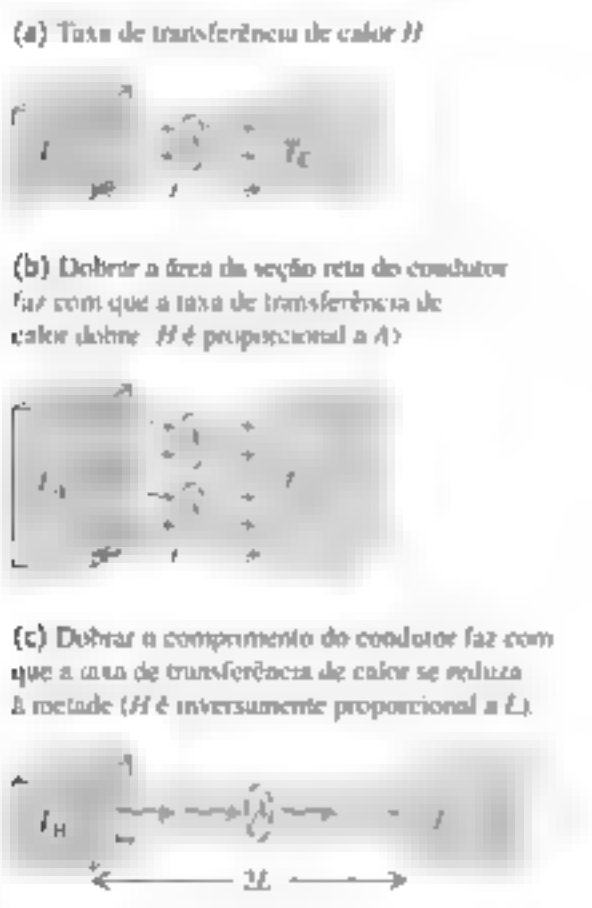

(a) Taxa de transferência de calor H
(b) Dobrar a área da seção reta do condutor faz com que a taxa de transferência de calor dobre (H é proporcional a A)
(c) Dobrar o comprimento do condutor faz com que a taxa de transferência de calor se reduza à metade (H é inversamente proporcional a L)
2L

Figura 17.23 Fluxo de calor constante produzido pela condução de calor em uma barra uniforme.

Tabela 17.5 Condutividades térmicas

Substância	k (W/m · K)
Metais	
Alumínio	205,0
Latão	109,0
Cobre	385,0
Chumbo	34,7
Mercúrio	8,3
Prata	406,0
Aço	50,2
Diversos sólidos (valores típicos)	
Tijolo (isolante)	0,15
Tijolo vermelho	0,6
Concreto	0,8
Cortiça	0,04
Feltro	0,04
Fibra de vidro	0,04
Vidro	0,8
Gelo	1,6
Lã mineral	0,04
Isopor	0,01
Madeira	0,12–0,04
Gases	
Ar	0,024
Argônio	0,016
Hélio	0,14
Hidrogênio	0,14
Oxigênio	0,023

Quase todos os metais utilizam outro mecanismo mais eficiente para conduzir o calor. No interior do metal, alguns elétrons se libertam dos seus átomos originais e ficam vagando pela rede cristalina. Esses elétrons "livres" podem transferir energia rapidamente da região mais quente para a região mais fria do metal. É por isso que os metais geralmente são bons condutores de calor. Uma barra de metal a 20 °C parece estar mais fria do que um pedaço de madeira a 20 °C porque o calor pode fluir mais facilmente entre sua mão e o metal. A presença de elétrons "livres" também faz com que os metais sejam bons condutores de eletricidade.

A transferência de calor ocorre somente entre regiões com temperaturas diferentes, e o sentido de transferência de calor é sempre da temperatura maior para a temperatura menor. A Figura 17.23a mostra uma barra de um material condutor de comprimento L com uma seção reta de área A. A extremidade esquerda da barra é mantida a uma temperatura T_H, e a extremidade direita é mantida a uma temperatura mais baixa T_C; isso faz com que o calor flua da esquerda para a direita. Os lados da barra são cobertos por um isolante ideal, de modo que o calor não pode fluir por eles.

Quando uma quantidade de calor dQ é transferida através da barra em um tempo dt, a taxa de transferência de calor é dada por dQ/dt. Chamamos essa grandeza de **taxa de transferência de calor** ou *corrente de calor*, e a designamos por H. Ou seja, $H = dQ/dt$. A experiência mostra

que a taxa de transferência de calor é proporcional à área A da seção reta da barra (Figura 17.23b) e a diferença de temperatura $(T_H - T_C)$, e inversamente proporcional ao comprimento da barra L (Figura 17.23c). Introduzindo uma constante de proporcionalidade k, denominada **condutividade térmica** do material, temos

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L} \qquad \text{(transferência de calor na condução)} \qquad (17.21)$$

A quantidade $(T_H - T_C)/L$ é a diferença de temperatura *por unidade de comprimento*, e é denominada módulo do **gradiente de temperatura**. O valor numérico de k depende do material da barra. Os materiais com valores elevados de k são bons condutores de calor; os materiais com valores pequenos de k conduzem pouco calor ou são isolantes. A Equação (17.21) também fornece a taxa de transferência de calor através de uma placa, ou de *qualquer* corpo homogêneo que possua uma seção reta A ortogonal à direção do fluxo de calor; L é o comprimento da trajetória do fluxo do calor.

As unidades de taxa de transferência de calor são as unidades de energia por tempo, ou potência; a unidade SI para a taxa de transferência de calor é o watt (1 W = 1 J/s). Podemos achar as unidades de k explicitando k na Equação (17.21). Convidamos você a verificar que as unidades SI de k são W/m · K. Alguns valores de k são apresentados na Tabela 17.5.

A condutividade térmica do ar 'morto' (ou seja, ar em repouso) é muito pequena. Um agasalho de lã mantém você quente porque aprisiona o ar entre suas fibras. De fato, muitos materiais isolantes, tais como o isopor ou a fibra de vidro, contêm grande quantidade de ar morto. A Figura 17.24 mostra um material cerâmico com propriedades térmicas bastante incomuns, inclusive uma condutividade térmica muito pequena.

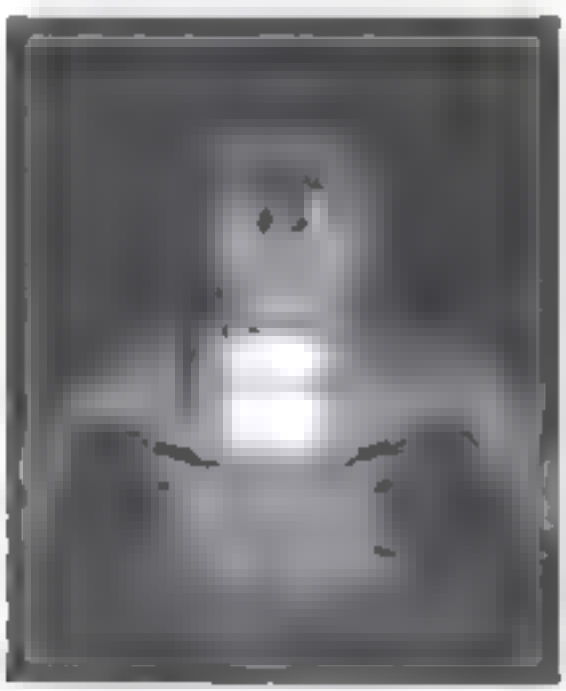


Figura 17.24 Esta placa protetora, desenvolvida para ser usada no ônibus espacial, possui propriedades térmicas extraordinárias. A condutividade térmica extremamente pequena e o calor específico pequeno desse material permitem que se segure a placa pela parte lateral, embora a elevada temperatura do seu centro seja suficiente para produzir a luz usada nesta fotografia.

Se a temperatura varia de modo não uniforme ao longo do comprimento da barra não condutora, introduzimos uma coordenada x ao longo do comprimento e escrevemos o gradiente de temperatura na forma geral dT/dx. A correspondente generalização da Equação (17.21) é dada por

$$H = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx} \qquad (17.22)$$

O sinal negativo mostra que o fluxo de calor ocorre sempre no sentido da *diminuição* da temperatura.

No isolamento térmico de edifícios, os engenheiros usam o conceito de **resistência térmica**, designado por R. A resistência térmica R de uma placa de material com área A é definida de modo que a taxa de transferência de calor H seja dada por

$$H = \frac{A(T_H - T_C)}{R} \qquad (17.23)$$

onde T_H e T_C são as temperaturas das duas faces da placa. Comparando essa relação com a Equação (17.21), vemos que R é dado por

$$R = \frac{L}{k} \qquad (17.24)$$

onde L é a espessura da placa. A unidade SI de R é 1 m² · K/W. Dobrando-se a espessura da placa, o valor de R também dobra. Uma prática comum nas novas construções em climas muito frios do hemisfério norte é empregar valores de R em torno de 30 para paredes externas e telos. Quando o material isolante é disposto em camadas, como no caso de paredes compostas, isolamento com fibra de vidro e parte externa com madeira, os valores de R são somados. Você sabe por quê? (Veja o Problema 17.110.)

CONDUÇÃO DE CALOR

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* O conceito de condução de calor está envolvido sempre que dois objetos de temperaturas diferentes são postos em contato.

PREPARAR *seguindo estes passos:*

1. Identifique a direção e o sentido do fluxo de calor no problema (do quente para o frio). Na Equação (17.21), L é sempre medido ao longo dessa direção e sentido, e A é sempre perpendicular a essa direção. Geralmente, quando uma caixa ou outro recipiente possui forma irregular, mas a espessura da parede é uniforme, você poderá considerá-la aproximadamente uma placa larga com área igual à área total da parede, e com a mesma espessura.
2. Identifique a incógnita do problema.

EXECUTAR *o problema do seguinte modo:*

1. Se o calor flui ao longo de um mesmo objeto, use a Equação (17.21) para calcular o valor da incógnita.
2. Em alguns problemas, o calor flui através de dois materiais alinhados em série. A temperatura na interface entre dois materiais possui então um valor intermediário entre T_H e T_C; represente-a pelo símbolo T. As diferenças de temperatura entre

os dois materiais serão dadas por $(T_H - T)$ e $(T - T_C)$. No fluxo estacionário, a mesma quantidade de calor deve passar através dos materiais sucessivamente, de modo que a taxa de transferência de calor H deve ser *a mesma* nos dois materiais.

3. Se existirem dois fluxos de calor *paralelos*, de tal forma que exista um fluxo de calor através de cada parte, então a taxa de transferência de calor total H será a soma de H_1 e H_2 nas partes separadas. Como exemplo, considere o fluxo de calor do interior para o exterior de uma casa, parte fluindo através do vidro da janela e outra parte fluindo através da armação que encaixa o vidro. Nesse caso, a diferença de temperatura é a mesma entre os dois percursos, porém L, A e k podem ser diferentes nos dois percursos.
4. Como sempre, é necessário usar um conjunto de unidades coerente. Caso você use um valor de k expresso em W/m · K não use distâncias em cm, calor em calorias ou T em °F.

AVALIAR *a sua resposta*: como sempre, pense se os resultados obtidos são razoáveis em termos físicos.

Exemplo 17.12

CONDUÇÃO ATRAVÉS DE UMA GELADEIRA DE ISOPOR Uma caixa de isopor usada para manter as bebidas frias em um piquenique (Figura 17.25a) possui área total (incluindo a tampa) igual a 0,80 m², e a espessura de sua parede mede 2,0 cm. A caixa está cheia de água, gelo e latas de Coca-Cola a 0 °C. Qual é a taxa de fluxo de calor para o interior da caixa, se a temperatura da parede externa for 30 °C? Qual é a quantidade de gelo que se liquefaz durante um dia?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a primeira incógnita é a taxa de transferência H. A segunda é a quantidade de gelo derretido, o que depende da taxa de transferência (calor por unidade de tempo), do tempo decorrido e do calor de fusão.

PREPARAR: usamos a Equação (17.21) para calcular a taxa de transferência de calor e a Equação (17.20) para encontrar a massa m de gelo que derrete devido ao fluxo de calor.

EXECUTAR: supomos que o fluxo de calor seja aproximadamente o mesmo que ocorreria através de uma placa com área igual a 0,80 m² e espessura igual a 2,0 cm = 0,020 m (Figura 17.25b). Achamos o valor de k na Tabela 17.5. Pela Equação (17.21), a taxa de transferência de calor (ou taxa de fluxo de calor) é dada por

$$H = kA\frac{T_H - T_C}{L} = (0{,}010\ \text{W/m}\cdot\text{K})(0{,}80\ \text{m}^2)\frac{30\ ^\circ\text{C} - 0\ ^\circ\text{C}}{0{,}020\ \text{m}}$$
$$= 12\ \text{W} = 12\ \text{J/s}$$

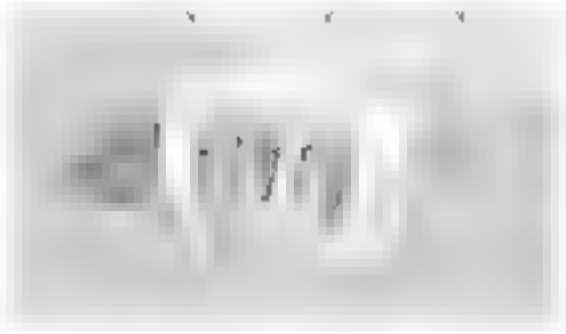
O fluxo total de calor Q em um dia (86400 s) é dado por

$$Q = Ht = (12\ \text{J/s})(86400\ \text{s}) = 1{,}04 \times 10^6\ \text{J}$$

O calor de fusão do gelo é igual a $3{,}34 \times 10^5$ J/kg, portanto a quantidade de gelo fundida por essa quantidade de calor é

$$m = \frac{Q}{L_f} = \frac{1{,}04 \times 10^6\ \text{J}}{3{,}34 \times 10^5\ \text{J/kg}} = 3{,}1\ \text{kg}$$

(a) Uma geladeira na praia



(b) Nosso esboço para este problema

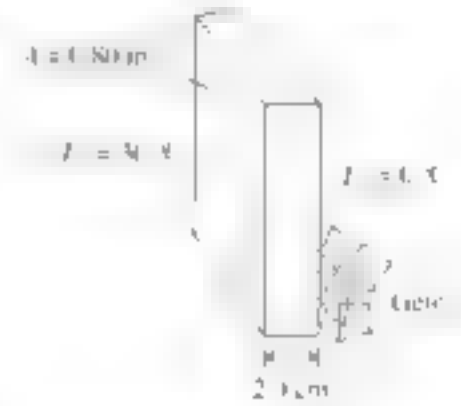


Figura 17.25 Condução de calor através das paredes de uma geladeira de isopor.

AVALIAR: a baixa taxa de transferência de calor decorre da baixa condutividade térmica do isopor. Uma quantidade significativa de calor é transferida em 24 horas, mas uma quantidade relativamente pequena de gelo se funde, porque o calor de fusão é elevado.

Exemplo 17.13

CONDUÇÃO ATRAVÉS DE DUAS BARRAS I Uma barra de aço de 10,0 cm de comprimento é soldada pela extremidade a uma barra de cobre de 20,0 cm de comprimento. As duas barras são perfeitamente isoladas em suas partes laterais. A seção reta das duas barras é um quadrado de lado igual a 2,0 cm. A extremidade livre da barra de aço é mantida a 100 °C pelo contato com vapor d'água obtido por ebulição, e a extremidade livre da barra de cobre é mantida a 0 °C por estar em contato com gelo. Calcule a temperatura na junção entre as duas barras e a taxa total da transferência de calor.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste problema, há transferência de calor entre duas barras de composições diferentes. Como discutimos na Estratégia para a solução de problemas 17.3, a taxa de transferência de calor através das barras deve ser a mesma.

PREPARAR: a Figura 17.26 mostra a situação. Usamos a Equação (17.21) duas vezes, uma para cada barra, e igualamos as duas equações de transferência de calor H_{cobre} e $H_{aço}$. Ambas as equações de transferência de calor envolvem a temperatura T na junção, e essa é uma de nossas incógnitas.

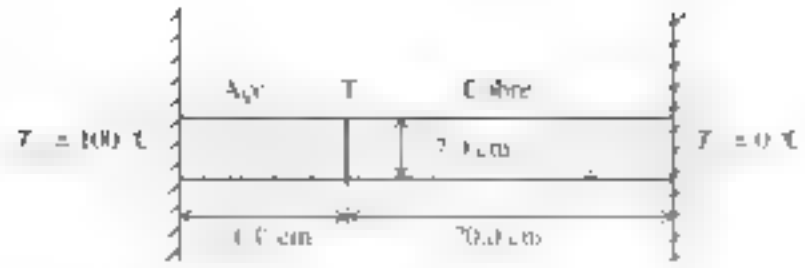


Figura 17.26 Nosso esboço para este problema.

EXECUTAR Igualando as duas expressões, obtemos:

$$H_{aço} = \frac{k_{aço}A(100\,°C - T)}{L_{aço}} = H_{cobre} = \frac{k_{cobre}A(T - 0\,°C)}{L_{cobre}}$$

A área A é a mesma e pode ser cancelada nas duas equações. Substituindo $L_{aço} = 0{,}100$ m, $L_{cobre} = 0{,}200$ m, e usando os valores de k da Tabela 17.5, achamos

$$\frac{(50{,}2\ \text{W/m}\cdot\text{K})(100\,°C - T)}{0{,}100\ \text{m}} = \frac{(385\ \text{W/m}\cdot\text{K})(T - 0\,°C)}{0{,}200\ \text{m}}$$

Reagrupando e explicitando T, encontramos

$$T = 20{,}7\ °C$$

Podemos calcular a taxa total de transferência de calor substituindo T em qualquer uma das relações anteriores.

$$H_{aço} = \frac{(50{,}2\ \text{W/m}\cdot\text{K})(0{,}0200\ \text{m})^2(100\,°C - 20{,}7\,°C)}{0{,}100\ \text{m}}$$
$$= 15{,}9\ \text{W}$$

ou

$$H_{cobre} = \frac{(385\ \text{W/m}\cdot\text{K})(0{,}0200\ \text{m})^2(20{,}7\,°C)}{0{,}200\ \text{m}} = 15{,}9\ \text{W}$$

AVALIAR Embora a barra de aço seja mais curta, a queda de temperatura ao longo de sua extensão é muito maior do que na barra de cobre (uma variação de 100 °C a 20,7 °C, no aço, comparada a uma variação de 20,7 °C a 0 °C no cobre). Essa diferença ocorre porque o aço possui uma condutividade térmica muito menor do que a do cobre.

Exemplo 17.14

CONDUÇÃO ATRAVÉS DE DUAS BARRAS II No exemplo 17.13, suponha que as duas barras estejam separadas. Uma extremidade de cada barra é mantida a 100 °C e a outra extremidade é mantida a 0 °C. Qual é a taxa *total* de transferência de calor nas duas barras?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR Neste caso, as barras estão lado a lado, e não em série. A taxa de transferência total agora é a *soma* das taxas através das duas barras.

PREPARAR A Figura 17.27 mostra a situação. Em cada barra, $T_H - T_C = 100\,°C - 0\,°C = 100$ K.

EXECUTAR Escrevemos as taxas de transferência de cada uma das duas barras individualmente, e depois as somamos para obter a taxa de transferência total.

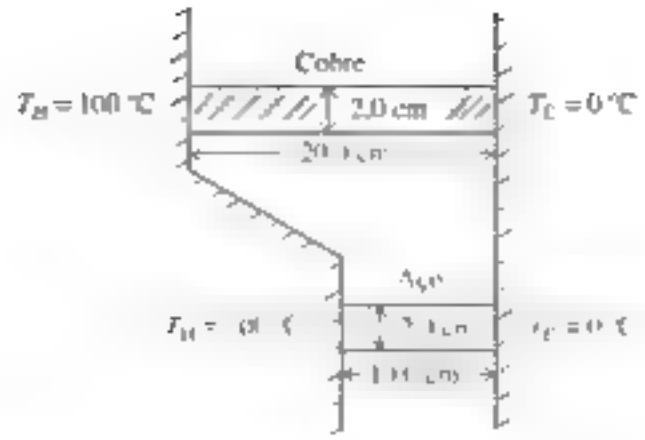


Figura 17.27 Nosso esboço para este problema.

$$H = H_{aço} + H_{cobre} = \frac{k_{aço}A(T_H - T_C)}{L_{aço}} + \frac{k_{cobre}A(T_H - T_C)}{L_{cobre}}$$
$$= \frac{(50{,}2\ \text{W/m}\cdot\text{K})(0{,}0200\ \text{m})^2(100\ \text{K})}{0{,}100\ \text{m}}$$
$$+ \frac{(385\ \text{W/m}\cdot\text{K})(0{,}0200\ \text{m})^2(100\ \text{K})}{0{,}200\ \text{m}}$$
$$= 20{,}1\ \text{W} + 77{,}0\ \text{W} = 97{,}1\ \text{W}$$

AVALIAR O fluxo de calor na barra de cobre é muito maior do que o fluxo de calor na barra de aço, embora a barra de cobre seja mais longa, porque a condutividade térmica do cobre é bem maior do que a do aço. O fluxo total de calor é muito maior do que o encontrado no Exemplo 17.13, em parte porque a seção reta total para a transferência de calor é maior, e em parte porque entre as duas barras existe uma diferença de temperatura total de 100 °C.

Convecção

A convecção é a transferência de calor ocorrida pelo movimento da massa de uma região do fluido para outra região. Exemplos familiares incluem os sistemas de aquecimento de água em residências, o sistema de refrigeração do motor de um automóvel e o fluxo do sangue pelo corpo. Quando o fluido é impulsionado pela ação de um ventilador ou de uma bomba, o processo denomina-se *convecção forçada*; quando o escoamento é produzido pela existência de uma diferença de densidade provocada por uma expansão térmica, tal como a ascensão do ar quente, o processo denomina-se *convecção natural* ou *convecção livre* (Figura 17.28).

A convecção natural na atmosfera desempenha um papel dominante na determinação das condições climáticas ao longo do dia, e a convecção nos oceanos é um importante mecanismo de transferência de calor no globo terrestre. Em uma escala menor, os pilotos de planadores e as águias utilizam as correntes de ar ascendentes oriundas do aquecimento da Terra. O mecanismo mais importante para a transferência de calor no corpo humano (utilizado para manter a temperatura do corpo constante em diferentes ambientes) é a convecção *forçada* do sangue, na qual o coração desempenha o papel de uma bomba.

Figura 17.28 Um dispositivo de aquecimento na ponta deste tubo submerso aquece a água circundante produzindo um padrão complexo de convecção livre

A transferência de calor por convecção é um processo muito complexo, e não existe nenhuma equação simples para descrevê-lo. A seguir assinalamos alguns fatos experimentais.

1. A taxa de transferência de calor por convecção é diretamente proporcional à área da superfície. É por essa razão que se usa uma área superficial grande em radiadores e aletas de refrigeração.

2. A viscosidade do fluido retarda o movimento da convecção natural nas vizinhanças de superfícies estacionárias, dando origem a uma película ao longo da superfície que, quando é vertical, costuma ter aproximadamente o mesmo valor isolante que 1,3 cm de madeira compensada ($R = 0,7$). A convecção forçada provoca uma diminuição da espessura dessa película, fazendo aumentar a taxa de transferência de calor. Isso explica por que você sente mais frio quando há um vento frio do que quando o ar está em repouso à mesma temperatura.

3. Verifica-se que a taxa de transferência de calor na convecção é aproximadamente proporcional à potência de $\frac{5}{4}$ da diferença de temperatura entre a superfície e um ponto do seio do fluido.

Radiação

Radiação é a transferência de calor por meio de ondas eletromagnéticas, como a luz visível, a radiação infravermelha e a radiação ultravioleta. Todo mundo já sentiu o calor da radiação solar e o intenso calor proveniente de uma churrasqueira ou das brasas do carvão de uma lareira. A maior parte do calor proveniente desses corpos quentes atinge você por *radiação*, e não por condução ou convecção do ar. O calor seria transferido a você mesmo que existisse apenas vácuo entre você e a fonte de calor.

Qualquer corpo, mesmo a uma temperatura normal, emite energia sob a forma de radiação eletromagnética. A uma temperatura normal, digamos a 20 °C, quase toda energia é transportada por ondas infravermelhas com comprimentos de onda maior do que os da luz visível (ver as figuras 17.4 e 17.29). À medida que a temperatura aumenta, os comprimentos de onda passam a ter valores menores. A 800 °C, um corpo

Figura 17.29 Essa imagem em infravermelho com cores falsas revela a radiação emitida por várias partes do corpo humano. A emissão mais forte (partes escuras do rosto) vem das áreas mais quentes, enquanto, por outro lado, há muito poucas emissões vindas da garrafa de bebida gelada

emite radiação visível em quantidade suficiente para adquirir luminosidade própria e parecer vermelho, embora mesmo nessa temperatura a maior parte da energia seja transportada por ondas infravermelhas. A uma temperatura de 3000 °C, a temperatura característica do filamento de uma lâmpada incandescente, a radiação contém luz visível suficiente para que o corpo pareça branco-quente.

A taxa de radiação de energia de uma superfície é proporcional à área A. A taxa aumenta muito rapidamente com a temperatura, já que é proporcional à quarta potência da temperatura absoluta (Kelvin). Essa taxa também depende da natureza da superfície. Essa dependência é descrita por uma grandeza e, denominada **emissividade**, que é um número sem dimensões compreendido entre 0 e 1, representando a razão entre a taxa de radiação de uma superfície particular e a taxa de radiação de uma superfície de um corpo ideal com a mesma área e a mesma temperatura. A emissividade também depende ligeiramente da temperatura. Logo, a taxa de radiação $H = dQ/dt$ de uma superfície de área A, com uma temperatura T e emissividade e, pode ser expressa pela relação

$$H = Ae\sigma T^4 \qquad \begin{matrix}\text{(taxa de transferência de calor}\\ \text{na radiação)}\end{matrix} \qquad (17.25)$$

onde σ é uma constante física fundamental denominada **constante de Stefan-Boltzmann**. Essa relação denomina-se **lei de Stefan-Boltzmann** em homenagem aos seus descobridores, que viveram no final do século XIX. O valor numérico de σ com melhor precisão atualmente conhecido é

$$\sigma = 5,670400(40) \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

Convidamos você a conferir a compatibilidade das unidades da Equação (17.25). A emissividade (e) de uma superfície escura é geralmente maior do que a de uma superfície clara. A emissividade de uma superfície lisa de cobre é igual a aproximadamente 0,3, porém o valor de e para uma superfície negra pode aproximar-se de um.

Exemplo 17.15

TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR RADIAÇÃO Uma placa quadrada de aço, com lado igual a 10 cm, é aquecida em uma forja até uma temperatura de 800 °C. Sabendo que a emissividade é igual a 0,60, qual é a taxa total de energia transmitida por radiação?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR a incógnita aqui é H, a taxa de emissão de energia.

PREPARAR usamos a Equação (17.25) para calcular H a partir dos valores dados.

EXECUTAR a área total da superfície, incluindo os dois lados da placa, é $2(0,10\text{m})^2 = 0,020\ \text{m}^2$. Devemos converter a temperatura na escala Kelvin: 800 °C = 1073 K. Então, a Equação (17.25) fornece

$$H = Ae\sigma T^4$$

$$= (0,020\ \text{m}^2)(0,60)(5,67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(1073\ \text{K})^4$$

$$= 900\ \text{W}$$

AVALIAR um ferreiro nas vizinhanças sentiria facilmente o calor irradiado por essa placa.

Radiação e absorção

Enquanto um corpo com temperatura T está irradiando, o ambiente que está a uma temperatura T_s também está irradiando, e o corpo *absorve* uma parte dessa radiação. Caso ele esteja em equilíbrio térmico com o meio ambiente, $T = T_s$, e a taxa de emissão da radiação é igual à taxa de absorção. Para isso ser verdade, a taxa de absorção deve ser dada em geral por $H = Ae\sigma T_s^4$. Então, a taxa de radiação *resultante* de um corpo a uma temperatura T imerso em um ambiente que está a uma temperatura T_s é dada por

$$H_{\text{total}} = Ae\sigma T^4 - Ae\sigma T_s^4 = Ae\sigma(T^4 - T_s^4) \qquad (17.26)$$

Nessa equação, um valor positivo de H significa que o fluxo resultante ocorre *para fora* do corpo. A Equação (17.26) mostra que, na radiação, assim como na convecção e na condução, a taxa de transferência de valor depende da *diferença* entre as temperaturas de dois corpos.

Exemplo 17.16

RADIAÇÃO DO CORPO HUMANO Sabendo que a área total do corpo é 1,20 m² e que a temperatura da superfície é 30 °C = 303 K, calcule a taxa total de transferência de calor do corpo por radiação. Se o meio ambiente está a uma temperatura de 20 °C, qual é a taxa *resultante* do calor perdido pelo corpo por radiação? A emissividade do corpo é próxima da unidade, independentemente da pigmentação da pele.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR precisamos levar em conta tanto a radiação que o corpo emite quanto a que o corpo absorve de seu ambiente.

PREPARAR a taxa de radiação da energia que o corpo emite é dada pela Equação (17.25), e a taxa total de perda de calor é dada pela Equação (17.26).

EXECUTAR fazendo $e = 1$ na Equação (17.25), descobrimos que o corpo irradia a uma taxa

$$H = Ae\sigma T^4$$

$$= (1,20\ \text{m}^2)(1)(5,67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(303\ \text{K})^4$$

$$= 574\ \text{W}$$

Essa perda é parcialmente compensada pela *absorção* da radiação, que depende da temperatura ambiente. A taxa *resultante* da transferência de energia é dada pela Equação (17.26):

$$H_{\text{total}} = Ae\sigma(T^4 - T_s^4)$$

$$= (1,20\ \text{m}^2)(1)(5,67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

$$\times [(303\ \text{K})^4 - (293\ \text{K})^4] = 72\ \text{W}$$

AVALIAR esse resultado é positivo porque o corpo perde calor para o ambiente que está mais frio.

Aplicações da radiação

A transferência de calor por radiação é importante em alguns cenários surpreendentes. Um bebê em uma incubadora pode esfriar perigosamente se as paredes da incubadora estiverem frias, mesmo que o *ar* em seu interior esteja quente. Algumas incubadoras regulam a temperatura do ar medindo a temperatura da pele do bebê.

Um corpo que absorve bem o calor também emite bem o calor. Um irradiador ideal, com emissividade igual a um, também é absorvedor ideal, absorvendo *toda* radiação que incide sobre ele. Tal superfície ideal chama-se corpo negro ideal, ou simplesmente **corpo negro**. Reciprocamente, um *refletor* ideal, que não absorve *nenhuma* radiação, é também um irradiador ineficiente.

Essa é a razão do uso de uma película de prata no interior de uma garrafa com vácuo entre as paredes externas (garrafa 'térmica'), inventada por Sir James Dewar (1842-1923). Uma garrafa térmica possui uma parede dupla de vidro. O ar é bombeado para fora do espaço entre essas paredes, isso elimina quase todo o calor transmitido por condução e por convecção. A película de prata nas paredes internas provoca a reflexão da maior parte da radiação proveniente do interior da garrafa, fazendo a radiação voltar para seu interior, e a própria parede é um emissor muito pobre. Portanto, uma garrafa térmica pode manter o café ou a sopa aquecida durante horas. O recipiente conhecido como *dewar*, usado para armazenar gases liquefeitos frios, funciona com base nesse mesmo princípio.

Teste sua compreensão da Seção 17.7 Uma das paredes de uma sala é de concreto, outra de cobre e uma terceira é feita de aço. Todas as paredes têm o mesmo tamanho e estão à mesma temperatura de 20 °C. Qual das paredes parece mais fria ao tato? (i) a parede de concreto; (ii) a parede de cobre; (iii) a parede de aço; (iv) as três paredes parecem igualmente frias ao tato. ∎

Resumo

Temperatura e escalas de temperatura Um termômetro mede a temperatura. Dois corpos em equilíbrio térmico devem possuir a mesma temperatura. Um material condutor entre dois corpos permite a interação térmica, conduzindo o sistema até o equilíbrio térmico; um material isolante impede essa interação.

As escalas Celsius e Fahrenheit de temperatura baseiam-se na temperatura de congelamento (0 °C = 32 °F) e de ebulição (100 °C = 212 °F). Um grau Celsius corresponde a $\frac{9}{5}$ de um grau Fahrenheit. (Ver Exemplo 17.1.)

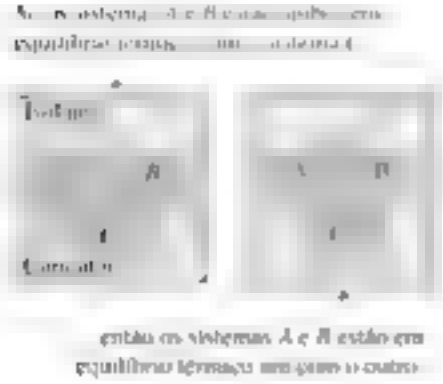
O zero da escala Kelvin é obtido por extrapolação do valor da pressão nula de um termômetro de gás a volume constante, –273,15 °C = 0 K. Na escala de um termômetro de gás, a razão entre duas temperaturas T_1 e T_2 é definida como igual à razão entre as pressões correspondentes do termômetro, P_1 e P_2. A temperatura do ponto triplo da água (0,01 °C) é definida como igual a 273,16 K.

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32° \tag{17.1}$$

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32°) \tag{17.2}$$

$$T_K = T_C + 273{,}15 \tag{17.3}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \tag{17.4}$$



então os sistemas *A* e *B* estão em equilíbrio térmico um com o outro.

Expansão térmica e tensão térmica: Uma variação de temperatura ΔT provoca uma variação em qualquer dimensão linear L_0 de um corpo sólido. A variação ΔL é aproximadamente proporcional a L_0 e a ΔT. De forma semelhante, uma variação de temperatura provoca uma variação de volume ΔV no volume V_0 de qualquer material, líquido ou sólido; essa variação é aproximadamente proporcional a V_0 e ΔT. As grandezas α e β são o coeficiente de dilatação linear e o coeficiente de dilatação volumétrica, respectivamente. Em sólidos, $\beta = 3\alpha$. (Ver os exemplos 17.2–17.4.)

Quando um material é resfriado ou aquecido e mantido de modo que seja impedida sua contração ou dilatação, ele está sob uma tensão térmica F/A. (Ver Exemplo 17.5.)

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \tag{17.6}$$

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \tag{17.8}$$

$$\frac{F}{A} = Y\alpha \Delta T \tag{17.12}$$

$$L = L_0 + \Delta L = L_0(1 + \alpha \Delta T)$$

Calor, transição de fase e calorimetria: O calor é uma energia em trânsito de um corpo para outro em resultado da diferença de temperatura entre esses corpos. A quantidade de calor Q necessária para elevar a temperatura da massa m de um material de um pequeno valor ΔT é proporcional a ΔT. Essa proporcionalidade pode ser expressa em termos da massa m e do calor específico c, ou em termos do número de moles n e do calor específico molar $C = Mc$, onde M é a massa molar, e $m = nM$. (Ver os exemplos 17.6 e 17.7.)

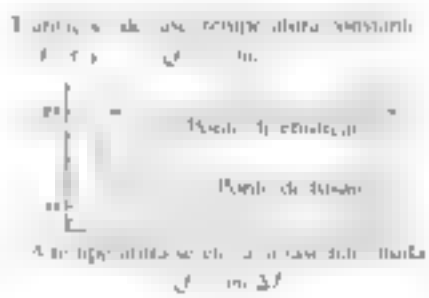
Para fazer a massa m de um material mudar para uma fase diferente a uma temperatura constante (tal como a liquefação de um sólido ou a vaporização de um líquido), é necessário fornecer ou retirar uma quantidade de calor Q. Essa quantidade de calor é igual ao produto de m e L, o calor de fusão, vaporização ou sublimação.

Quando fornecemos calor a um corpo, o valor de Q é positivo; quando retiramos calor, Q é negativo. O princípio básico da calorimetria decorre da lei da conservação da energia. Em um sistema isolado cujas partes interagem mediante troca de calor, a soma algébrica de todos os valores de Q entre todas as partes do sistema deve ser igual a zero. (Ver os exemplos 17.8–17.11.)

$$Q = mc\,\Delta T \tag{17.13}$$

$$Q = nC\,\Delta T \tag{17.18}$$

$$Q = \pm mL \tag{17.20}$$



Condução, convecção e radiação: A condução é a transferência de calor produzida pelo movimento molecular no interior de um material, sem que ocorra transferência de massa. A taxa de transferência de calor H ou condução depende da área A através da qual flui o calor, do comprimento L do percurso, da diferença de temperatura $(T_H - T_C)$ e da condutividade térmica k do material. (Ver os exemplos 17.12–17.14.)

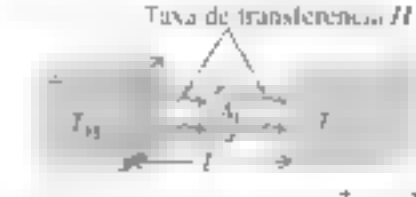
A convecção é um processo complexo que envolve a transferência de massa de uma região para outra do material. Depende da área da superfície, da orientação e da diferença de temperatura entre o corpo e suas vizinhanças.

A radiação é a transferência de energia por meio de ondas eletromagnéticas. A taxa de transferência de calor H produzida pela radiação depende da área da superfície A, da emissividade e da superfície (um número puro entre 0 e 1) e da temperatura absoluta T. Envolve também uma constante fundamental, σ, conhecida como constante de Stefan-Boltzmann. Quando um corpo à temperatura T está imerso em um ambiente com temperatura T_s, a taxa de transferência de calor resultante do corpo para o ambiente, H_{resul}, depende tanto de T quanto de T_s. (Ver os exemplos 17.15 e 17.16.)

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L} \tag{17.21}$$

$$H = Ae\sigma T^4 \tag{17.25}$$

$$H_{resul} = Ae\sigma(T^4 - T_s^4) \tag{17.26}$$



Taxa de transferência $H = kA\frac{T_H - T_C}{L}$

Principais termos

calor de combustão, 196
calor de fusão, 194
calor de vaporização, 194
calor específico molar, 192
calor específico, 191
calor, 190
caloria, 190
coeficiente de dilatação linear, 185
coeficiente de dilatação volumétrica, 186
condução, 199
condutividade térmica, 200
condutor, 180
constante de Stefan-Boltzmann, 203
convecção, 202
corpo negro, 204
emissividade, 203
equilíbrio de fase, 194
equilíbrio térmico, 180
escala absoluta de temperatura, 184
escala Celsius de temperatura, 181
escala Fahrenheit de temperatura, 182
escala Kelvin de temperatura, 183
fase, 193
gradiente de temperatura, 200
isolante, 180
lei de Stefan-Boltzmann, 203
lei zero da termodinâmica, 180
radiação, 203
resistência térmica, 200
taxa de transferência de calor, 199
temperatura, 179
tensões térmicas, 189
termodinâmica, 179
termômetro, 181
transição de fase, 193
zero absoluto, 184

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Não. Quando falamos em "calor", queremos dizer energia em trânsito de um corpo para outro em resultado da diferença de temperatura entre os corpos. Corpos não *contêm* calor.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

17.1 **Resposta: (ii).** Um termômetro composto por um líquido em um tubo na verdade mede a sua própria temperatura. Se o termômetro permanecer na água quente por um tempo longo o bastante, ele entrará em equilíbrio térmico com a água, e sua temperatura será a mesma da água.

17.2 **Resposta: (iv).** Tanto a lâmina bimetálica quanto o termômetro de resistência medem sua própria temperatura. Para que esta seja igual à temperatura do objeto que está sendo medida, o termômetro e o objeto precisam estar em contato e em equilíbrio térmico. Um termômetro de testa detecta a radiação infravermelha emitida pela pele de uma pessoa, por isso não é preciso que o detector e a pele estejam à mesma temperatura.

17.3 **Resposta: (i), (iii), (ii), (v), (iv).** Para comparar essas temperaturas, converta-as à escala Kelvin. Para (i), a temperatura em Kelvin é $T_K = T_C + 273{,}15 = 0{,}0 + 273{,}15 = 273{,}15$ K; para (ii), $T = 5/9$ $(T_F - 32°) = 5/9\,(0° - 32°) = -17{,}78$ °C e para (iii), $T_K = 260$ K; para (iv), $T_K = 77{,}0$ K; e para (v), $T_K = T_C + 273{,}15 = -180{,}0 + 273{,}15 = 93{,}15$ K.

17.4 **Resposta: (ii) e (iii).** O metal 2 precisa se dilatar mais do que o metal 1 quando aquecido, portanto deve ter um coeficiente de dilatação linear maior. Conforme a Tabela 17.1, o latão e o alumínio possuem coeficientes de dilatação linear maiores do que o cobre, mas o mesmo não acontece com o aço.

17.5 **Resposta: (i), (ii), (iv), (iii).** Para (i) e (ii), a grandeza relevante é o calor específico c da substância, que é a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1 *quilograma* dessa substância em 1 K. Conforme a Tabela 17.3, esses valores são (i) 138 J para o mercúrio e (ii) 2428 J para o álcool etílico. Para (iii) e (iv), precisamos do calor específico molar C, que é a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1 *mol* dessa substância em 1 °C. Mais uma vez, conforme a Tabela 17.3, esses valores são (iii) 27,7 J para o mercúrio e (iv) 111,9 J para o álcool etílico. (A razão dos calores específicos molares é diferente dos calores específicos porque um mol de mercúrio e um mol de álcool etílico possuem massas diferentes.)

17.6 **Resposta: (iv).** No tempo t, o sistema vai do ponto b para o ponto e da Figura 17.21. Conforme a figura, no tempo $t/2$ (no meio do caminho ao longo do eixo horizontal de b a e), o sistema está a 100 °C, e ainda está em ebulição, ou seja, é uma mistura de líquido e gás. Isso quer dizer que a maior parte do calor fornecido é usado na vaporização da água.

17.7 **Resposta: (ii).** Quando você toca em uma dessas paredes, o calor flui da sua mão para a parede de menor temperatura. Quanto mais rápido o calor flui da sua mão, mais frio você irá sentir. A Equação (17.21) mostra que a taxa de transferência de calor é proporcional à condutividade térmica k. Segundo a Tabela 17.5, o cobre possui uma condutividade térmica (385,0 W/m · K) muito maior do que o aço (50,2 W/m · K) ou o concreto (0,8 W/m · K), portanto a parede de cobre é a que parece mais fria ao toque.

Questões para discussão

Q17.1 Explique por que não faria sentido usar um termômetro de vidro de tamanho normal para medir a temperatura de uma gota de água quente.

Q17.2 Se você aquece o ar dentro de um recipiente rígido e selado até que a sua temperatura na escala Kelvin dobre, a pressão do ar no recipiente também irá dobrar. Será que o mesmo acontece se você dobrar a temperatura em Celsius do ar no recipiente? Explique.

Q17.3 Muitos motores de automóveis possuem cilindros de ferro fundido e pistões de alumínio. Que problemas podem surgir caso o motor aqueça em demasia? (O coeficiente de dilatação volumétrica do ferro fundido é aproximadamente igual ao do aço.)

Q17.4 Por que um tubo contendo água se rompe quando a água congela? Um termômetro de mercúrio se romperia se a temperatura fosse menor do que a temperatura de solidificação do mercúrio? Por quê?

Q17.5 Dois corpos feitos com o mesmo material possuem as mesmas dimensões externas e a mesma aparência, porém um é sólido e o outro é oco. Quando a temperatura dos dois corpos aumentar, a dilatação volumétrica dos corpos será a mesma ou será diferente? Por quê?

Q17.6 A parte interna de um forno está a uma temperatura de 200 °C. Você pode colocar suas mãos no interior do forno sem se queimar,

desde que não toque em nada. Considerando que o ar do interior do forno também está a 200 °C, por que você não queima suas mãos?

Q17.7 Um artigo de jornal sobre o clima afirma que "a temperatura de um corpo indica a quantidade de calor que ele contém". Essa afirmação está correta? Por quê?

Q17.8 Para elevar a temperatura de um objeto, você deve fornecer calor a ele? Se você fornece calor a um objeto, a temperatura do objeto aumenta necessariamente? Explique.

Q17.9 Uma aluna afirma que 1 $m^2/s^2 \cdot C°$ é uma unidade de calor específico apropriada. Ela está correta? Por quê?

Q17.10 Nos condicionadores de ar domésticos usados em climas secos, o ar é esfriado forçando-se a sua circulação através de um filtro embebido em água, ocorrendo a vaporização de parte da água. Como o ar esfria? Esse dispositivo funcionaria em um local de clima muito úmido? Por quê?

Q17.11 As unidades de calor específico c são J/kg · K, mas as unidades de calor de fusão L_f ou calor de vaporização L_v são simplesmente J/kg. Por que as unidades de L_f e L_v não incluem o fator $(K)^{-1}$ para levar em conta uma variação de temperatura?

Q17.12 Por que um dia quente e úmido nos trópicos costuma ser mais desconfortável para os seres humanos do que um dia quente e seco no deserto?

Q17.13 Um pedaço de folha de alumínio que envolva uma batata assada no forno pode, em geral, ser manuseado sem riscos alguns segundos depois que a batata é retirada do forno. Contudo, o mesmo não é verdade a respeito da batata? Dê duas razões para essa diferença.

Q17.14 Alguns viajantes no deserto transportam água em um recipiente de lona. Uma parte da água se infiltra e evapora da parte externa do recipiente. Como isso faz a água de dentro do recipiente esfriar?

Q17.15 Assim que você sai do chuveiro, você sente frio. Quando você se enxuga, contudo, deixa de sentir frio, embora a temperatura externa não sofra nenhuma variação. Por quê?

Q17.16 O clima de uma região próxima a grandes massas de água (como a costa do Pacífico ou o oceano Atlântico) geralmente é mais moderado do que o clima em uma região muito afastada dessas massas de água (como em planícies interiores). Por quê?

Q17.17 Quando você coloca água na bandeja de cubos de gelo em um freezer, por que a água não congela totalmente de uma só vez ao atingir 0 °C? Na realidade, o congelamento começa nas áreas adjacentes aos lados da bandeja. Por quê?

Q17.18 Antes de aplicar uma injeção, um médico esfrega seu braço com algodão embebido em álcool isopropílico à temperatura ambiente. Por que isso faz você sentir seu braço frio? (*Sugestão:* A razão *não* é o medo da injeção! A temperatura de ebulição do álcool isopropílico é igual a 82,4 °C.)

Q17.19 Um bloco de metal frio parece estar mais frio do que um bloco de madeira à mesma temperatura. Por quê? Um bloco de metal *quente* parece estar mais *quente* do que um bloco de madeira à mesma temperatura. Novamente, por quê? Existiria alguma temperatura na qual os blocos aparentariam estar igualmente quentes ou igualmente frios? Que temperatura seria essa?

Q17.20 Uma pessoa enche uma xícara com café quente, com a intenção de tomá-lo cinco minutos depois. Para manter o café o mais quente possível, ela deveria cobrir o café com creme no momento em que enche a xícara, ou seria melhor colocar o creme no momento em que ela fosse beber o café? Explique.

Q17.21 Quando você retira uma torta de maçã do forno, a crosta e o recheio estão na mesma temperatura. Contudo, ao cortar a torta, o recheio queima sua língua, mas a crosta não. Por que existe essa diferença? (*Sugestão:* O recheio está úmido, enquanto a crosta está seca.)

Q17.22 Um velho provérbio culinário diz que os alimentos cozinham melhor (mais uniformemente e sem queimar) em panelas pesadas de ferro fundido. Que características tornam essas panelas preferíveis?

Q17.23 Nas regiões litorâneas, no inverno, a temperatura sobre a terra costuma ser mais fria do que a temperatura sobre o oceano próximo; no verão, ocorre o contrário. Explique. (*Sugestão:* O calor específico do solo tem um valor entre 0,2 e 0,8 vez o valor do calor específico da água.)

Q17.24 Sabemos que uma batata cozinha mais rapidamente quando um espeto grande a atravessa. Por quê? Um espeto de alumínio é mais eficiente do que um espeto de aço? Por que sim ou por que não? (*Observação:* Não tente fazer essa experiência em um forno de micro-ondas!) Existe também um dispositivo comercial para acelerar o processo de assar a carne, constituído por um tubo metálico oco contendo um pavio e um pouco de água; afirma-se que esse espeto é mais eficiente do que um espeto metálico sólido. Como funciona esse dispositivo?

Q17.25 Os pilotos de planadores sabem que na região Centro-Oeste dos Estados Unidos as correntes térmicas ascendentes ocorrem com maior probabilidade nas vizinhanças dos campos recentemente arados. Por quê?

Q17.26 Algumas pessoas dizem que os cubos de gelo congelam mais rapidamente quando se enche as bandejas de gelo com água quente, porque a água quente esfria mais rapidamente do que a água fria. O que você pensa sobre essa afirmação?

Q17.27 Nós temos sorte de a Terra não estar em equilíbrio térmico com o Sol (visto que a temperatura na superfície do Sol é 5.800 K). Mas por que a Terra e o Sol não estão em equilíbrio térmico?

Q17.28 Quando há escassez de energia em países frios, muitos artigos de revistas recomendam às pessoas que mantenham suas casas a uma temperatura constante durante o dia e a noite para poupar combustível. Esses artigos afirmam que, quando se desliga o aquecimento à noite, as paredes, teto e outras áreas se resfriam e precisam ser reaquecidos de manhã. Assim mantendo a temperatura constante, essas partes da casa não se resfriarão, e não terão de ser reaquecidas. Esse argumento faz sentido? As pessoas poupariam realmente energia seguindo esse conselho?

Exercícios

Seção 17.2 Termômetros e escalas de temperatura

17.1 Converta as seguintes temperaturas de graus Celsius em graus Fahrenheit. a) −62,8 °C, a temperatura mais baixa já registrada nos Estados Unidos (3 de fevereiro de 1947, Snag, Yukon). b) 56,7 °C, a temperatura mais alta já registrada nos Estados Unidos (10 de julho de 1913, Vale da Morte, Califórnia); c) 31,1 °C, a temperatura média anual mais alta (Lugh Ferrandi, Somália).

17.2 Calcule a temperatura em graus Celsius correspondente a: a) 41,0 °F, uma noite de inverno em Seattle; b) 107,0 °F, um dia de verão em Palm Springs; c) −18,0 °F, um dia de inverno ao norte de Manitoba.

17.3 Em suas férias na Itália, você escuta na TV em uma manhã de verão, que a temperatura irá subir dos atuais 18 °C a 39 °C. Qual é o aumento correspondente na escala Fahrenheit?

17.4 Dois copos cheios de água, *A* e *B*, estão inicialmente à mesma temperatura. A temperatura da água no copo *A* aumentou em 10 °F, e a temperatura da água no copo *B* diminuiu em 10 K. Após essas variações de temperatura, qual dos copos de água apresenta a temperatura mais alta? Explique.

17.5. Você coloca uma garrafa de refrigerante na geladeira e a deixa lá até que a temperatura tenha baixado 10 K. Qual é a variação de temperatura (a) em graus Fahrenheit e (b) em graus Celsius?

17.6 (a) Em 22 de janeiro de 1943, a temperatura em Spearfish, South Dakota, subiu de –4 °F para 45 °F em apenas 2 minutos. Qual foi a variação de temperatura em graus Celsius? (b) A temperatura em Browning, Montana, era 44 °F em 23 de janeiro de 1916. No dia seguinte a temperatura caiu para –56 °C. Qual foi a variação de temperatura em graus Celsius?

17.7 a) Você se sente doente e verifica que sua temperatura é igual a 40,2 °C. Qual é sua temperatura em °F? Você deve ficar preocupado? b) A página sobre o tempo de um jornal afirma que a temperatura durante a parte da manhã deve ficar em torno de 12 °C. Qual é esta temperatura em graus Fahrenheit?

Seção 17.3 Termômetro de gás e escala Kelvin

17.8 a) Calcule a única temperatura em que as escalas de Fahrenheit e Celsius concedem. b) Calcule a única temperatura em que as escalas de Fahrenheit e Kelvin concedem.

17.9 Converta as seguintes temperaturas para a escala Kelvin: a) a temperatura mínima registrada nos Estados Unidos (–70 °F, em Montana, no dia 20 de janeiro de 1954); b) a temperatura máxima registrada na Austrália (127 °F, em Queensland, no dia 16 de janeiro de 1889); c) a temperatura mínima registrada no hemisfério norte (–90 °F, na Sibéria, em 1892).

17.10 Converta as seguintes temperaturas da escala Kelvin para a escala Celsius: a) a temperatura ao meio-dia na superfície da Lua (400 K); b) a temperatura no topo das nuvens na atmosfera de Saturno (95 K); c) a temperatura no centro do Sol ($1,55 \times 10^7$ K).

17.11 O nitrogênio líquido é um material relativamente barato usado frequentemente para executar divertidas demonstrações de física em baixas temperaturas. O gás nitrogênio se liquefaz a uma temperatura de –346 °F. Converta essa temperatura em a) °C e b) K.

17.12 Um termômetro de gás registra uma pressão absoluta que corresponde a 325 mm de mercúrio quando em contato com a água que está no ponto triplo. Qual seria a pressão lida no termômetro se estivesse em contato com água no ponto de ebulição normal?

17.13 A pressão de um gás no ponto triplo da água é 1,35 atm. Se o seu volume permanecer inalterado, qual será a sua pressão à temperatura em que o CO_2 solidifica?

17.14 Como a escala Kelvin, a *escala Rankine* é uma escala de temperatura absoluta: o zero absoluto é zero graus Rankine (0 °R). Entretanto, as divisões dessa escala são do mesmo tamanho que as da escala Fahrenheit, e não da escala Celsius. Qual é o valor numérico da temperatura de ponto triplo da água na escala Rankine?

17.15 **Termômetro de gás a volume constante.** Usando um termômetro de gás, um pesquisador verificou que a pressão do ponto triplo da água (0,01 °C) era igual a $4,80 \times 10^4$ Pa, e a pressão do ponto de ebulição normal da água (100 °C) era igual a $6,50 \times 10^4$ Pa. a) Supondo que a pressão varie linearmente com a temperatura, use esses dados para calcular a temperatura Celsius na qual a pressão do gás seria igual a zero (isto é, ache a temperatura Celsius do zero absoluto). b) O gás nesse termômetro obedece à Equação (17.4) de modo exato? Caso essa equação fosse obedecida rigorosamente, e a pressão a 100 °C fosse igual a $6,50 \times 10^4$ Pa, qual seria a pressão medida a 0,01 °C? (Como você estudará na Seção 18.1, a Equação (17.4) é precisa apenas para gases de densidade pequena.)

Seção 17.4 Expansão térmica

17.16 O edifício mais alto do mundo, segundo certos padrões arquitetônicos, é o Taipei 101, em Taiwan, com 509,32 m de altura. Suponha que essa altura tenha sido medida em um dia fresco de primavera, quando a temperatura era 15,5 °C. Você pode usar o edifício como uma espécie de termômetro gigante em um dia quente de verão medindo cuidadosamente sua altura. Suponha que você faça isso e descubra que o Taipei 101 está 0,144 m mais alto do que sua altura oficial. Qual é a temperatura, supondo que o edifício esteja em equilíbrio térmico com o ar e que toda a sua estrutura seja feita de aço?

17.17 A ponte Humber, na Inglaterra, cujo comprimento é de 1410 m, é uma das pontes de maior vão no mundo. Calcule a variação do comprimento da base de aço do vão quando a temperatura aumenta de –5 °C para 18 °C.

17.18 **Garantia de uma junta firme.** Os rebites de alumínio usados na construção de aviões são feitos com um diâmetro ligeiramente maior do que o diâmetro do buraco, e resfriados com gelo seco (CO_2 sólido) antes de serem colocados nos respectivos buracos. Sabendo que o diâmetro de um buraco é 4,5 mm, qual deve ser o diâmetro de um rebite a 23 °C para que seu diâmetro fique igual ao do buraco quando o rebite for esfriado até –78 °C, a temperatura do gelo que será usado? Suponha que o coeficiente de dilatação permaneça constante, no valor dado na Tabela 17.1.

17.19 O diâmetro da moeda de um centavo de dólar americano é 1,9 cm a 20 °C. A moeda é feita com uma liga metálica (quase toda de zinco) cujo coeficiente de dilatação linear é igual a $2,6 \times 10^{-5} K^{-1}$. Qual seria seu diâmetro a) em um dia quente no Vale da Morte (48 °C); b) em uma noite fria nas montanhas da Groenlândia (–53 °C)?

17.20 Um domo geodésico construído com estrutura de alumínio é um hemisfério quase perfeito; seu diâmetro mede 55,0 m em um dia de inverno a uma temperatura de –15 °C. Qual é o aumento do espaço interior do domo no verão, quando a temperatura é 35 °C?

17.21 Uma barra metálica mede 40,125 cm de comprimento a 20 °C e 40,148 cm a 45 °C. Calcule seu coeficiente de dilatação linear médio nesse intervalo de temperatura.

17.22 Um cilindro de cobre está inicialmente a 20 °C. Em que temperatura seu volume terá se tornado 0,150% maior do que a 20 °C?

17.23 A densidade da água é 999,73 kg/m³ a uma temperatura de 10 °C, e 958,38 kg/m³ à temperatura de 100 °C. Calcule o coeficiente de expansão volumétrico médio da água nesse intervalo de temperatura.

17.24 Um tanque de aço é completamente cheio com 2,80 m³ de álcool etílico quando tanto o tanque quanto o álcool etílico estão à temperatura de 32 °C. Quando o tanque e seu conteúdo tiverem esfriado até 8 °C, que volume adicional de álcool etílico pode ser colocado dentro do tanque?

17.25 Um frasco de vidro com volume igual a 1000 cm³ a 0 °C está completamente cheio de mercúrio a essa mesma temperatura. Quando esse sistema é aquecido até 55 °C, um volume de 8,95 cm³ de mercúrio transborda. Sabendo que o coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio é igual a $18,0 \times 10^{-5} K^{-1}$, calcule o coeficiente de dilatação volumétrica do vidro.

17.26 a) Seja A_0 a área medida sobre a superfície de um corpo sólido a uma certa temperatura inicial, e ΔA a variação da área quando a temperatura varia de ΔT. Mostre que

$$\Delta A = (2\alpha) A_0 \Delta T$$

onde α é o coeficiente de dilatação linear. b) Uma folha de alumínio circular possui diâmetro de 55,0 cm a 15 °C. Qual será a variação da área de uma das faces da folha quando a temperatura aumentar para 27,5 °C?

17.27 Um ferreiro mecânico faz um furo com um diâmetro igual a 1,350 cm em uma placa de aço a uma temperatura de 25 °C. Qual

é a área da seção reta do orifício a) a 25 °C. b) quando a temperatura da placa aumenta para 175 °C? Suponha que o coeficiente de dilatação linear permaneça constante nesse intervalo de temperatura. (*Sugestão*: Ver o Exercício 17.26.)

17.28 Você é o novo engenheiro mecânico da Motores Inc., e foi incumbido de projetar pistões de latão para deslizarem dentro de cilindros de aço. Os motores em que esses pistões serão usados irão funcionar entre 20 °C e 150 °C. Suponha que os coeficientes de dilatação se mantenham constantes nesse intervalo de temperatura. a) Se o pistão se encaixa perfeitamente na câmara a 20 °C, os motores funcionarão em temperaturas mais altas? Explique. b) Se os pistões cilíndricos têm 25,0 cm de diâmetro a 20 °C, qual deveria ser o diâmetro mínimo dos cilindros nessa temperatura para que os pistões funcionassem a 150 °C?

17.29 O diâmetro externo de um pote de vidro e o diâmetro interno de sua tampa de ferro medem ambos 725 mm à temperatura ambiente. Qual será o tamanho da folga entre a tampa e o pote se a tampa for colocada sob água quente até que sua temperatura suba para 50 °C sem alterar a temperatura do vidro?

17.30 Uma barra de latão possui comprimento igual a 185 cm e diâmetro igual a 1,60 cm. Qual é a força que deve ser aplicada a cada extremidade da barra para impedir que ela se contraia quando for esfriada de 120 °C para 10 °C?

17.31 a) O comprimento de um fio a 20 °C é 1,50 m. A 420 °C seu comprimento aumenta em 1,9 cm. Calcule o coeficiente de dilatação linear médio nesse intervalo de temperatura. b) O fio é esticado sem ficar sob tensão (tensão igual a zero) a 420 °C. Calcule a tensão do fio quando ele é esfriado até 20 °C sem que seja permitida sua contração. O módulo de Young do fio é igual a $2,0 \times 10^{11}$ Pa.

17.32 Os trilhos de aço de uma estrada de ferro são dispostos em segmentos de 12,0 m de comprimento ligados pelas extremidades. Os trilhos são instalados em um dia de inverno, de temperatura igual a −2 °C. a) Qual o espaço que deve ser mantido entre dois segmentos de trilho adjacentes de modo que eles se toquem em um dia de verão com uma temperatura de 33 °C? b) Caso os trilhos estivessem inicialmente em contato, qual seria a tensão sobre eles em um dia de verão a uma temperatura de 33 °C?

Seção 17.5 Quantidade de calor

17.33 Uma chaleira de alumínio com massa igual a 1,50 kg e contendo 1,80 kg de água é colocada para esquentar em um fogão. Supondo que não haja nenhuma perda de calor para o ambiente, qual é a quantidade de calor que deve ser adicionada para elevar a temperatura de 20 °C até 85 °C?

17.34 Para se manter acordado em seus estudos durante uma noite inteira, um estudante prepara uma xícara de café colocando inicialmente um aquecedor elétrico de 200 W em 0,320 kg de água. a) Qual é o calor transferido para a água para elevar sua temperatura de 20 °C até 80 °C? b) Quanto tempo é necessário? Suponha que toda a potência do aquecedor seja transformada em calor para aquecer a água.

17.35 Você precisa descobrir o calor específico de uma amostra de metal. Você pesa a amostra e descobre que seu peso é 28,4 N. Você acrescenta, cuidadosamente, $1,25 \times 10^4$ J à amostra e descobre que sua temperatura sobe 18 °C. Qual é o calor específico da amostra?

17.36 **Perda de calor durante a respiração.** Em climas muito frios, um mecanismo importante na perda de calor pelo corpo humano é a energia gasta para aquecer o ar nos pulmões a cada respiração. a) Em um dia de inverno muito frio, quando a temperatura é −20 °C, qual é a quantidade de calor necessária para aquecer 0,50 L de ar trocado na respiração até atingir a temperatura do corpo humano (37 °C)? Suponha que o calor específico do ar seja igual a 1020 J/kg · K e que a massa de 1,0 L de ar seja $1,3 \times 10^{-3}$ kg. b) Qual o calor perdido por hora considerando 20 respirações por minuto?

17.37 Durante uma corrida, um estudante de 70 kg gera uma energia térmica a uma taxa de 1300 W. Para manter a temperatura do corpo constante e igual a 37 °C, essa energia deve ser removida pela transpiração ou por outros mecanismos. Caso esses mecanismos falhem e o calor não possa ser removido do corpo do estudante, durante quanto tempo o estudante poderia correr antes que ocorra um dano irreversível a seu corpo? (*Nota*: As estruturas das proteínas no corpo são irreversivelmente danificadas quando a temperatura do corpo passar de 44 °C. O calor específico de um corpo humano típico é igual a 3480 J/kg · K, ligeiramente menor do que o da água. A diferença é produzida pela presença de proteínas, gorduras e minerais, que possuem calores específicos menores.)

17.38 Um trabalhador pintando o topo de uma antena a uma altura de 225 m deixa cair acidentalmente uma garrafa com 1,0 L de água da sua mochila. A garrafa é amortecida por arbustos e atinge o solo sem se quebrar. Supondo que a água absorva uma quantidade de calor igual ao módulo da variação da energia potencial, qual é o aumento da temperatura da água?

17.39 Uma caixa com frutas de massa igual a 35,0 kg e calor específico igual a 3650 J/kg · K escorrega para baixo por uma rampa inclinada 36,9° abaixo da horizontal. O comprimento da rampa é 8,0 m. a) Se a caixa estava inicialmente em repouso no topo da rampa e sua velocidade na base é igual a 2,50 m/s, qual é o trabalho realizado pelo atrito sobre a caixa? b) Se uma quantidade de calor igual ao trabalho realizado pelo atrito sobre a caixa for absorvida pela caixa e as frutas chegarem a um equilíbrio térmico com a caixa, qual será a variação de temperatura?

17.40 Um trem do metrô com massa igual a 25000 kg viajando inicialmente a 15,5 m/s diminui sua velocidade e pára em uma estação, lá permanecendo o tempo suficiente para que seus freios esfriem. As dimensões da estação são 65,0 m de comprimento por 20,0 m de largura por 12,0 m de altura. Supondo que todo o trabalho realizado pelos freios para parar o trem seja transferido como calor uniformemente para todo o ar na estação, de quanto aumenta a temperatura do ar na estação? Considere a densidade do ar 1,20 kg/m³, e seu calor específico como 1020 J/kg · K.

17.41 A temperatura de um prego aumenta quando é cravado em uma placa. Suponha que 60% da energia cinética fornecida por um martelo de 1,80 kg com velocidade de 7,80 m/s seja transformada em calor para aquecer o prego, e que não exista fluxo de calor para fora do prego. qual seria o aumento da temperatura de um prego de 8,0 g de alumínio depois que ele recebesse dez batidas?

17.42 Um técnico mede o calor específico de um líquido não identificado introduzindo um resistor elétrico no seio do líquido. A energia elétrica é convertida no calor transferido ao líquido durante 120 s a uma taxa constante de 65,0 W. A massa do líquido é 0,780 kg, e sua temperatura cresce de 18,55 °C até 22,54 °C. a) Calcule o calor específico médio do líquido nesse intervalo de temperatura. Suponha que não haja perda de calor nem para o ambiente nem para o recipiente que contém o líquido. b) Suponha agora que o calor transferido ao ambiente e ao recipiente não sejam desprezíveis. O resultado calculado na parte (a) seria uma estimativa *superestimada* ou *subestimada* do calor específico? Explique.

17.43 Você fornece 8950 J de calor a 3,0 mols de ferro. a) Qual é o aumento da temperatura do ferro? b) Se essa mesma quantidade de calor for fornecida a 3,0 kg de ferro, qual será o aumento da tem-

peratura do ferro? c) Explique a diferença nos resultados obtidos nas partes (a) e (b).

Seção 17.6 Calorimetria e transições de fase

17.44 Você, um cientista, fornece calor a uma amostra sólida de 500,0 g à taxa de 10,0 kJ/min ao mesmo tempo em que registra a sua temperatura em função do tempo. Com esses dados, você faz um gráfico igual ao mostrado na Figura 17.30. a) Qual é o calor latente de fusão desse sólido? b) Quais são os calores específicos dos estados líquido e sólido do material?

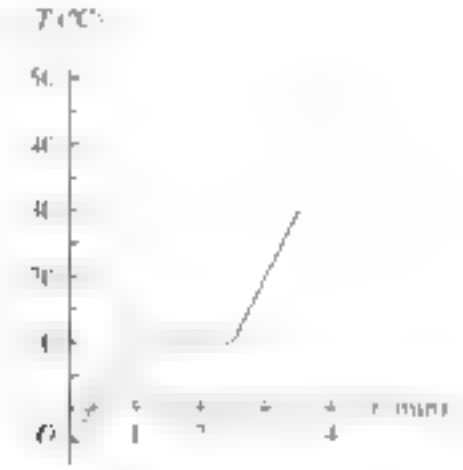


Figura 17.30 Exercício 17.44

17.45 Um bloco de 500,0 g de um metal desconhecido, que esteve na água fervente por vários minutos, é rapidamente colocado dentro de um copo de isopor (isolante) contendo 1,0 kg de água à temperatura ambiente (20 °C). Depois de esperar e mexer delicadamente por 5,0 min, você observa que a temperatura da água alcançou o valor constante de 22 °C. a) Supondo que o isopor absorva uma quantidade desprezível de calor e que nenhum calor seja perdido para o ambiente, qual é o calor específico do metal? b) Que material é mais útil para armazenar energia térmica: esse metal ou uma quantidade igual de água? Explique. c) Suponha agora que o calor absorvido pelo isopor não seja desprezível. O calor específico calculado na parte (a) seria alto demais, pequeno demais ou continuaria sendo correto? Explique.

17.46 Antes de se fazer seu exame médico anual, um homem de 70,0 kg cuja temperatura é 37 °C consome uma lata inteira de 0,355 L de refrigerante (quase todo composto de água) a 12 °C. a) Qual deve ser a temperatura do corpo dele quando for atingido o equilíbrio? Despreze qualquer efeito de aquecimento provocado pelo metabolismo do homem. O calor específico do corpo do homem é igual a 3480 J/kg · K. b) A variação de temperatura do corpo dele é suficiente para poder ser lida por um termômetro médico comum?

17.47 Na situação descrita no Exercício 17.46, o metabolismo do homem acabará fazendo com que sua temperatura final de equilíbrio (e a da bebida ingerida) volte a 37 °C. Supondo que o corpo libere energia a uma taxa de $7,0 \times 10^3$ kJ/dia (conhecida pela sigla BMR, que significa *taxa de metabolismo basal*), quanto tempo levaria o processo? Suponha que toda energia liberada seja usada para elevar a temperatura.

17.48 Uma bandeja de cubos de gelo com massa desprezível contém 0,350 kg de água a 18 °C. Qual é a quantidade de calor necessária para esfriar a água até 0 °C e solidificá-la? Dê a resposta em joules e em calorias.

17.49 Qual é o calor total necessário para converter 12,0 g de gelo a −10 °C em vapor d'água a 100 °C? Dê a resposta em joules e em calorias.

17.50 Um recipiente aberto contém 0,550 kg de gelo a −15 °C. A massa do recipiente pode ser desprezada. Fornecemos calor ao recipiente a uma taxa de 800 J/min durante 500 min. a) Depois de quantos minutos o gelo *começa* a derreter? b) Depois de quantos minutos, a partir do momento em que o aquecimento começou, a temperatura começará a se tornar maior do que 0 °C? c) Faça um gráfico mostrando a temperatura em função do tempo decorrido.

17.51 A capacidade de alguns condicionadores de ar é, às vezes, expressa em "tons", equivalente ao número de "toneladas" americanas (unidade de peso definida por: 1 ton = 8896 N) de gelo obtido pela solidificação da água a 0 °C durante 24 h de operação do condicionador. Expresse em watts a capacidade de um condicionador de ar de 2 tons.

17.52 **Queimadura de água versus queimadura de vapor d'água.** Qual é o calor transferido para sua pele quando ela recebe calor liberado a) por 25,0 g de vapor d'água inicialmente a 100 °C, quando ele esfria até atingir a temperatura da pele (34 °C)? b) por 25,0 g de água inicialmente a 100 °C quando ela esfria até atingir 34 °C? c) O que você pode concluir acerca da intensidade relativa de queimadura causada por água quente e da queimadura causada por vapor d'água?

17.53 Qual deve ser a velocidade inicial de uma bala de chumbo a uma temperatura de 25 °C para que o calor produzido quando ela atinge o repouso seja exatamente suficiente para causar sua fusão? Suponha que toda energia mecânica inicial da bala seja convertida em calor e que não haja nenhum fluxo de calor da bala para suas vizinhanças. (A bala sai do cano de um rifle típico com uma velocidade maior do que a velocidade do som no ar, que é igual a 347 m/s a 25 °C.)

17.54 A vaporização do suor é um mecanismo de controle da temperatura de animais de sangue quente. a) Qual é a quantidade de água que deve evaporar da pele de um homem de 70,0 kg para que a temperatura do seu corpo diminua de 1 °C? O calor de vaporização da água na temperatura do corpo (37 °C) é igual a $2,42 \times 10^6$ J/kg · K. O calor específico típico do corpo humano é 3480 J/kg · K. (Veja o Exercício 17.37.) b) Qual é o volume de água que o homem deve beber para repor a água vaporizada? Compare o resultado com o volume de uma lata de refrigerante (355 cm^3).

17.55 **"O navio do deserto".** Os camelos necessitam de pouca água porque seus corpos podem tolerar variações de temperatura relativamente grandes. Enquanto um homem mantém a temperatura do corpo constante com uma flutuação de um até dois graus Celsius, um camelo desidratado pode agüentar uma queda da temperatura em seu corpo de até 34 °C durante a noite e o aumento da temperatura de até 40 °C durante o dia. Para verificar a eficácia desse mecanismo para a economia de água, calcule quantos litros de água um camelo de 400 kg teria de beber caso fosse necessário manter a temperatura do seu corpo constante e igual a 34 °C pela vaporização do suor durante o dia (12h), em vez de deixar sua temperatura aumentar até 40 °C. (*Nota:* O calor específico de um camelo ou de qualquer outro mamífero é aproximadamente igual ao de um homem típico, 3480 J/kg · K. O calor de vaporização da água a 34° C é igual a $2,42 \times 10^6$ J/kg · K.)

17.56 Um asteróide com um diâmetro de 10 km e uma massa de $2,60 \times 10^{15}$ kg cai sobre a Terra à velocidade de 32,0 km/s, aterrissando no Oceano Pacífico. Se 1,0% da energia cinética do asteróide é utilizada na vaporização da água do oceano (suponha uma temperatura inicial da água de 10 °C), qual a massa de água que será vaporizada pela colisão? (A título de comparação, a massa de água contida no Lago Superior é cerca de 2×10^{15} kg.)

17.57 A porta de um refrigerador é aberta, permitindo que ar à temperatura ambiente (20 °C) encha o compartimento. Um peru de 10,0 kg, também à temperatura ambiente, é colocado no refrigerador, e a porta é fechada. A densidade do ar é 1,30 kg/m³, e seu calor específico é 1020 J/kg · K. Suponha que o calor específico de um peru, como o de um ser humano, seja 3480 J/kg · K. Que quantidade de calor o refrigerador precisa retirar de seu compartimento para conduzir o ar e o peru ao equilíbrio térmico, a uma temperatura de 5 °C? Suponha que não haja nenhuma troca de calor com o meio ambiente.

17.58 Um técnico de laboratório coloca em um calorímetro uma amostra de 0,00850 kg de um material desconhecido, a uma temperatura de 100 °C. O recipiente do calorímetro, inicialmente a 19 °C, é feito com 0,190 kg de cobre e contém 0,200 kg de água. A temperatura final do calorímetro e seu conteúdo é 26,1 °C. Calcule o calor específico da amostra.

17.59 Um recipiente isolado de massa desprezível contém 0,250 kg de água a uma temperatura de 75 °C. Quantos quilogramas de gelo a uma temperatura de −20 °C devem ser colocados na água para que a temperatura final do sistema seja igual a 30 °C?

17.60 Um frasco de vidro contendo 16,0 g de amostra de uma enzima é esfriado em um banho contendo água e 0,120 kg de gelo. O calor específico da amostra é 2250 J/kg · K, o frasco de vidro possui massa de 6,0 g e calor específico igual a 2600 J/kg · K. Qual é a quantidade de gelo que se funde para esfriar a amostra da enzima da temperatura ambiente (19,5 °C) até a temperatura final do banho de gelo?

17.61 Um lingote de prata de 4,0 kg é retirado de um forno com temperatura igual a 750 °C e colocado sobre um grande bloco de gelo a 0 °C. Supondo que todo o calor liberado pelo lingote de prata seja usado para fundir o gelo, qual é a quantidade de gelo que deve ser fundida?

17.62 Um calorímetro de cobre com massa igual a 0,100 kg contém 0,160 kg de água e 0,018 kg de gelo em equilíbrio térmico na pressão atmosférica. Se um bloco de chumbo de 0,750 kg a uma temperatura de 255 °C for colocado no recipiente, qual será a temperatura final de equilíbrio? Suponha que não ocorra nenhuma perda de calor para o ambiente.

17.63 Um vaso cujas paredes são termicamente isoladas contém 2,40 kg de água e 0,450 kg de gelo, tudo a 0 °C. Um tubo proveniente de um aquecedor que produz vapor de água em ebulição na pressão atmosférica é colocado no interior da água. Quantos gramas de vapor d'água devem condensar no interior do vaso (também na pressão atmosférica) para fazer a temperatura do sistema chegar até 28 °C? Despreze o calor transferido para o recipiente.

Seção 17.7 Mecanismos de transferência de calor

17.64 Use a Equação (17.21) para mostrar que as unidades SI de condutividade térmica são W/m · K.

17.65 Suponha que a barra da Figura 17.23a seja feita de cobre, tenha 45,0 cm de comprimento e área da seção reta igual a 1,25 cm². Seja T_H = 100 °C e T_F = 0 °C. a) Qual é o gradiente de temperatura no estado estacionário final ao longo da barra? b) Qual é a taxa de transferência de calor na barra no estado estacionário final? c) Qual é a temperatura final do estado estacionário em um ponto da barra situado a 12,0 cm da extremidade esquerda da barra?

17.66 Uma das extremidades de uma barra metálica isolada é mantida a 100 °C, e a outra extremidade é mantida a 0 °C por uma mistura de gelo e água. A barra tem 60,0 cm de comprimento e uma seção reta com área igual a 1,25 cm². O calor conduzido pela barra produz a fusão de 8,50 g de gelo em 10,0 min. Ache a condutividade térmica k do metal.

17.67 Um carpinteiro constrói a parede externa de uma casa usando uma camada de madeira com 3,0 cm de espessura e uma camada de isopor com espessura de 2,2 cm na superfície interna da parede. A madeira possui k = 0,080 W/m · K e o isopor possui k = 0,010 W/m · K. A temperatura da superfície interna da parede é igual a 19 °C e a temperatura da superfície externa é igual a −10 °C. a) Qual é a temperatura na superfície da junção entre a madeira e o isopor? b) Qual é a taxa de transferência de calor por metro quadrado através da parede?

17.68 Um fogão de cozinha elétrico tem paredes com área total igual a 1,40 m² e um isolante com uma camada de fibra de vidro de espessura igual a 4,0 cm. A superfície interna da fibra de vidro possui temperatura igual a 175 °C e a superfície externa está a 35 °C. A condutividade térmica da fibra de vidro é 0,040 W/m · K. a) Qual é a taxa de transferência de calor através do isolante, supondo que ele possa ser tratado como uma placa com área total igual a 1,40 m²? b) Que potência elétrica deve ser fornecida ao elemento aquecedor para manter a temperatura necessária?

17.69 O teto de uma sala tem uma área de 125 pés quadrados. Ele é isolado com um valor de R igual a 30 (em unidades de (ft²) · °F · h/Btu). A superfície na sala é mantida a 69 °F e no sótão é mantida a 35 °F. Qual é a taxa de transferência do teto até o sótão em 5,0 h? Dê a sua resposta em Btu e em joules.

17.70 Uma das extremidades de uma barra longa, isolada na superfície lateral para impedir a perda de calor para o ambiente, está em contato térmico perfeito com água em ebulição (na pressão atmosférica), e a outra extremidade está em contato com um banho de água e gelo (Figura 17.31). A barra é composta por uma seção de 1,0 m de cobre (com uma extremidade no vapor d'água) e ligada pela outra extremidade a uma seção de aço de comprimento L_2 (com extremidade imersa no banho de gelo). As duas seções da barra possuem uma seção reta com a mesma área de 4,0 cm². A temperatura da junção entre o cobre e o aço é igual a 65 °C depois de ser atingido o estado estacionário. a) Qual é a quantidade de calor por segundo que flui do lado em contato com o vapor para a extremidade imersa no banho de água e gelo? b) Qual é o comprimento L_2 da seção de aço?

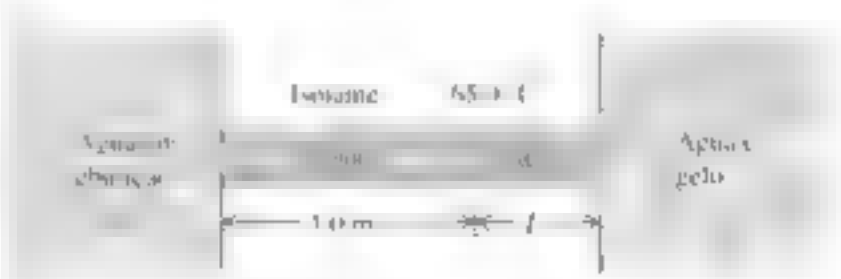


Figura 17.31 Exercício 17.70.

17.71 Uma panela com um fundo de aço de espessura igual a 8,50 mm está em repouso sobre um fogão quente. A área da base da panela é 0,150 m². A água no interior da panela está a 100 °C, e são vaporizados 0,390 kg de água a cada 3,0 min. Calcule a temperatura da superfície inferior da panela que está em contato com o fogão.

17.72 Você foi encarregado de projetar uma barra de aço cilíndrica de 50,0 cm de comprimento, com uma seção reta circular, que conduzirá 150,0 J/s de um forno a 400 °C a um recipiente de água fervente a uma pressão de uma atmosfera. Qual deve ser o diâmetro da barra?

17.73 Uma janela panorâmica tem dimensões de 1,40 m × 3,90 m e é feita de vidro com 5,70 mm de espessura. Em um dia de inverno,

a temperatura exterior é −20 °C enquanto a temperatura interior é confortável 19,5 °C. a) Qual a taxa de perda de calor por condução pela janela? b) Qual seria a taxa de perda de calor se você cobrisse a janela com uma camada de papel de 0,750 mm de espessura (condutividade térmica igual a 0,0500)?

17.74 Qual é a taxa de irradiação da energia por unidade de área de um corpo negro que está a uma temperatura de a) 273 K b) 2730 K?

17.75 Qual é a taxa resultante da perda de calor por radiação no Exemplo 17.16 (Seção 17.7) sabendo que a temperatura do ambiente é 5 °C?

17.76 A emissividade do tungstênio é igual a 0,35. Uma esfera de tungstênio com raio de 1,5 cm está suspensa no interior de um grande recipiente a vácuo cujas paredes estão a 290 K. Que potência deve ser fornecida à esfera para manter a sua temperatura em 3000 K, desprezando-se a condução de calor ao longo do suporte da esfera?

17.77 **Área do filamento de uma lâmpada de bulbo.** A temperatura de operação do filamento de tungstênio de uma lâmpada incandescente é 2450 K e sua emissividade é igual a 0,35. Calcule a área da superfície do filamento de uma lâmpada de 150 W, supondo que toda energia elétrica consumida pela lâmpada seja convertida em ondas eletromagnéticas pelo filamento. (Somente uma fração do espectro irradiado corresponde à luz visível.)

17.78 **Raios das estrelas.** A superfície quente e brilhante de uma estrela emite energia sob forma de radiação eletromagnética. É uma boa aproximação considerar $e = 1$ para essas superfícies. Calcule os raios das seguintes estrelas (supondo que elas sejam esféricas): a) Rigel, a estrela brilhante azul da constelação de Orion, que irradia energia com uma taxa de $2,7 \times 10^{32}$ W e tem uma temperatura de superfície igual a 11000 K. b) Procyon B (visível somente com um telescópio), que irradia energia com uma taxa de $2,1 \times 10^{23}$ W e tem uma temperatura de superfície igual a 10000 K. c) Compare suas respostas com o raio da Terra, com o raio do Sol e com a distância entre a Terra e o Sol. (Rigel é um exemplo de estrela *supergigante*, e Procyon B é uma estrela *anã branca*.)

Problemas

17.79 Você propõe uma nova escala de temperaturas com temperaturas dadas em °M. Você define 0 °M como o ponto de fusão do mercúrio, e 100 como o ponto normal de ebulição do mercúrio. a) Qual é o ponto normal de ebulição da água em °M? b) Uma variação de temperatura de 10 °M corresponde a quantos graus Celsius?

17.80 Suponha que fosse possível a construção de um aro de aço que se encaixasse com precisão no equador da Terra a uma temperatura de 20 °C. Qual seria o espaço entre o aro e a superfície terrestre caso a temperatura do aro aumentasse 0,50 °C?

17.81 A uma temperatura absoluta T_0, a aresta de um cubo é igual a L_0. A densidade desse cubo é ρ_0, e o material de que ele é feito tem um coeficiente de dilatação volumétrica β. a) Mostre que, quando a temperatura cresce de $T_0 + \Delta T$, a densidade do cubo passa a ser dada aproximadamente por

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta T)$$

(*Sugestão*: Use a expressão $(1 + x)^n = 1 + nx$, válida quando $|x| << 1$.) Explique por que esse resultado aproximado é válido somente quando ΔT for muito menor do que $1/\beta$, e explique por que se espera que essa aproximação será válida na maior parte dos casos. b) Um cubo de cobre possui aresta de 1,25 cm a 20 °C. Calcule a variação de volume e de densidade quando sua temperatura aumenta para 70 °C.

17.82 Um peso de 250 kg é pendurado no teto com um fio de cobre fino. Em seu modo fundamental, esse fio vibra na frequência de um A (lá) com afinação de concerto (440 Hz). A seguir, você aumenta a temperatura do fio em 40 °C. a) De que valor irá variar a frequência fundamental? Ela aumentará ou diminuirá? b) De que porcentagem a velocidade da onda no fio irá variar? c) De que porcentagem o comprimento de onda da onda estacionária fundamental irá variar? Ele aumentará ou diminuirá?

17.83 Você está fazendo um molho pesto para o seu macarrão e usa uma xícara cilíndrica de medição com 10,0 cm de altura, feita de vidro comum [$\beta = 2,7 \times 10^{-5}$ (°C)$^{-1}$], cheia de azeite de oliva [$\beta = 6,8 \times 10^{-4}$ (°C)$^{-1}$] até uma altura 1,0 mm abaixo do topo da xícara. Inicialmente, a xícara e o azeite estão à temperatura ambiente. Você recebe um telefonema e se esquece do azeite de oliva, deixando-o sobre o fogão quente. A xícara e o azeite se aquecem devagar e atingem uma temperatura comum. Em que temperatura o azeite começará a transbordar da xícara?

17.84 Use a Figura 17.12 para calcular o coeficiente de dilatação volumétrico aproximado da água a 2 °C e a 8 °C.

17.85 Um pêndulo de Foucault consiste em uma esfera de latão com um diâmetro de 35,0 cm suspenso por um cabo de aço de 10,5 m de comprimento (ambas as medições efetuadas a 20 °C). Devido a um descuido de projeto, a esfera oscilante passa rente ao chão, a apenas 2,0 mm de distância, quando a temperatura é 20 °C. Em que temperatura a esfera começa a tocar no chão?

17.86 Você despeja 108 cm^3 de álcool etílico, a uma temperatura de −10,0 °C, em um cilindro graduado inicialmente a 20 °C, enchendo-o até o topo. O cilindro é feito de vidro, com um calor específico de 840 J/kg · K, um coeficiente de dilatação volumétrica igual a $1,2 \times 10^{-5}$ K^{-1} e massa igual a 0,130 kg. A massa do álcool etílico é 0,0873 kg. a) Qual será a temperatura final do álcool etílico, uma vez que o equilíbrio térmico seja alcançado? b) Que quantidade de álcool etílico transbordará do cilindro antes que o equilíbrio térmico seja alcançado?

17.87 Uma barra metálica com 30,0 cm de comprimento se expande de 0,0650 cm quando sua temperatura aumenta de 0 °C até 100 °C. Uma barra de outro metal e com o mesmo comprimento dilata-se 0,0350 cm com a mesma variação de temperatura. Uma terceira barra, também com 30,0 cm de comprimento, feita pela junção de dois pedaços dos materiais mencionados acima conectados pelas suas extremidades, dilata-se de 0,0580 cm entre 0 °C e 100 °C. Calcule o comprimento de cada pedaço da barra composta.

17.88 Em uma fria manhã de sábado (4 °C), uma piloto enche de combustível o seu Pitts S-2C (um avião acrobático com dois assentos) até completar sua capacidade máxima de 106,0 L. Antes de voar no domingo pela manhã, quando a temperatura é novamente igual a 4 °C, ela verifica o nível do combustível e nota que existem somente 103,4 L de gasolina nos tanques. Ela conclui que a temperatura no sábado se elevou e a gasolina transbordou. a) Qual foi a temperatura máxima (em °C) atingida pelo combustível na tarde de sábado? O coeficiente de dilatação volumétrica da gasolina é igual a $9,5 \times 10^{-4}$ K^{-1}, e o tanque é de alumínio. b) Para que ela pudesse dispor de maior quantidade de combustível para o vôo, quando ela deveria ter enchido o tanque?

17.89 a) A Equação (17.12) fornece a tensão necessária para manter constante o comprimento da barra à medida que a temperatura varia. Mostre que, se o comprimento pudesse variar de ΔL quando sua temperatura varia de ΔT, a tensão seria dada por

$$\frac{F}{A} = Y\left(\frac{\Delta L}{L_0} - \alpha\Delta T\right)$$

onde F é a tensão na barra, L_0 é o comprimento original da barra, A é a área da seção reta, α é o coeficiente de dilatação linear e Y é o módulo de Young. b) Uma pesada barra de latão possui duas projeções ligadas em suas extremidades, como mostra a Figura 17.32. Dois fios finos de aço amarrados entre as projeções estão apenas levemente esticados (sem nenhuma tensão) quando o sistema está a 20 °C. Qual é a tensão de dilatação nos fios de aço quando a temperatura do sistema se eleva até 140 °C? Faça as hipóteses simplificadoras que julgar necessárias, porém enuncie e explique o que elas significam.

Figura 17.32 Problema 17.89

17.90 Uma barra de aço com 0,350 m de comprimento e uma barra de alumínio com 0,250 m de comprimento, ambos com o mesmo diâmetro, são dispostas com suas extremidades juntas entre dois suportes rígidos, de modo que não exista nenhuma tensão inicial entre as barras. Eleva-se a temperatura das barras em 60 °C. Qual é a tensão em cada barra? (*Sugestão*: O comprimento das duas barras combinadas permanece constante, porém o comprimento individual de cada barra deve variar. Ver o Problema 17.89.)

17.91 Um anel de aço cujo diâmetro interno a 20 °C é 6,3500 cm deve ser aquecido para encaixar em um eixo de latão com diâmetro externo igual a 6,3551 cm a 20 °C. a) Até que temperatura o anel deve ser aquecido? b) Se o anel e o eixo forem resfriados simultaneamente por algum meio, tal como o ar líquido, em que temperatura o anel começa a deslizar para fora do eixo?

17.92 **Tensão volumétrica provocada por um aumento de temperatura.** a) Prove que, se a temperatura de um objeto sob pressão aumentar, mas ele for impedido de se dilatar, o aumento de pressão é dado por

$$\Delta p = B\beta\Delta T$$

onde supomos que o módulo de compressão B e o coeficiente de dilatação volumétrica β sejam positivos e constantes. b) Qual é a pressão necessária para impedir que um bloco de aço sofra uma expansão quando sua temperatura aumenta de 20 °C até 35 °C?

17.93 Um líquido está encerrado em um cilindro metálico que dispõe de um pistão feito com o mesmo metal. O sistema está originalmente a uma pressão de 1,0 atm ($1{,}013 \times 10^5$ Pa) e a uma temperatura de 30 °C. O pistão é forçado para baixo até que sua pressão sobre o líquido aumenta 50,0 atm e, a seguir, ele é preso nessa posição. Calcule a nova temperatura na qual a pressão do líquido é novamente igual a 1,0 atm. Suponha que o cilindro seja suficientemente robusto para que seu volume não seja alterado por variações de pressão, mas somente por variações de temperatura. Use os resultados obtidos no Problema 17.92. (*Sugestão*: Ver a Seção 11.4.)

Compressibilidade do líquido: $k = 8{,}50 \times 10^{-10}\ \text{Pa}^{-1}$

Coeficiente de dilatação volumétrica do líquido: $\beta = 4{,}80 \times 10^{-4}\ \text{K}^{-1}$

Coeficiente de dilatação volumétrica do metal: $\beta = 3{,}90 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1}$.

17.94 Você resfria um pedaço de ferro candente (temperatura igual a 745°) de massa igual a 100,0 g mergulhando-o em um recipiente isolado de massa desprezível contendo 75,0 g de água a 20 °C. Supondo que não haja nenhuma troca de calor com o meio ambiente, a) qual é a temperatura final da água e b) qual é a massa final do ferro e da água restante?

17.95 **Retorno de uma nave espacial.** Uma nave espacial, feita de alumínio descreve uma trajetória circular em torno da Terra com uma velocidade de 7700 m/s. a) Determine a razão entre sua energia cinética e a energia necessária para elevar sua temperatura de 0 °C até 600 °C. (O ponto de fusão do alumínio é igual a 660 °C. Suponha que o calor específico seja constante e igual a 910 J/kg · K.) b) Com base na sua resposta, discuta o que ocorre quando uma nave espacial tripulada reentra na atmosfera terrestre.

17.96 Um cabrestante é um tambor ou um cilindro que gira enrolando uma corda ou cabo para amplificar a tensão na corda enquanto suas extremidades ficam livres (Figura 17.33). Como a tensão adicional na corda é produzida pelo atrito, o cabrestante gera energia térmica. a) Sabendo que a diferença de tensão entre as duas extremidades da corda é 520 N e que o cabrestante possui diâmetro igual a 10,0 cm e gira uma vez a cada 0,900 s, calcule a taxa de geração de energia térmica. Por que o número de giros não é importante? b) Se o cabrestante for feito de ferro e possuir massa de 6,0 kg, qual é a taxa de aumento de sua temperatura? Suponha que a temperatura do cabrestante seja uniforme e que toda energia térmica gerada flua para ele.

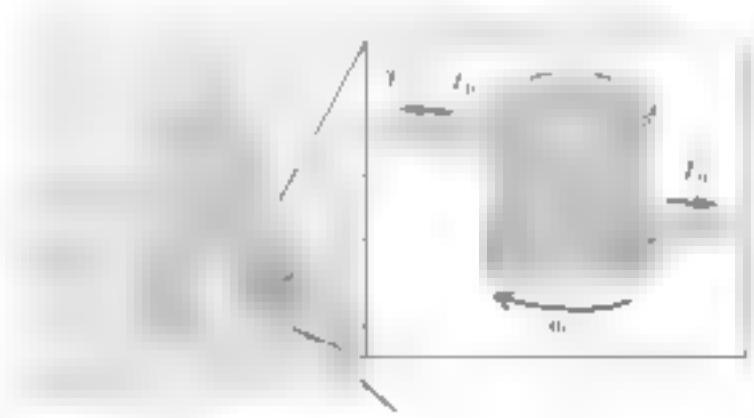


Figura 17.33 Problema 17.96

17.97 **Lei T^3 de Debye.** Em temperaturas muito baixas, o calor específico molar do sal de rocha varia com a temperatura de acordo com a lei T^3 de Debye:

$$C = k\frac{T^3}{\Theta^3}$$

onde $k = 1940$ J/mol · K e $\Theta = 281$ K. a) Qual é a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1,50 mol de sal de rocha de 10,0 K até 40,0 K? (*Sugestão*: Use a Equação (17.18) na forma $dQ = nC\ dT$ e integre.) b) Qual é o calor específico molar a 40,0 K?

17.98 Um homem com 70,0 kg de massa está em uma banheira. A banheira possui 190 cm de comprimento e 80 cm de largura, antes de a pessoa entrar, a profundidade da água era de 10 cm. A água está a uma temperatura de 37 °C. Suponha que a água esfriasse espontaneamente e formasse gelo a 0 °C, e que toda a energia liberada fosse usada para lançar o infeliz banhista verticalmente para cima. Qual seria a altura atingida pelo banhista? (Como você verá no Capítulo 20, esse evento seria permitido pela conservação da energia, porém ele é proibido pela segunda lei da termodinâmica.)

17.99 **Ar quente em uma aula de física.** a) Um estudante típico assistindo a uma aula de física atentamente produz um calor de 100 W. Qual é a quantidade de calor produzida por uma turma de 90 alunos de física em um anfiteatro ao longo de 50 min de aula? b) Suponha que todo o calor calculado na parte (a) seja transferido para 3200 m^3 de ar do anfiteatro. O calor específico do ar é igual a 1,20 kg/m^3. Sabendo que não ocorre nenhuma perda de calor e o condicionador de ar está desligado, qual é o aumento da temperatura do ar do anfiteatro durante os 50 min de aula? c) Quando os alunos estão fazendo uma prova, o calor produzido por aluno aumenta para 780 W. Qual seria o aumento de temperatura do ar do anfiteatro durante 50 min, nesse caso?

17.100 O calor específico molar de certa substância varia com a temperatura de acordo com a seguinte equação empírica

$$C = 29{,}5\ J/mol \cdot K + (8{,}20 \times 10^{-3}\ J/mol \cdot K^2)\,T$$

Qual é o calor necessário para fazer a temperatura de 3,0 mol dessa substância variar de 27 °C até 227 °C? (*Sugestão*. Use a Equação (17.18) na forma $dQ = nC\,dT$ e integre.)

17.101 Você decide construir uma geladeira primitiva de isopor para a sua cabana na floresta, planejando manter o interior da geladeira frio com um bloco de gelo com uma massa inicial de 24,0 kg. As dimensões da caixa são 0,500 m × 0,800 m × 0,500 m. A água formada a partir do gelo derretido é coletada no fundo da caixa. Suponha que o bloco de gelo esteja a 0 °C e que a temperatura externa seja 21 °C. Se a tampa da caixa vazia nunca for aberta e você quiser que o interior da caixa permaneça a 5 °C por exatamente uma semana, qual deve ser a espessura do isopor?

17.102 **Água quente versus aquecimento a vapor.** Em um sistema de aquecimento doméstico, a água é enviada aos radiadores a 70,0 °C e sai dos radiadores a 28 °C. O sistema deve ser substituído por outro no qual o vapor d'água a uma pressão de 1 atm se condensa nos radiadores, e o vapor condensado deixa os radiadores a 35,0 °C. Quantos quilogramas de vapor fornecerão o mesmo calor que foi fornecido por 1,0 kg de água quente no primeiro sistema?

17.103 Um calorímetro de cobre com 0,446 kg de massa contém 0,0950 kg de gelo. O sistema está inicialmente a 0 °C. a) Adicionando-se 0,0350 kg de vapor d'água a 100 °C e 1,0 atm de pressão à água do recipiente do calorímetro, qual será a temperatura final do calorímetro e seu conteúdo? b) Na temperatura final, quantos quilogramas de gelo, quanto vapor d'água, e quantos litros de água existem no calorímetro?

17.104 Um balde de isopor de massa desprezível contém 1,75 kg de água e 0,450 kg de gelo. Mais gelo, de um refrigerador a –15 °C, é acrescentado à mistura no balde e, quando o equilíbrio térmico é atingido, a massa total de gelo no balde é 0,778 kg. Supondo que não haja troca de calor com o meio ambiente, que massa de gelo foi acrescentada?

17.105 Em um recipiente de massa desprezível, misturamos 0,0400 kg de vapor d'água a 100 °C e na pressão atmosférica com 0,200 kg de água a 50 °C. a) Se nenhum calor é perdido para as vizinhanças, qual é a temperatura final do sistema? b) Quantos quilogramas de vapor d'água e de água líquida permanecem em equilíbrio na temperatura final?

17.106 Um tubo liga um calorímetro de 0,190 kg a um frasco no qual a água está em ebulição à pressão atmosférica. O calorímetro possui calor específico igual a 420 J/kg · K, e contém adicionalmente 0,340 kg de água a 15 °C. O vapor se condensa no calorímetro sob pressão de 1 atm até que a temperatura do calorímetro com seu conteúdo atinge 71 °C, sendo, nesse ponto, a massa total do calorímetro com o conteúdo igual a 0,525 kg. Calcule o calor de vaporização da água usando esses dados.

17.107 Um trabalhador despeja 1,250 kg de chumbo derretido à temperatura de 365 °C em 0,5000 kg de água a uma temperatura de 75 °C em um balde isolante de massa desprezível. Supondo que não haja perda de calor para o meio ambiente, calcule a massa de chumbo e água remanescente no balde quando os materiais houverem alcançado o equilíbrio térmico.

17.108 Um método experimental para medir a condutividade térmica de um material isolante consiste em construir uma caixa com esse material e medir a potência fornecida por um aquecedor elétrico no interior da caixa. Esse aquecedor mantém o interior da caixa a uma temperatura acima da temperatura da superfície externa. Suponha que esse dispositivo precise de uma potência de 180 W para manter a superfície interna da caixa a 65 °C acima da temperatura da superfície externa. A área total da caixa é igual a 2,18 m^2 e a parede possui espessura de 3,9 cm. Calcule a condutividade térmica do material em unidades SI.

17.109 **Efeito de uma janela em uma porta.** Um carpinteiro constrói uma porta de madeira maciça com dimensões de 2,0 m × 0,95 m × 5,0 cm. Sua condutividade térmica é $k = 0{,}120$ W/m · K. A película de ar sobre a superfície interna e a película sobre a superfície externa da porta produzem uma resistência térmica conjunta equivalente a uma camada de madeira adicional com espessura igual 1,8 cm. A temperatura do ar no interior é igual a 20 °C, e a temperatura do ar exterior é igual a –8 °C. a) Qual é a taxa de transferência de calor através da porta? b) Qual é o fator de aumento da transferência de calor se uma janela quadrada de 0,50 m de lado for aberta na porta? O vidro possui espessura de 0,45 cm e a sua condutividade térmica é igual a 0,80 W/m · K. A película de ar sobre a face interna e a película sobre a face externa do vidro produzem uma resistência térmica conjunta equivalente a uma camada de vidro adicional com espessura de 12,0 cm.

17.110 Um teto de madeira de resistência térmica R_1 é coberto com uma camada de isolante com resistência térmica R_2. Prove que a resistência térmica efetiva produzida por essa combinação é dada por $R = R_1 + R_2$.

17.111 Calcule a razão entre a perda de calor de uma janela simples com área de 0,15 m^2 e a perda de calor de uma janela dupla com a mesma área. A espessura do vidro de uma janela simples é 4,2 mm, e o espaço de ar entre os vidros de uma janela dupla apresenta uma espessura de 7,0 mm. A condutividade térmica do vidro é igual a 0,80 W/m · K. A película de ar sobre a superfície interna da sala e a película sobre a superfície externa produzem uma resistência térmica conjunta de 0,15 $m^2 \cdot K/W$.

17.112 Três barras, uma de cobre, uma de latão e outra de aço, são soldadas juntas em uma armação em forma de Y. A área da seção reta de cada barra é 2,0 cm^2. A extremidade livre da barra de cobre é mantida a 100 °C, e as extremidades livres das barras de latão e de aço são mantidas a 0 °C. Suponha que não exista perda de calor na superfície lateral de nenhuma barra. O comprimento da barra de cobre é 13,0 cm, o da barra de latão é 18,0 cm e o da barra de aço é 24,0 cm. a) Qual é a temperatura no ponto da junção entre as barras? b) Qual é a taxa de transferência de calor através de cada barra?

17.113 **Tempo necessário para um lago congelar.** a) Quando a temperatura do ar é 0 °C, a água da superfície de um lago congela e forma uma camada de gelo. Por que o gelo não se forma no volume total do lago? b) Mostre que a espessura da camada de gelo da superfície do lago é proporcional à raiz quadrada do tempo, se o calor de fusão da água que se congela abaixo da camada de gelo sofrer condução através dessa camada. c) Supondo que a superfície exterior da camada de gelo esteja a uma temperatura de –10 °C e que a superfície inferior esteja a 0 °C, calcule o tempo necessário para se formar uma camada de gelo com espessura de 25 cm. d) Caso o lago na parte (c) tenha

uma profundidade de 40 m, quanto tempo seria necessário para que ocorresse o congelamento do volume total do lago? Seria provável que isso ocorresse?

17.114 Uma barra está inicialmente a uma temperatura uniforme de 0 °C. Uma de suas extremidades é mantida a 0 °C e a outra é colocada em contato com vapor d'água a 100 °C. A superfície da barra é isolada de modo que o calor só possa ser transmitido na direção ao longo do eixo da barra. A área da seção reta da barra é 2,50 cm^2, seu comprimento é 120 cm, sua condutividade térmica é 380 W/m • K, sua densidade é $1,0 \times 10^4$ kg/m^3 e seu calor específico é 520 J/kg • K. Considere um elemento cilíndrico da barra com um comprimento de 1,0 cm. a) Se o gradiente de temperatura na extremidade fria desse elemento for igual a 140 °C/m, quantos joules de energia calorífica devem fluir por essa extremidade por segundo? b) Quando a temperatura média do elemento está aumentando a uma taxa de 0,250 °C/s, qual é o gradiente de temperatura na outra extremidade do elemento?

17.115 Uma cabana rústica tem uma área ocupada de 3,50 m × 3,0 m. Suas paredes, de 2,50 m de altura, são feitas de madeira (condutividade térmica igual a 0,0600 W/m • K), com 1,80 cm de espessura e, além disso, são isoladas com 1,50 cm de um material sintético. Quando a temperatura externa é 2 °C, descobre-se que é necessário aquecer a sala à taxa de 1,25 kW para manter sua temperatura a 19 °C. Calcule a condutividade térmica do material isolante. Despreze o calor perdido pelo teto e o piso. Suponha que as superfícies das paredes interna e externa tenham a mesma temperatura que o ar dentro e fora da cabana.

17.116 A energia irradiada pelo Sol atinge o topo da atmosfera terrestre com uma taxa aproximadamente igual a 1,50 kW/m^2. A distância entre a Terra e o Sol é $1,50 \times 10^{11}$ m, e o raio do Sol é $6,96 \times 10^8$ m. a) Qual é a taxa de irradiação de energia por unidade de área da superfície do Sol? b) Supondo que o Sol irradie como um corpo negro ideal, qual é a temperatura da superfície do Sol?

17.117 **Uma garrafa térmica para o hélio líquido.** Um físico usa um recipiente cilíndrico metálico com diâmetro de 0,090 m e altura de 0,250 m para armazenar hélio líquido a 4,22 K. nessa temperatura, o calor de vaporização do hélio é igual a $2,09 \times 10^4$ J/kg. Envolvendo completamente o cilindro metálico existem paredes externas conservadas a uma temperatura de nitrogênio líquido, 77,3 K, havendo vácuo entre o cilindro interno e a parede externa. Qual é a quantidade de hélio perdida por hora? A emissividade do cilindro metálico é 0,200. A única transferência de calor entre o cilindro metálico e as paredes externas ocorre por radiação.

17.118 **Dilatação térmica de um gás ideal.** a) A pressão P, o volume V, o número de moles n e a temperatura Kelvin T de um gás ideal são relacionados pela equação $PV = nRT$, onde R é uma constante. Prove que o coeficiente de dilatação volumétrica de um gás ideal é igual ao inverso da temperatura Kelvin quando a expansão ocorre à pressão constante. b) Compare o coeficiente de dilatação volumétrica do cobre com o do ar a uma temperatura de 20 °C. Suponha que o ar possa ser considerado um gás ideal e que a pressão permaneça constante.

17.119 Um engenheiro está projetando um aquecedor elétrico para fornecer um fluxo contínuo de água quente. Um projeto inicial é apresentado na Figura 17.34. A água flui a uma taxa de 0,500 kg/min, o termômetro colocado na entrada registra 18 °C, o voltímetro indica 120 V e o amperímetro mede 15,0 A (o que corresponde a uma potência fornecida de (120 V) × (15,0 A) = 1800 W). a) Quando o estado estacionário é atingido, qual é a leitura do termômetro colocado na saída? b) Por que não é necessário considerar a capacidade calorífica *mc* do próprio dispositivo?

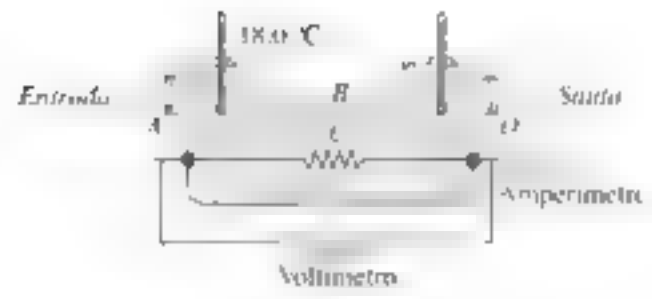


Figura 17.34 Problema 17.119

17.120 **Alimentação de um *hamster*.** A energia liberada pela atividade de um animal denomina-se taxa de metabolismo basal (BMR), sendo uma medida da conversão da energia de um alimento em outras formas de energia. Um calorímetro simples destinado a medir a BMR consiste em uma caixa isolada com um termômetro para medir a temperatura do ar. O ar possui densidade igual a 1,20 kg/m^3 e calor específico igual a 1020 J/kg • K. Um *hamster* de 50,0 g é colocado em um calorímetro que contém 0,0500 m^3 de ar na temperatura ambiente. a) Quando o *hamster* corre ao longo de uma roda, a temperatura do ar no interior do calorímetro aumenta 1,6 °C por hora. Qual é a quantidade de calor produzida em 1h pelo *hamster* quando ele está correndo? Suponha que todo esse calor flua para o ar do interior do calorímetro. Despreze o calor que flui para as paredes da caixa e para o termômetro, e suponha que não haja perda de calor para as vizinhanças do sistema. b) Suponha que o *hamster* converta os grãos ingeridos em calor com uma eficiência de 10% e que o grão ingerido possua um valor alimentício equivalente a 24 J/g. Quantos gramas de alimento o *hamster* deve ingerir por hora para fornecer essa energia?

17.121 As calotas de gelo da Groenlândia e da Antártica contêm cerca de 1,75% de toda a água (em massa) da superfície da Terra, os oceanos contêm cerca de 97,5%, e o restante 0,75% é composto principalmente pelos lençóis freáticos. Suponha que as calotas de gelo, atualmente a uma temperatura média de cerca de −30 °C, deslizassem para dentro dos oceanos e derretessem. Qual seria a resultante diminuição na temperatura do oceano? Suponha que a temperatura média da água do oceano seja atualmente 5 °C.

Problemas desafiadores

17.122 a) Uma esfera oca possui uma superfície interna com temperatura T_2 e raio a, e uma superfície externa com temperatura T_1 e raio b. A condutividade térmica do material da esfera é k. Deduza uma expressão para a taxa total de transferência de calor através da esfera oca. b) Deduza uma expressão para a variação de temperatura no interior da esfera oca da parte (a); ou seja, calcule T em função de r, a distância entre o centro da esfera e o ponto considerado. c) Um cilindro oco de comprimento L possui uma superfície interna com temperatura T_2 e raio a, e uma superfície externa com temperatura T_1 e raio b. (O cilindro poderia representar, por exemplo, um tubo isolado que conduz água quente.) A condutividade térmica do material do cilindro é k. Deduza uma equação para a taxa total de transferência de calor através das paredes do cilindro. d) Para o cilindro da parte (c), deduza uma expressão para a temperatura no interior das paredes cilíndricas. e) Mostre que tanto a equação da taxa de transferência de calor obtida na parte (a) quanto a obtida na parte (c) se reduzem à Equação (17.21) para a transferência de calor através quando a camada esférica ou o cilindro forem muito finos.

17.123 Um tubo de vapor d'água com raio igual a 2,0 cm transportando vapor a 140 °C é revestido por um invólucro cilíndrico com um raio interno de 2,0 cm e um raio externo de 4,0 cm, e feito

com um tipo de cortiça de condutividade térmica igual a 4,0 × 10^{-2} W/m • K. Esse cilindro, por sua vez, é revestido por outro invólucro cilíndrico com uma camada de isopor com condutividade térmica igual a 1,0 × 10^{-2} W/m • K com um raio interno de 4,0 cm e um raio externo igual a 6,0 cm (Figura 17.35). A superfície externa do isopor está a uma temperatura de 15 °C. a) A um raio de 4,0 cm, qual é a temperatura no local onde as duas superfícies se juntam? b) Qual é a taxa total de transferência de calor a partir de uma extensão de 2,0 m do tubo? (*Sugestão*: Use a expressão deduzida na parte (c) do Problema desafiador 17.122.)

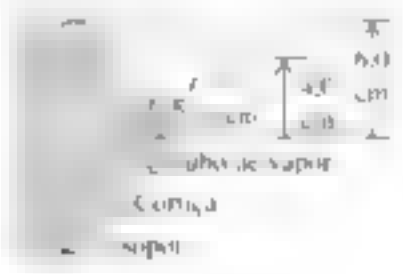


Figura 17.35 Problema desafiador 17.125

17.124 Suponha que as duas extremidades da barra da Figura 17.23 sejam mantidas à temperatura de 0 °C e que a distribuição da temperatura inicial ao longo da barra seja dada por $T = (100\ °C)\ \text{sen}\ \pi x/L$, onde x é medido a partir da extremidade esquerda da barra. Suponha que a barra seja de cobre, com comprimento $L = 0{,}100$ m, e área da seção reta igual a 1,0 cm^2. a) Mostre a distribuição da temperatura inicial em um diagrama. b) Qual é a distribuição final de temperatura depois de decorrido um intervalo de tempo muito longo? c) Faça um esboço mostrando as curvas que você imagina que possam representar a distribuição de temperatura em tempos intermediários. d) Qual é o gradiente de temperatura inicial nas extremidades da barra? e) Qual é a taxa de transferência de calor inicial nas extremidades da barra para os corpos que estão em contato com essas extremidades? f) Qual é a taxa de transferência de calor inicial no centro da barra? Explique. Qual é a taxa de transferência de calor nesse ponto em qualquer instante posterior? g) Qual é o valor da *difusividade térmica* $k/\rho c$ para o cobre e quais são as unidades dessa grandeza? (Aqui, k é a condutividade térmica, $\rho = 8{,}9 \times 10^3$ kg/m^3 é a densidade e c é o calor específico.) h) Qual é a taxa inicial da variação da temperatura com o tempo no centro da barra? i) Quanto tempo seria necessário para o centro da barra atingir sua temperatura final caso a temperatura continue com essa taxa? (Esse tempo é chamado de *tempo de relaxação* da barra.) j) Usando os gráficos da parte (c), você esperaria que o módulo da taxa de variação da temperatura no ponto médio permanecesse constante, aumentasse ou diminuísse em função do tempo? k) Qual é a taxa inicial da variação da temperatura em um ponto da barra situado a 2,5 cm da sua extremidade esquerda?

17.125 **Variação de temperatura em um relógio.** Um relógio de pêndulo deve fazer um "tique" de um segundo para cada oscilação do pêndulo de uma extremidade até a outra (dois "tiques" para cada período completo). a) Um relógio de pêndulo adianta no verão e atrasa no inverno, ou ocorre o inverso? Explique o seu raciocínio. b) Um dado relógio de pêndulo mantém o tempo corretamente a uma temperatura de 20 °C. O eixo do pêndulo é feito de aço e sua massa pode ser desprezada em comparação com a massa do peso na extremidade do pêndulo. Qual é a fração da variação do comprimento do eixo do pêndulo quando ele for esfriado até 10 °C? c) Quantos segundos por dia o relógio ganha ou perde com uma temperatura de 10 °C? d) Qual é o intervalo de controle da temperatura para que o relógio não atrase nem adiante mais do que 1,0 s por dia? Sua resposta depende do período do pêndulo?

17.126 Uma das extremidades de um cilindro de cobre sólido com 0,200 m de comprimento é mantida a 20 K. A outra extremidade é pintada de preto e exposta a uma radiação térmica proveniente de paredes vizinhas a 500 K. A superfície lateral da barra está isolada, de modo que a energia só pode entrar ou sair através das extremidades da barra. Ao ser atingido o equilíbrio, qual é a temperatura da extremidade negra? (*Sugestão*: Como o cobre é um excelente condutor de calor em baixas temperaturas, sendo k = 1670 W/m • K a 20 K, a temperatura da extremidade negra é apenas ligeiramente maior do que 20 K.)

17.127 **Uma caminhada ao Sol.** Considere um pobre viajante perdido no deserto caminhando a 5 km/h em um dia quente, vestindo somente roupa de banho. A temperatura da pele dessa pessoa tende a aumentar devido a quatro mecanismos: i) a energia é liberada por reações metabólicas do corpo a uma taxa de 280 W, e essa energia é quase toda convertida em calor que flui para a pele; ii) ocorre transferência de calor por convecção do ar para a pele a uma taxa dada por $k' A_{pele} (T_{ar} - T_{pele})$, onde k' é 54 J/h • °C • m^2, a área da pele exposta A_{pele} é 1,5 m^2 e a temperatura do ar é 36 °C; iii) a pele absorve a energia irradiada pelo Sol a uma taxa de 1400 W/m^2; iv) a pele absorve a energia irradiada pelo ambiente, que está a uma temperatura de 47 °C. a) Calcule a taxa total (em watts) do aquecimento da pele produzido por esses quatro mecanismos. Suponha que a emissividade da pele seja $e = 1$ e que a temperatura inicial da pele seja igual a 36 °C. Qual desses mecanismos é o mais importante? b) Qual deve ser a taxa (em L/h) de vaporização do suor da pele dessa pessoa para manter a temperatura da pele constante? (O calor de vaporização da água a 36 °C é igual a 2,42 × 10^6 J/kg.) c) Suponha agora que a pessoa esteja protegida por roupa branca ($e = 0$), de modo que a área da pele exposta seja reduzida para 0,45 m^2. Qual é agora a taxa de transpiração necessária? Discuta a utilidade das roupas tradicionalmente usadas pelos habitantes dos desertos.

PROPRIEDADES TÉRMICAS DA MATÉRIA

18

Quanto mais alta a temperatura de um gás, maior é a energia cinética média de suas moléculas. Quão mais rápidas são as moléculas que se movem no ar sobre uma frigideira (100 °C) em relação às que se movem no ar circundante da cozinha (25 °C)?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como relacionar a pressão, volume e temperatura de um gás
- De que forma as interações entre as moléculas de uma substância determinam suas propriedades
- Como a pressão e a temperatura de um gás estão relacionadas à energia cinética de suas moléculas
- De que maneira o calor específico de um gás revela se suas moléculas estão em movimento rotacional ou vibratório
- O que determina se uma substância é um gás, um líquido ou um sólido

A cozinha é um excelente local para aprender como as propriedades da matéria dependem da temperatura. Quando você ferve água em uma chaleira, o aumento da temperatura produz um vapor que assobia ao passar pelo bico da chaleira a uma pressão elevada. Se você esquece de fazer pequenos furos na batata antes de assá-la, o vapor d'água produz uma pressão elevada em seu interior e ela pode explodir. O vapor d'água existente no ar pode se condensar formando gotas na parte externa de um copo com água gelada; se um copo acaba de ser retirado do congelador, forma-se gelo em volta dele porque o vapor d'água se solidifica.

Todos esses exemplos mostram as relações entre fenômenos de grande escala ou propriedades *macroscópicas* da substância como a pressão, o volume, a temperatura e a massa. Porém, podemos também descrever uma substância usando suas propriedades *microscópicas*. Isso significa investigar grandezas em pequena escala, tais como a massa, a velocidade, a energia cinética e o momento linear das moléculas individuais que constituem a substância.

As descrições macroscópicas e microscópicas estão intimamente relacionadas. Por exemplo, a força da colisão (microscópica) que ocorre quando moléculas de ar batem em uma superfície (tal como a sua pele) produz a pressão atmosférica (macroscópica). A pressão atmosférica normal é $1{,}01 \times 10^5$ Pa; para produzir essa pressão, 10^{32} moléculas colidem com sua pele todos os dias, a uma velocidade da ordem de 1700 km/h!

Neste capítulo, começaremos a estudar as propriedades térmicas da matéria, analisando alguns aspectos macroscópicos da matéria em geral. Daremos uma atenção especial ao *gás ideal*, um dos tipos mais simples de matéria. Utilizando nossos conhecimentos de momento linear e energia cinética, relacionaremos as propriedades macroscópicas de um gás ideal ao comportamento microscópico de suas moléculas individuais. Usaremos também idéias microscópicas para entender o calor específico tanto de gases quanto de sólidos. Finalmente, analisaremos as diversas fases da matéria — gasosa, líquida e sólida — e as condições que determinam a ocorrência dessas fases.

18.1 Equações de estado

As condições nas quais um dado material existe são descritas por grandezas físicas como a pressão, o volume, a temperatura e a quantidade de substância. Por exemplo, um tanque de oxigênio usado em equipamentos de solda possui um manômetro que mostra a pressão e uma indicação de volume. Poderíamos também usar um termômetro e colocar o tanque sobre uma balança para determinar sua massa. Essas variáveis indicam o *estado* do material e são chamadas de **variáveis de estado**.

O volume V de uma substância é geralmente determinado por sua pressão P, temperatura T e pela quantidade de substância, descrita pela massa m_{tot} ou pelo número de moles n. (Estamos atribuindo o símbolo m_{tot} à massa total de uma substância porque iremos usar o símbolo m para a massa de uma molécula.) Geralmente, não podemos variar uma dessas grandezas sem produzir variações nas outras. Quando o tanque de oxigênio fica mais quente, a pressão aumenta. Caso o tanque fique muito quente, ele explode: isso às vezes ocorre quando o vapor no interior de uma caldeira de vapor d'água fica superaquecido.

Em alguns casos, a relação entre P, V, T e m (ou n) é tão simples que podemos expressá-la na forma de uma equação denominada **equação de estado**. Quando a relação for complicada demais para essa equação, podemos usar gráficos ou tabelas numéricas. Contudo, a relação entre essas variáveis ainda existe; nós a chamamos de equação de estado mesmo quando não conhecemos a forma explícita da equação.

A seguir, mostramos uma equação de estado simples (embora aproximada) para um material sólido. O coeficiente de dilatação volumétrica β (Seção 17.4) é a variação de volume $\Delta V/V_0$ por unidade de variação de temperatura, e a compressibilidade k (ver Seção 11.4) é a variação relativa de volume $\Delta V/V_0$ por unidade de pressão, com sinal negativo. Se um material possui volume V_0 quando sua pressão é P_0 e sua temperatura é T_0, o volume V quando a pressão P e a temperatura T são ligeiramente diferentes é dado aproximadamente por

$$V = V_0 [1 + \beta(T - T_0) - k(P - P_0)] \qquad (18.1)$$

(Existe um sinal negativo antes de $k(P - P_0)$ porque um *aumento* de pressão produz uma *diminuição* do volume.) A Equação (18.1) denomina-se *equação de estado* do material.

Equação do gás ideal

A equação do *gás ideal* é outro tipo simples de equação de estado. Na Figura 18.1, apresentamos um dispositivo experimental para estudar o comportamento de um gás. O cilindro possui um pistão móvel para fazer o volume variar, a variação da temperatura é obtida pelo aquecimento e podemos bombear qualquer quantidade de gás para o interior do cilindro. A seguir, medimos a pressão, o volume, a temperatura e a quantidade de gás. Note que a *pressão* se refere à força por unidade de área exercida pelo cilindro sobre o gás e à força por unidade de área exercida pelo gás sobre o cilindro; pela terceira lei de Newton, essas pressões devem ser iguais.

Comumente é mais fácil descrever a quantidade de gás pelo número de moles n do que pela massa. Já fizemos isso quando definimos o calor específico molar na Seção 17.5; talvez você deseje rever aquela seção. A **massa molar** M de um composto (algumas vezes chamada de *peso molecular*) é a massa por mol, e a massa total m_{tot} de uma dada quantidade desse composto é o número de moles n vezes a massa molar M:

$$m_{tot} = nM \qquad \begin{matrix}\text{(massa total, número de}\\ \text{moles e massa molar)}\end{matrix} \qquad (18.2)$$

Assim, quando sabemos o número de moles de um gás no cilindro, podemos calcular a massa do gás por meio da Equação (18.2).

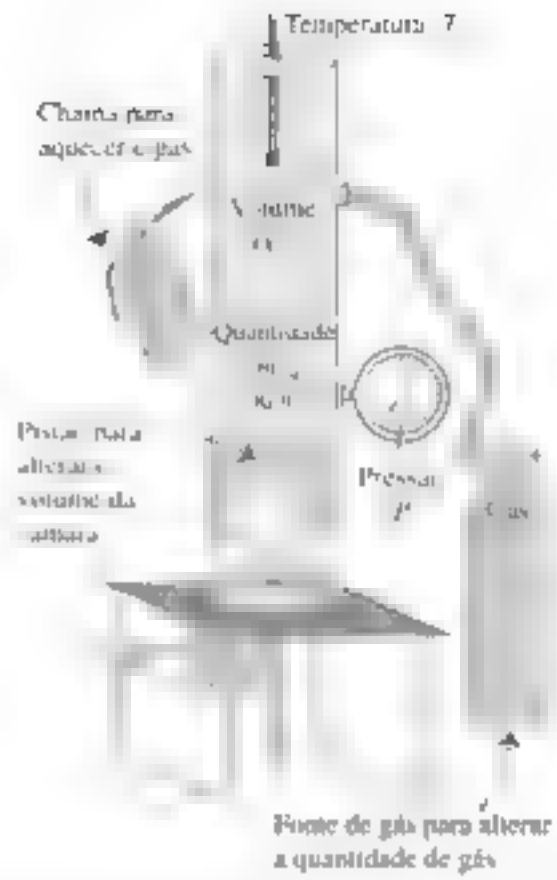

Temperatura T
Chama para aquecer o gás
Volume V
Quantidade n
Pistão para alterar o volume do cilindro
Pressão P
Fonte de gás para alterar a quantidade de gás

Figura 18.1 Um dispositivo hipotético para estudar o comportamento de gases. Aquecendo o gás, variando o volume com um pistão móvel e acrescentando mais gás, podemos controlar a pressão P, o volume V, a temperatura T e o número de moles n.

As medidas do comportamento de muitos gases conduzem a três conclusões:

1. O volume V é proporcional ao número de moles n. Quando dobramos o número de moles, mantendo a temperatura e a pressão constantes, o volume duplica.

2. O volume é *inversamente* proporcional à pressão absoluta P. Quando dobramos a pressão, mantendo a temperatura T e o número de moles n constantes, o gás se comprime à metade do volume inicial. Em outras palavras, PV = constante quando n e T permanecem constantes.

3. A pressão é proporcional à temperatura *absoluta*. Quando dobramos a temperatura absoluta, mantendo o volume e o número de moles constantes, a pressão dobra. Em outras palavras, P = (constante)T quando n e V são constantes.

As três proporcionalidades anteriores podem ser combinadas em uma única equação, denominada **equação de estado do gás ideal**:

$$PV = nRT \quad \text{(equação do gás ideal)} \qquad (18.3)$$

Figura 18.2 A equação do gás ideal fornece uma boa descrição do ar dentro do pneu cheio de um carro, em que a pressão é cerca de 3 atm e a temperatura é alta demais para que o nitrogênio ou o oxigênio se liquefaçam. Quando o pneu se aquece (T aumenta), o volume V varia apenas levemente, mas a pressão P aumenta.

onde R é uma constante de proporcionalidade. Um **gás ideal** é aquele cujo comportamento pode ser descrito com precisão pela Equação (18.3) em *todas* as pressões e temperaturas. Trata-se de um modelo idealizado, que funciona melhor com pressões muito pequenas e temperaturas muito elevadas, quando as distâncias entre as moléculas são muito grandes e elas se deslocam com velocidades elevadas. Esse modelo funciona razoavelmente bem (com erro percentual pequeno) para pressões moderadas (até algumas atmosferas) e para temperaturas muito acima da temperatura na qual o gás se liquefaz.

Poderíamos esperar que a constante R da equação do gás ideal apresentasse diferentes valores para gases diferentes, porém, verificamos que ela tem o mesmo valor para *todos* os gases, pelo menos em pressões suficientemente baixas e temperaturas suficientemente elevadas. Ela é chamada de **constante dos gases ideais** (ou simplesmente *constante dos gases*). O valor numérico de R depende das unidades de P, V e T. Usando unidades do sistema SI, no qual a unidade de pressão P é Pa (1 Pa = 1 N/m^2) e a unidade de volume V é m^3, o valor atual mais aproximado de R é

$$R = 8{,}314472(15)\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

ou, com quatro algarismos significativos, $R = 8{,}314$ J/mol · K. Note que a unidade de pressão multiplicada pela unidade de volume fornece uma unidade de energia ou de trabalho (por exemplo, N/m^2 vezes m^3); é por isso que a unidade de R é a energia por mol por unidade de temperatura absoluta. Em cálculos de química, os volumes em geral são expressos em litros (L) e as pressões em atmosferas (atm). Nesse sistema, com quatro algarismos significativos, temos

$$R = 0{,}08206\ \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Podemos escrever a equação dos gases ideais, Equação (18.3), em termos da massa total m_{tot} do gás, usando $m_{tot} = nM$ da Equação (18.2):

$$PV = \frac{m_{tot}}{M} RT \qquad (18.4)$$

A partir dessa relação, podemos obter uma expressão para a densidade $\rho = m_{tot}/V$ do gás:

$$\rho = \frac{PM}{RT} \qquad (18.5)$$

ATENÇÃO Densidade e pressão Ao usar a Equação (18.5) não confunda a letra grega ρ (ró), que indica a densidade, e a letra P, usada para pressão.

Para uma *massa constante* (ou número de moles constante) o produto nR de um gás ideal é constante, de modo que PV/T também é constante. Designando pelos índices inferiores 1 e 2 dois estados da mesma massa de um gás podemos escrever

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = \text{constante}$$

(gás ideal, massa constante) (18.6)

Note que você não precisa do valor de R para resolver essa equação.

A proporcionalidade entre a pressão e a temperatura absoluta é familiar; de fato, no Capítulo 17 nós *definimos* uma escala de temperatura em termos da pressão em um termômetro de gás a volume constante. Pode parecer, então, que a relação entre a pressão e a temperatura em um gás ideal indicada na Equação (18.3) seja apenas uma consequência da definição de temperatura que utilizamos. Contudo, a equação também nos mostra o que ocorre quando fazemos o volume ou massa da substância variar. Além disso, a escala de temperatura definida por esse termômetro corresponde à escala de temperatura que vamos definir no Capítulo 20, que não depende das propriedades de nenhum material particular. Por enquanto, considere essa equação baseada nessa escala de temperatura realmente independente do material, embora ainda não tenhamos definido essa escala.

Estratégia para a solução de problemas

GASES IDEAIS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* a não ser que o problema diga algo em contrário, você pode usar a equação do gás ideal em qualquer situação na qual precise encontrar o estado (pressão, volume, temperatura e/ou número de moles) de um gás.

PREPARAR *por meio dos seguintes passos:*

1. Identifique as incógnitas do problema.
2. Alguns problemas se referem a apenas um dos estados do sistema; nesses casos, a Equação (18.3) deve ser usada. Algumas das grandezas dessa equação devem ter sido fornecidas no problema, outras não. Faça a lista das que você conhece e daquelas que você precisará encontrar.
3. Em outros problemas, você deverá comparar dois estados diferentes da mesma quantidade de gás. Escolha o estado 1 e

o estado 2 e faça uma lista das grandezas de cada um: P_1, P_2, V_1, V_2, T_1, T_2. Se apenas uma dessas grandezas não for conhecida, você poderá usar a Equação (18.6). Em outros casos, você deverá usar a Equação (18.3). Por exemplo, se P_1, V_1 e n forem dados, você não poderá usar a Equação (18.6), porque você não conhece o valor de T.

4. Alguns problemas envolvem a densidade (massa por volume) em vez do número de moles n e o volume V. Nesse caso, é mais conveniente usar a Equação (18.5), $\rho = PM/RT$.

EXECUTAR *o problema da seguinte forma:*

1. Use um conjunto de unidades coerente. Você pode ter de converter atmosferas em pascals ou litros em metros cúbicos ($1\ m^3 = 10^3\ L = 10^6\ cm^3$). Às vezes, o enunciado do problema mostrará que um determinado sistema de unidades é mais conveniente do que outros sistemas. Decida qual é o sistema mais conveniente e fique com ele até o final da solução.
2. Não se esqueça de que T é sempre uma temperatura *absoluta*. Se o problema fornecer as temperaturas em °C, não deixe de convertê-las em Kelvin adicionando 273,15 (com três algarismos significativos, basta somar 273). Analogamente, P é sempre a pressão absoluta, não a pressão indicada no manômetro.
3. Algumas vezes você terá de converter a massa total m_{tot} em número de moles n. A relação é $m_{tot} = nM$, onde M é a massa molar. Há um problema aqui: se você usar a Equação (18.4), *deve* usar as mesmas unidades de massa para m_{tot} e para M! Isso não quer dizer que, quando M é dado em gramas por mol (que é a unidade usual de massa molar), m_{tot} também deve estar em gramas. Se você quiser usar m_{tot} em kg, deve converter M em kg/mol. Por exemplo, a massa molar do oxigênio é 32 g/mol ou 32×10^{-3} kg/mol. Preste atenção!
4. Depois de seguir os passos de 1 a 3, calcule as incógnitas.

AVALIAR *a sua resposta:* analise com cuidado as suas respostas e veja se elas fazem sentido fisicamente. Por exemplo, descobriremos no Exemplo 18.1 que um mol de gás a uma pressão de uma atmosfera e a 0 °C ocupa um volume de 22,4 litros. Se você calcular a quantidade de ar dentro de um volume de um litro e obtiver um valor astronomicamente elevado como $n = 5000$ moles, você provavelmente converteu as unidades de modo incorreto ou errou nos cálculos.

Exemplo 18.1

VOLUME DE UM GÁS NAS CNTP As chamadas **condições normais de temperatura e pressão (CNTP)** de um gás correspondem a um estado com uma temperatura de 0 °C = 273,15 K e uma pressão de 1 atm = $1,013 \times 10^5$ Pa. Se você deseja manter um mol de um gás ideal nas CNTP, qual será o volume necessário?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. este problema envolve as propriedades de um gás ideal. O problema fornece a pressão e a temperatura, e a incógnita é o volume.

PREPARAR. o problema trata das propriedades de um único estado de sistema, então usamos a Equação (18.3).

EXECUTAR pela Equação (18.3), usando R em J/mol · K:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1\ \text{mol})(8,314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(273,15\ \text{K})}{1,013 \times 10^5\ \text{Pa}}$$
$$= 0,0224\ \text{m}^3 = 22,4\ \text{L}$$

AVALIAR: Esse resultado pode lhe parecer familiar por causa de seus estudos de química. Note que 22,4 L é aproximadamente igual ao volume de três bolas de basquete. Um cubo com uma aresta de 0,282 m também possui esse volume.

Exemplo 18.2

COMPRESSÃO DE UM GÁS NO MOTOR DE UM AUTOMÓVEL No motor de um automóvel, uma mistura de ar e gasolina é comprimida no interior do cilindro antes da ignição. Um motor típico possui uma razão de compressão de 9,0 para 1: isso significa que o gás no cilindro é comprimido até um volume igual a 1/(9,0) do seu volume original (Figura 18.3). A pressão inicial é 1,0 atm e a temperatura inicial é 27 °C. Se a pressão depois da compressão for 21,7 atm, calcule a temperatura do gás comprimido.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. este problema pede que comparemos dois estados da mesma quantidade de gás ideal. A incógnita é a temperatura no estado comprimido. As válvulas de admissão e exaustão no topo do cilindro na Figura 18.3 permanecem fechadas durante a compressão, portanto, a quantidade de gás permanece constante.

PREPARAR seja o índice 1 referente ao gás antes da compressão, e o índice 2 referente ao estado em que ele está completamente comprimido. Então $P_1 = 1,0$ atm, $P_2 = 21,7$ atm e $V_1 = 9,0\ V_2$. Convertendo a temperatura em Kelvin (somando 273), obtemos $T_1 = 300$ K; a temperatura final T_2 é desconhecida. O número de moles do gás é constante, logo poderemos usar a Equação (18.6).

EXECUTAR aplicando a Equação (18.6) para encontrar a temperatura T_2 de um gás comprimido, obtemos

$$T_2 = T_1\frac{P_2V_2}{P_1V_1} = (300\ \text{K})\frac{(21,7\ \text{atm})\ V_2}{(1,0\ \text{atm})(9,0V_2)}$$
$$= 723\ \text{K} = 450\ ^\circ\text{C}$$

Não precisamos dos valores de V_1 nem de V_2, precisamos apenas da razão entre esses valores.

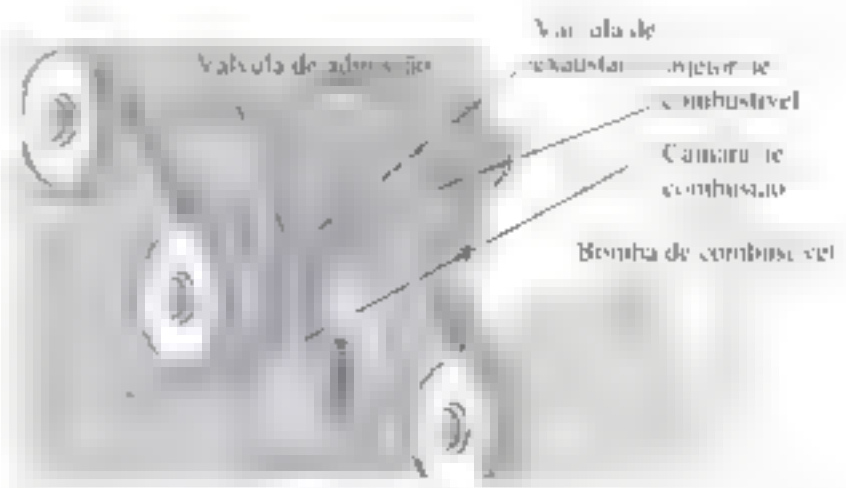


Figura 18.3 Corte do motor de um automóvel. Enquanto a mistura de ar e gasolina está sendo comprimida antes da ignição, as válvulas de admissão e exaustão permanecem fechadas (posição para cima).

AVALIAR note que T_2 é a temperatura da mistura ar-gasolina *antes* da ignição; quando ocorre a explosão, a temperatura se torna ainda mais elevada.

Exemplo 18.6

MASSA DE AR EM UM TANQUE DE OXIGÊNIO PARA MERGULHO Um tanque típico usado na prática do mergulho tem um volume de 11,0 L e pressão manométrica, quando cheio, igual a $2,10 \times 10^7$ Pa. O tanque "vazio" contém 11,0 L de ar a 21 °C e 1 atm ($1,013 \times 10^5$ Pa). Quando o tanque é cheio com ar quente por meio de um compressor, a temperatura é 42 °C e a pressão manométrica é igual a $2,11 \times 10^7$ Pa. Qual foi a massa de ar adicionada ao tanque? (O ar é uma mistura de gases com cerca de 78% de nitrogênio, 21% de oxigênio e 1% de outros gases; a sua massa molar é aproximadamente 28,8 g/mol = $28,8 \times 10^{-3}$ kg/mol.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR nossa incógnita é a *diferença* entre a massa presente no início (estado 1) e no fim (estado 2).

PREPARAR: a massa molar do ar foi dada, então podemos usar a Equação (18.2) para encontrar a incógnita, se soubermos o número de moles nos estados 1 e 2. Calculamos n_1 e n_2 aplicando a Equação (18.3) a cada estado individualmente.

EXECUTAR: devemos lembrar de converter as temperaturas na escala Kelvin somando 273, e de converter a pressão manométrica em pressão absoluta adicionando $1,013 \times 10^5$ Pa. Pela Equação (18.3), o número de moles n no tanque "vazio" é

$$n_1 = \frac{P_1V_1}{RT_1} = \frac{(1,013 \times 10^5\ \text{Pa})(11,0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{(8,314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(294\ \text{K})} = 0,46\ \text{mol}$$

O volume do tanque metálico obviamente é alterado pela elevação da pressão, logo $V = V_2$. O número de moles do tanque cheio é

$$n_2 = \frac{P_2V_2}{RT_2} = \frac{(2,11 \times 10^7\ \text{Pa})(11,0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{(8,314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(315\ \text{K})} = 88,6\ \text{mol}$$

Adicionamos $n_2 - n_1 = 88,6\ \text{mol} - 0,46\ \text{mol} = 88,1$ mol ao tanque. Conforme a Equação (18.2), a massa adicionada é dada por: $M(n_2 - n_1) = (28,8 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol})(88,1\ \text{mol}) = 2,54$ kg.

AVALIAR a massa adicionada não é significativa. Você poderia usar uma balança para verificar se o tanque estava vazio ou cheio. Você poderia resolver este problema com o mesmo método usado no Exemplo 18.2? O volume é constante, logo $P/nT = R/V$ é constante, e $P_1/n_1T_1 = P_2/n_2T_2$; podemos explicitar n_2/n_1, a razão entre o número de moles no final e o número de moles no início. Contudo, precisamos saber a *diferença* entre esses dois números, e não a razão; logo, essa equação não é suficiente para resolver o problema.

Exemplo 18.7

VARIAÇÃO DA PRESSÃO ATMOSFÉRICA COM A ALTURA Calcule a variação de pressão atmosférica com a altura na atmosfera terrestre, supondo que a temperatura permaneça igual a 0 °C em todas as altitudes. Despreze a variação de g com a altura.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: à medida que a altura aumenta, tanto a pressão atmosférica quanto a densidade diminuem. Portanto, nós temos *duas* funções de elevação desconhecidas; para resolvê-las, precisamos de duas relações diferentes. Uma delas é a equação do gás ideal, que podemos escrever em termos da pressão e da densidade; a outra é a relação entre a pressão e a densidade em um fluido em equilíbrio, que vimos na Seção 14.2.

PREPARAR: na Seção 14.2, deduzimos a equação geral $dP/dy = -\rho g$, [Equação (14.4)], para a variação da pressão P em relação à altura y em função da densidade ρ. A Equação (18.5), $\rho = PM/RT$, expressa a equação do gás ideal em função da densidade. O problema pede que supunhamos que g e T sejam constantes em todas as altitudes; supomos também que a atmosfera tenha a mesma composição química e, portanto, a mesma massa molar M em todas as altitudes. Combinamos, então, as duas expressões e resolvemos para $P(y)$.

EXECUTAR substituímos $\rho = PM/RT$ em $dP/dy = -\rho g$, separamos as variáveis e depois integramos, chamando de P_1 a pressão na altura y_1 e P_2 a pressão na altura y_2:

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{PM}{RT}g$$

$$\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}\int_{y_1}^{y_2}dy$$

$$\ln\frac{P_2}{P_1} = -\frac{Mg}{RT}(y_2 - y_1)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = e^{-Mg(y_2 - y_1)/RT}$$

Agora, seja $y_1 = 0$ a altura ao nível do mar, e considere $P_1 = 1,013 \times 10^5$ Pa como a pressão nesse ponto. Então, nossa expressão final para a pressão P em qualquer nível é

$$P = P_0e^{-Mgy/RT}$$

AVALIAR segundo nossos cálculos, a pressão diminui exponencialmente com a altitude. O gráfico da Figura 18.4 mostra que a inclinação se torna menos negativa quanto maior for a altitude. Esse resultado faz sentido, pois $dP/dy = -\rho g$, e a densidade também diminui com a altitude. No pico do Monte Everest, onde $y = 8863$ m,

$$\frac{Mgy}{RT} = \frac{(28,8 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol})(9,80\ \text{m/s}^2)(8863\ \text{m})}{(8,314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(273\ \text{K})} = 1,10$$

$$P = (1,013 \times 10^5\ \text{Pa})e^{-1,10} = 0,337 \times 10^5\ \text{Pa}$$

$$= 0,33\ \text{atm}$$

A hipótese da temperatura constante não é realista, e g diminui ligeiramente com o aumento da altura (ver o Problema desafiador 18.92). Ainda assim, esse exemplo mostra por que os montanhistas que escalam o Everest precisam levar um suprimento de oxigênio. Mostra também por que os aviões a jato, que costumam voar em altitudes de 8000 m a 12000 m, *precisam* ter cabinas pressurizadas para o conforto e a saúde dos passageiros.

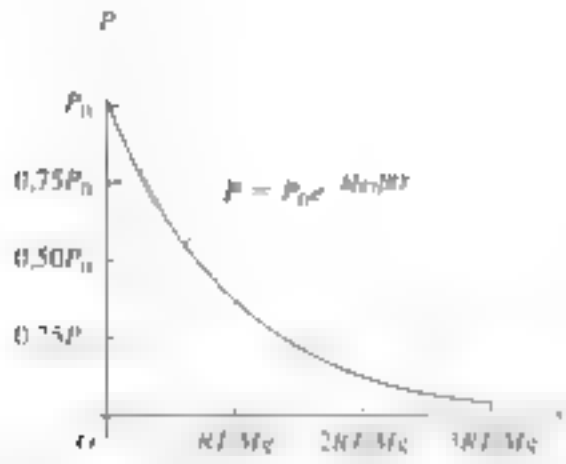


Figura 18.4 A variação da pressão atmosférica P com a altitude y supondo uma temperatura constante T.

Equação de van der Waals

A equação do gás ideal, Equação (18.3), pode ser obtida a partir de um modelo molecular simples que despreza os volumes das moléculas e a força de atração entre elas (Figura 18.5a). Examinaremos esse modelo na Seção 18.3. Enquanto isso, analisaremos outra equação de estado, a **equação de van der Waals**, que faz pequenas correções nas duas aproximações mencionadas. Essa equação foi deduzida, no século XIX, pelo físico alemão J. D. van der Waals, em sua homenagem, as interações entre átomos mencionadas na Seção 13.4 passaram a ser chamadas de *interações de van der Waals*. A equação de van der Waals é

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \qquad (18.7)$$

As constantes a e b são empíricas, assumindo valores diferentes para cada gás. Podemos dizer que, *grosso modo*, b representa o volume de um mol de moléculas, o volume total das moléculas é então nb, e o volume resultante disponível para o movimento das moléculas é $V - nb$. A constante a depende da força de atração entre as moléculas, que reduz a pressão do gás para certos valores de n, V e T *puxando* as moléculas para perto umas das outras enquanto elas *empurram* as paredes do recipiente. A diminuição da pressão é proporcional ao número de moléculas por unidade de volume em uma camada próxima da parede (que está exercendo pressão sobre a parede) e também é proporcional ao número de moléculas por unidade de volume da camada que se segue à primeira (que está exercendo a atração). Portanto, a diminuição da pressão decorrente das forças moleculares é proporcional a n^2/V^2.

Quando n/V é pequeno (ou seja, quando o gás é *diluído*), a distância média entre as moléculas é grande, as correções da equação de van der Waals tornam-se insignificantes e a Equação (18.7) se reduz à equação do gás ideal. Como exemplo, para o gás dióxido de carbono (CO_2), as constantes da equação de van der Waals são $a = 0{,}364\ J \cdot m^3/mol^2$ e $b = 4{,}27 \times 10^{-5}\ m^3/mol$. Verificamos no Exemplo 18.1 que um mol de um gás ideal quando $T = 0\ °C = 273{,}15$ K e $P = 1\ atm = 1{,}013 \times 10^5\ Pa$ ocupa um volume $V = 0{,}0224\ m^3$, de acordo com a Equação (18.7), um mol de CO_2 ocupando esse volume nessa temperatura estaria sob uma pressão de 532 Pa abaixo da pressão atmosférica, uma diferença de apenas 0,5% em relação ao valor obtido com a equação do gás ideal.

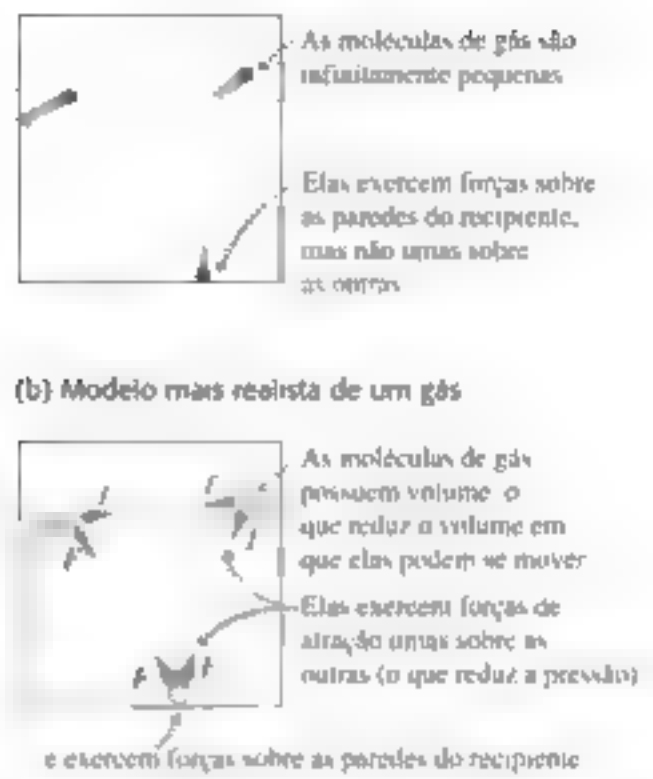

(a) Modelo de um gás ideal.
As moléculas de gás são infinitamente pequenas.
Elas exercem forças sobre as paredes do recipiente, mas não umas sobre as outras.
(b) Modelo mais realista de um gás
As moléculas de gás possuem volume, o que reduz o volume em que elas podem se mover.
Elas exercem forças de atração umas sobre as outras (o que reduz a pressão)
e exercem forças sobre as paredes do recipiente.

Figura 18.5 Um gás como representado (a) na equação do gás ideal e (b) na equação de van der Waals.

Diagramas *PV*

Poderíamos, em princípio, representar as relações *P-V-T* graficamente como uma *superfície* em um espaço de três dimensões com as coordenadas P, V e T. Essa representação às vezes ajuda a entender o comportamento global da substância, porém, os gráficos com duas dimensões geralmente são mais convenientes. Um dos mais úteis é um conjunto de gráficos da pressão em função do volume, cada um deles para uma dada temperatura. Tal gráfico denomina-se **diagrama *PV***. Cada curva que representa o comportamento do gás a uma temperatura específica é chamada de **isoterma**, ou *isoterma PV*.

A Figura 18.6 mostra algumas isotermas *PV* de uma quantidade constante de gás ideal. A temperatura mais elevada é T_4, a temperatura mais baixa é T_1. Essa é uma representação gráfica da equação de estado de um gás ideal. Podemos ler no gráfico o volume V correspondente a qualquer pressão P e temperatura T no intervalo indicado.

A Figura 18.7 mostra um diagrama *PV* de um material que *não* obedece à equação do gás ideal. Para temperaturas menores do que T_c, as isotermas ficam paralelas ao eixo do volume, indicando que o material se comprime sem que ocorra um aumento de pressão. A observação do gás mostra que ele está se *condensando* da fase vapor (gasosa) para

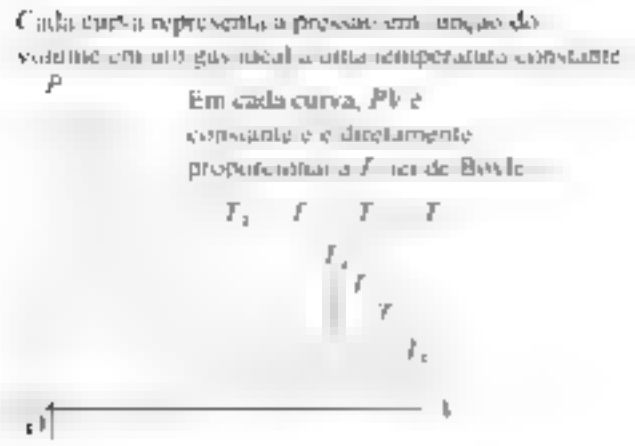

Cada curva representa a pressão em função do volume em um gás ideal a uma temperatura constante
P
Em cada curva, PV é constante e é diretamente proporcional a T (lei de Boyle)
V

Figura 18.6 Isotermas, ou curvas a temperaturas constantes, para uma quantidade constante de um gás ideal

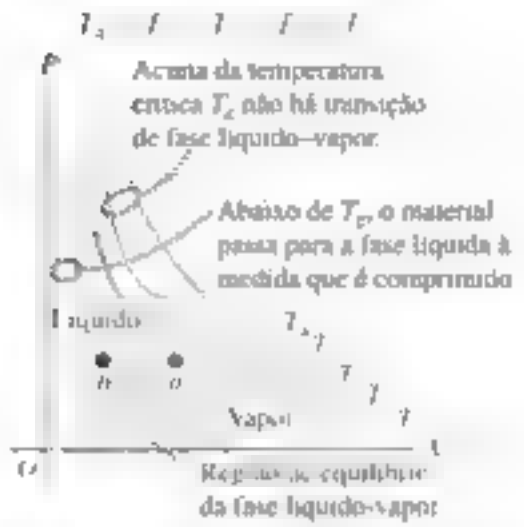

Acima da temperatura crítica T_c não há transição de fase líquido–vapor.
Abaixo de T_c, o material passa para a fase líquida à medida que é comprimido
Líquido
Vapor
V
Região de equilíbrio da fase líquido-vapor

Figura 18.7 Diagrama *PV* para um gás não ideal, mostrando isotermas para temperaturas acima e abaixo da temperatura crítica T_c. A região sombreada indica o equilíbrio entre o líquido e o vapor. Em temperaturas ainda menores, o material poderá sofrer transições da fase líquida para a fase sólida e da fase gasosa para a fase sólida (as transições não são mostradas neste diagrama

a fase líquida. As curvas achatadas das isotermas na parte sombreada da Figura 18.7 representam condições de *equilíbrio de fase* líquido-vapor. À medida que o volume diminui, uma quantidade cada vez maior do material passa da fase vapor para a fase líquida, porém a pressão permanece constante. (Para que a temperatura permaneça constante durante a condensação, é preciso que haja remoção do calor de vaporização, discutida na Seção 17.6.)

Quando comprimimos um gás como o da Figura 18.7, mantendo a temperatura constante T_2, ele permanece na fase vapor até que o ponto *a* seja atingido. A seguir, ele começa a se liquefazer; à medida que seu volume diminui, maior quantidade do material se liquefaz, e *tanto a temperatura quanto a pressão* permanecem constantes. No ponto *b*, o material está todo na fase líquida. Depois desse ponto, uma posterior compressão do material resulta em um elevado aumento da pressão, porque os líquidos geralmente são muito menos compressíveis do que os gases. Em uma temperatura constante mais baixa T_1, ocorre um comportamento semelhante, porém a condensação começa a uma pressão mais baixa e com um volume maior do que no caso de uma temperatura constante T_2. Nas temperaturas superiores a T_c, *nenhuma* transição de fase ocorre quando o material é comprimido; em temperaturas mais elevadas, tal como T_3, as curvas se parecem com as curvas de um gás ideal apresentadas na Figura 18.6. A temperatura T denomina-se *temperatura crítica* do material. Na Seção 18.6 discutiremos o que ocorre com a fase gasosa acima da temperatura crítica.

Usaremos diagramas *PV* frequentemente nos próximos capítulos. Mostraremos que a *área* embaixo da curva *PV* (sendo ou não sendo isotérmica) representa o *trabalho* realizado sobre o sistema durante a variação do volume. Esse trabalho, por sua vez, está diretamente relacionado ao calor transferido do sistema e às variações da *energia interna* do sistema, que estudaremos no Capítulo 19.

Teste sua compreensão da Seção 18.1 Coloque os seguintes gases ideais em ordem do maior para o menor número de moles: (i) pressão 1 atm, volume 1 L e temperatura 300 K; (ii) pressão 2 atm, volume 1 L e temperatura 300 K; (iii) pressão 1 atm, volume 2 L e temperatura 300 K; (iv) pressão 1 atm, volume 1 L e temperatura 600 K; (v) pressão 2 atm, volume 1 L e temperatura 600 K. ■

18.2 Propriedades moleculares da matéria

Estudamos diversas propriedades macroscópicas da matéria — inclusive a elasticidade, a densidade, a tensão superficial, os calores específicos e as equações de estado — fazendo apenas referências superficiais à estrutura molecular. Agora, examinaremos detalhadamente a relação entre o comportamento macroscópico e a estrutura microscópica. Começaremos com uma discussão geral acerca da estrutura da matéria. A seguir, nas duas seções posteriores, desenvolveremos um modelo cinético para as moléculas de um gás ideal, obtendo a partir desse modelo molecular a equação de estado e uma expressão para o calor específico.

Moléculas e forças moleculares

Toda matéria que conhecemos é constituída por **moléculas**. Em um dado composto químico, todas as moléculas são idênticas. As menores moléculas contêm apenas um átomo e possuem um diâmetro da ordem de 10^{-10} m; as maiores moléculas possuem diâmetros pelo menos 10000 vezes maiores do que aquelas. Nos gases, as moléculas movem-se quase de modo independente; nos líquidos e nos sólidos, elas são mantidas ligadas por forças intermoleculares de natureza elétrica, resultantes das interações entre as partículas carregadas constituintes da matéria. As forças gravitacionais entre as moléculas são desprezíveis em comparação com as forças elétricas.

A interação entre duas cargas elétricas *puntiformes* é descrita por uma força (repulsiva entre cargas de mesmo sinal e atrativa quando as cargas possuem sinais contrários),

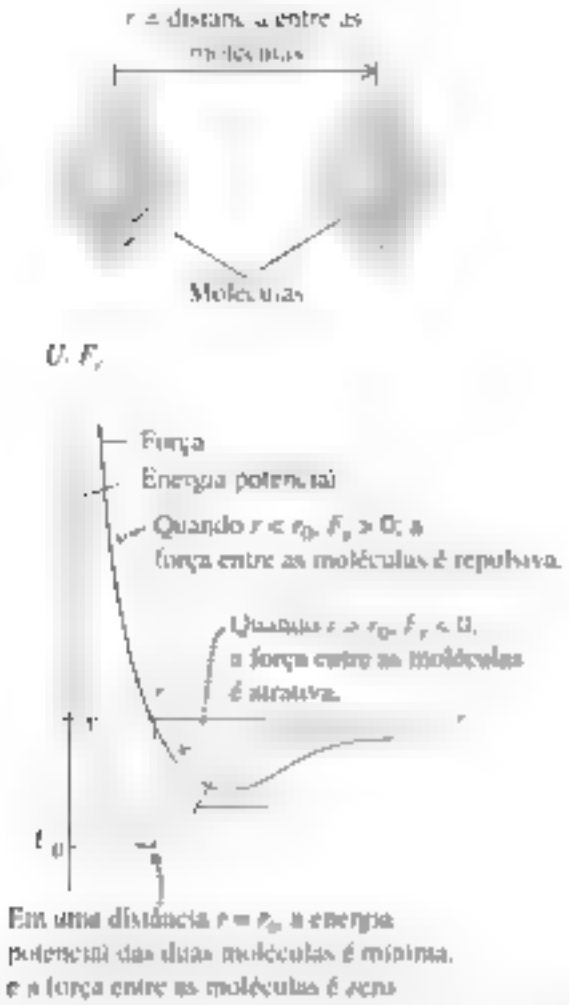

r = distância entre as moléculas
Moléculas
U, F,
Força
Energia potencial
Quando r < r0, F, > 0; a força entre as moléculas é repulsiva.
Quando r > r0, F, < 0, a força entre as moléculas é atrativa.
r
r0
Em uma distância r = r0, a energia potencial das duas moléculas é mínima, e a força entre as moléculas é zero

Figura 18.8 Como a força entre as moléculas e sua energia potencial de interação depende de sua distância r

cujo módulo é proporcional a $1/r^2$, onde r é a distância entre as cargas. Essa relação é chamada *Lei de Coulomb* e será estudada no Capítulo 21. As moléculas *não* são cargas puntiformes, mas sim estruturas complexas contendo cargas positivas e negativas, e as interações envolvidas são mais complexas. A força entre duas moléculas em um gás varia com a distância r entre as moléculas aproximadamente conforme mostra a Figura 18.8, onde uma força F positiva corresponde a uma força de repulsão, e uma força F negativa é uma força de atração. Quando a distância entre duas moléculas é muito grande, a força molecular é muito pequena e, geralmente, atrativa. Quando um gás é comprimido e suas moléculas se aproximam, as forças de atração aumentam. A força intermolecular se anula quando a distância entre duas moléculas é igual a r_0, que corresponde aproximadamente ao espaço existente entre as moléculas no estado sólido ou no estado líquido. Nos líquidos e nos sólidos, para que a substância seja comprimida de modo apreciável, precisamos aplicar pressões relativamente muito elevadas. Isso mostra que, se a distância entre as moléculas for ligeiramente *menor* do que o espaçamento do equilíbrio, as forças tornam-se *repulsivas* e são relativamente grandes.

A Figura 18.8 também mostra a energia potencial em função de r. Essa função apresenta um valor *mínimo* em r_0, onde a força é igual a zero. As duas curvas são relacionadas por $F_r(r) = -dU/dr$, conforme mostramos na Seção 7.4. Essa função energia potencial é geralmente chamada de **poço de potencial**. Para uma distância r_0 entre duas moléculas, será necessário fornecer uma energia $|U_0|$, a "profundidade" do poço de potencial, para que a molécula "escape" até uma distância r infinitamente grande.

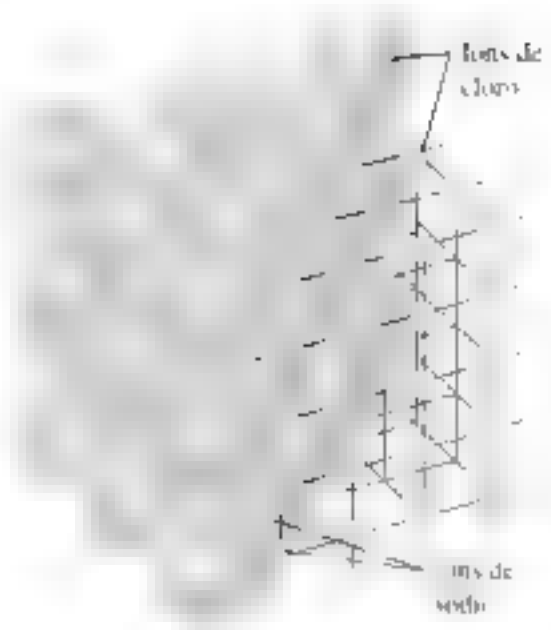


Figura 18.9 Representação esquemática da estrutura de um cristal cúbico de cloreto de sódio

As moléculas estão sempre em movimento, e sua energia cinética geralmente cresce quando a temperatura aumenta. Em temperaturas muito baixas, a energia cinética média de uma molécula pode ser muito *menor* do que a profundidade do poço de potencial. Assim, as moléculas se condensam na fase líquida ou na fase sólida mantendo uma distância intermolecular média aproximadamente igual a r_0. Porém, em temperaturas mais elevadas, a energia cinética torna-se maior do que a profundidade $|U_0|$ do poço de potencial. Assim, as moléculas podem escapar da força de atração intermolecular e, livres, passam a se mover de modo independente, como na fase gasosa da matéria.

Em um *sólido*, as moléculas vibram em torno de pontos mais ou menos fixos. Em um sólido cristalino, esses pontos são agrupados em conjuntos que se repetem, formando uma *rede cristalina*. A Figura 18.9 mostra a estrutura de um cristal cúbico de cloreto de sódio (sal de cozinha). A Figura 18.10 mostra uma imagem de átomos individuais sobre a superfície de um cristal de silício, obtida com auxílio de um microscópio de varredura de tunelamento.

As vibrações das moléculas de um sólido em torno das suas posições de equilíbrio podem ser descritas por um movimento harmônico simples quando o poço de potencial tiver forma aproximadamente parabólica em distâncias da ordem de r_0. (Discutimos esse tipo de movimento harmônico simples na Seção 13.4.) Contudo, quando a curva da energia potencial cresce mais gradualmente para $r > r_0$ do que para $r < r_0$, como indicado na Figura 18.8, a posição média se desloca para valores de r com amplitude crescente. Conforme acentuamos na Seção 17.4, esse raciocínio é a base para entender a dilatação térmica.

Em um *líquido*, as distâncias intermoleculares são ligeiramente maiores do que as distâncias na fase sólida da mesma substância, mas as moléculas apresentam mais

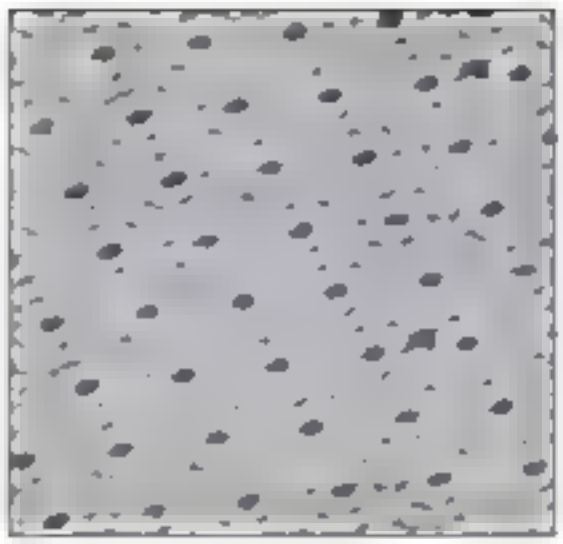


Figura 18.10 Imagem da superfície de um cristal de silício obtida por um microscópio de varredura de tunelamento. O lado do quadrado mostrado possui comprimento de apenas 9,0 nm ($9,0 \times 10^{-9}$ m). Cada conta representa um átomo de silício; você pode notar nitidamente como esses átomos são agrupados, formando uma rede (quase) perfeita de hexágonos.

liberdade de movimento do que na fase sólida. Os sólidos exibem regularidade de estrutura somente nas vizinhanças imediatas de algumas moléculas. Essa regularidade denomina-se *ordem de curto alcance*, em contraste com a *ordem de longo alcance* existente em um cristal sólido.

As moléculas de um *gás* são geralmente bastante separadas e, assim, as forças de atração entre elas são muito pequenas. A molécula de um gás move-se em linha reta até colidir com outra molécula ou com a parede do recipiente. Em termos moleculares, um *gás ideal* é aquele cujas moléculas *não* interagem entre si e, portanto, não possuem *energia potencial*.

Em temperaturas baixas, quase todas as substâncias estão na fase sólida. À medida que a temperatura aumenta, a substância se liquefaz e depois se vaporiza. Do ponto de vista molecular, essas transições ocorrem no sentido do aumento de energia cinética. Logo, a temperatura absoluta e a energia cinética estão intimamente relacionadas.

Mol e número de Avogadro

Usamos o mol como medida da quantidade de uma substância. Um **mol** de qualquer elemento ou composto puro contém um número fixo de moléculas, o mesmo número para todos os elementos e compostos. A definição oficial da unidade SI afirma que

> **Um mol é a quantidade de substância que contém um número de entidades elementares igual ao número de átomos existentes em 0,012 kg de carbono 12.**

Em nosso estudo, as "entidades elementares" são moléculas. (Em uma substância monoatômica como o carbono e o hélio, cada molécula é constituída por um único átomo; entretanto, aqui ainda chamamos essa entidade de molécula.) Note que os átomos de um dado elemento podem ocorrer na forma de diversos isótopos, que são quimicamente idênticos, mas possuem massas atômicas diferentes; o "carbono 12" refere-se a um isótopo específico do carbono.

O número de moléculas em um mol denomina-se **número de Avogadro**, que é designado por N_A. O valor numérico de N_A atual com maior aproximação é

$$N_A = 6{,}02214199(47) \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}$$
(número de Avogadro)

A *massa molar* M de um composto é a massa de um mol. Esse valor é dado pela massa m de uma única molécula multiplicada pelo número de Avogadro:

$$M = N_A m \quad \begin{matrix}\text{(massa molar, número de Avogadro}\\ \text{e massa de uma molécula)}\end{matrix} \qquad (18.8)$$

Quando a molécula é constituída por um único átomo, costuma-se usar a expressão *massa atômica* em vez de massa molar ou peso molecular.

EXEMPLO RESOLVIDO

MASSA ATÔMICA E MASSA MOLECULAR Ache a massa de um átomo de hidrogênio atômico e a massa de uma molécula de oxigênio.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve a relação entre a massa de uma molécula ou átomo (nossa incógnita) e sua massa molar correspondente.

PREPARAR: usaremos a Equação (18.8) na forma $m = M/N_A$, e obteremos os valores das massas molares na tabela periódica dos elementos (ver Apêndice D).

EXECUTAR: a massa por mol do hidrogênio atômico (ou seja, sua massa atômica) é igual a 1,008 g/mol. Logo, a massa m_H de um átomo de hidrogênio isolado é

$$m_H = \frac{1{,}008 \text{ g/mol}}{6{,}022 \times 10^{23} \text{ átomo/mol}} = 1{,}674 \times 10^{-24} \text{ g/átomo}$$

Conforme o Apêndice D, a massa atômica de um átomo de oxigênio é igual a 16,0 g/mol. Logo a massa molar do oxigênio, que é diatômico (com dois átomos), é igual a 32,0 g/mol. Portanto, a massa de uma molécula de O_2 é

$$m_{O_2} = \frac{32{,}0 \text{ g/mol}}{6{,}022 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}} = 53{,}1 \times 10^{-24} \text{ g/molécula}$$

AVALIAR: observe que os valores do Apêndice D correspondem a massas atômicas *médias* da amostra natural de cada elemento. Tal amostra pode conter diversos isótopos diferentes do elemento, cada um dos quais possuindo massa atômica diferente. As amostras naturais de oxigênio e de hidrogênio são constituídas por apenas um isótopo; contudo, isso não ocorre com todos os elementos.

Teste sua compreensão da Seção 18.2 Suponha que você possa ajustar o valor de r_0 das moléculas de certo composto químico (Figura 18.8) girando um botão. Se você dobrasse o valor de r_0, a densidade da forma sólida desse composto se tornaria (i) duas vezes maior; (ii) quatro vezes maior; (iii) oito vezes maior; (iv) a metade da inicial; (v) ¼ da inicial; (vi) ⅛ da inicial. ■

18.3 Modelo cinético-molecular de um gás ideal

O objetivo de qualquer teoria molecular da matéria é explicar as propriedades *macroscópicas* da matéria em termos de sua estrutura atômica e molecular. Tais teorias apresentam uma extraordinária importância prática: depois de compreendê-las, podemos projetar materiais com as propriedades específicas desejadas. Tal análise conduziu ao desenvolvimento de aços com resistências elevadas, vidros com propriedades ópticas específicas, materiais semicondutores para dispositivos eletrônicos e um grande número de materiais essenciais para a tecnologia moderna.

Nesta seção e nas próximas, estudaremos um modelo molecular simples para o gás ideal. Esse *modelo cinético-molecular* considera o gás um grande número de partículas vagando no interior de um recipiente fechado. Nesta seção, usamos o modelo cinético-molecular para entender como a equação de estado de um gás ideal, a Equação (18.3), está relacionada às leis de Newton. Na próxima seção, usaremos o modelo cinético-molecular para prever o calor específico molar de um gás ideal. Vamos elaborar o modelo de modo que incluam 'partículas' que não são pontos, mas possuem um volume finito. Estaremos aptos a entender por que um gás poliatômico tem um calor específico molar maior do que o de um gás monoatômico.

A discussão seguinte sobre o modelo cinético-molecular de um gás se estenderá por várias etapas, e você talvez precise relê-las diversas vezes para entender as partes e o conjunto. Não desanime!

As hipóteses do modelo são:

1. Um recipiente com volume V contém um número N muito grande de partículas idênticas com a mesma massa m.
2. As moléculas se comportam como partículas puntiformes, o volume da molécula é muito pequeno em comparação com a distância entre as partículas e com as dimensões do recipiente.
3. As moléculas estão em movimento perpétuo; elas obedecem às leis de Newton do movimento. Cada molécula colide ocasionalmente com a parede do recipiente. Essas colisões são perfeitamente elásticas.
4. As paredes do recipiente possuem massa infinita, são perfeitamente rígidas e não se movem.

ATENÇÃO molécula × mol Não confunda N, o número total de *moléculas* do gás, com n, o número de *moles* do gás. O número de moléculas é igual ao número de moles multiplicado pelo número de Avogadro: $N = nN_A$.

Colisões e pressão do gás

Nas colisões, as moléculas exercem *forças* sobre as paredes do recipiente; essa é a origem da *pressão* que o gás exerce. Em uma colisão típica (Figura 18.11), o componente da velocidade paralelo à parede não varia, enquanto

Molécula antes da colisão
Molécula depois da colisão
• O componente da velocidade paralelo (y) à parede não varia.
• O componente da velocidade perpendicular à parede (x) inverte o sentido do movimento.
• O módulo da velocidade v não varia.

Figura 18.11 Colisão elástica de molécula com a parede idealizada de um recipiente.

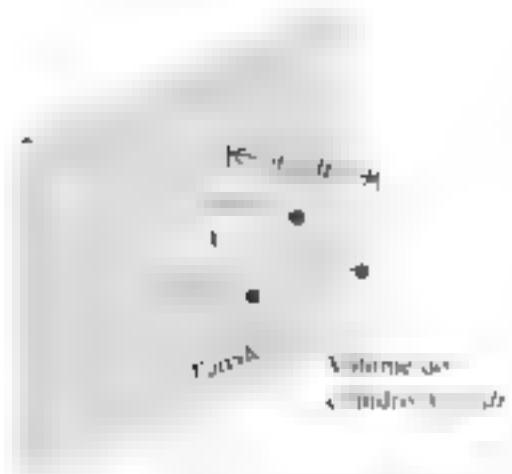
o componente da velocidade perpendicular à parede muda de sentido, mas o seu módulo permanece constante.

Nosso programa é, inicialmente, determinar o *número* de colisões por unidade de tempo que ocorrem em certa área A da parede. A seguir, acharemos a variação do momento total associado a essas colisões e as forças necessárias para produzir essa variação. Depois determinaremos a pressão, que é a força por unidade de área, e compararemos o resultado com a equação do gás ideal. Encontraremos uma relação direta entre a temperatura do gás e a energia cinética das moléculas do gás.

Para começar, vamos supor que todas as moléculas possuem o mesmo valor de $|v_x|$, o *módulo* do componente x da velocidade de uma dada molécula do gás. Isso não é correto, porém essa hipótese ajuda, por ora, a esclarecer as idéias básicas. Mais adiante mostraremos que essa hipótese não é necessária.

Conforme mostra a Figura 18.11, para cada colisão o componente x da velocidade varia desde $-|v_x|$ até $+|v_x|$. Logo, o componente x do momento linear varia de $-m|v_x|$ até $+m|v_x|$, e a *variação* do componente x do momento linear é dada por $m|v_x| - (-m|v_x|) = 2m|v_x|$.

Se a molécula está na iminência de colidir com uma dada área A da parede durante um pequeno intervalo de tempo dt, então no início do intervalo dt ela deve estar a uma distância $|v_x|dt$ da parede (Figura 18.12) e deve se dirigir frontalmente contra a parede. Logo, o número de moléculas que colidem com A durante o intervalo dt é igual ao número de moléculas com componente x orientado no sentido da parede existentes no interior de um cilindro de comprimento $|v_x|dt$ e base de área A. O volume desse cilindro é $A|v_x|dt$. Supondo que o número de moléculas por unidade de volume (N/V) seja uniforme, o *número* de moléculas nesse cilindro é $(N/V)(A|v_x|dt)$. Na média, metade dessas moléculas se aproximam da parede e as



Supõe-se que todas as moléculas tenham o mesmo módulo $|v_x|$ da componente x da velocidade

Figura 18.12 Uma dada molécula que se aproxima da parede com velocidade $|v_x|$ colide com a área A durante o intervalo de tempo dt se, naquele instante, ela está a uma distância $|v_x|\,dt$ da parede no início do intervalo.

demais se afastam da parede. Logo, o número de colisões na área A durante dt é

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N}{V}\right)(A\,|v_x|\,dt)$$

Para o sistema constituído por todas as moléculas do gás, a variação total do momento linear dp_x durante dt é igual ao número de colisões multiplicado por $2m|v_x|$:

$$dp_x = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{V}\right)(A|v_x|\,dt)(2m|v_x|) = \frac{NAmv_x^2\,dt}{V} \qquad (18.9)$$

(Estamos usando a letra minúscula p para o momento linear total e a letra maiúscula P para a pressão. Tome cuidado!) Escrevemos v_x^2 em vez de $|v_x|^2$ na expressão final porque o quadrado do valor absoluto de um número é igual ao quadrado desse número. A *taxa* de variação do componente p_x do momento linear é

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{NAmv_x^2}{V} \qquad (18.10)$$

De acordo com a segunda lei de Newton, essa taxa de variação do momento linear é a força que a área A da parede exerce sobre a molécula. Pela *terceira* lei de Newton, essa força é igual e contrária à força exercida *pela* molécula *sobre* a parede. A pressão P é o módulo da força exercida sobre a parede por unidade de área, portanto

$$P = \frac{F}{A} = \frac{Nmv_x^2}{V} \qquad (18.11)$$

A pressão exercida pelo gás depende do número de moléculas por unidade de volume (N/V), da massa m por molécula e da velocidade das moléculas.

Pressão e energias cinéticas moleculares

Já dissemos que na realidade $|v_x|$ *não* é igual para todas as moléculas. Poderíamos, contudo, ter dividido as moléculas em grupos e colocado no mesmo grupo as moléculas de mesmo $|v_x|$, e a seguir somado às contribuições resultantes da pressão. O efeito é precisamente a substituição de v_x^2 na Equação (18.11) pelo valor *médio* de v_x^2, que será designado por $(v_x^2)_{méd}$. Além disso, $(v_x^2)_{méd}$ pode ser relacionada de modo simples ao *módulo da velocidade* de cada molécula. O módulo da velocidade v da molécula é relacionado aos componentes v_x, v_y e v_z por

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Tomamos a média dessa relação para todas as moléculas.

$$(v^2)_{méd} = (v_x^2)_{méd} + (v_y^2)_{méd} + (v_z^2)_{méd}$$

Todavia, em nosso modelo não existe nenhuma diferença real entre as direções x, y e z. (As velocidades moleculares são muito elevadas em um gás típico, de modo que os efeitos da gravidade são tão pequenos que são desprezíveis.) De onde se conclui que $(v_x^2)_{méd}$, $(v_y^2)_{méd}$ e $(v_z^2)_{méd}$ devem ser *iguais*. Assim, $(v^2)_{méd}$ é igual a $3(v_x^2)_{méd}$ e

$$(v_x^2)_{méd} = \frac{1}{3}(v^2)_{méd}$$

logo, a Equação (18.11) pode ser escrita na forma

$$PV = \frac{1}{3}Nm(v^2)_{méd} = \frac{2}{3}N\left[\frac{1}{2}m(v^2)_{méd}\right] \qquad (18.12)$$

Notamos que $\frac{1}{2}m(v^2)_{méd}$ é a energia cinética média de translação de uma única molécula. O produto desse valor pelo número total de moléculas N é igual à energia cinética aleatória K_{tr} do movimento de translação de todas as moléculas. (A notação K_{tr} nos lembra de que essa energia é associada ao movimento de *translação*. Podem existir outras energias associadas ao movimento de vibração e de rotação das moléculas.) O produto PV é igual a dois terços da energia cinética translacional total

$$PV = \frac{2}{3}K_{tr} \qquad (18.13)$$

Vamos agora comparar o resultado anterior com a equação do gás ideal

$$PV = nRT$$

que é baseada em estudos experimentais do comportamento do gás. Para que as duas equações sejam iguais devemos ter

$$K_{tr} = \frac{3}{2}nRT \quad \begin{array}{l}\text{(energia cinética translacional média}\\ \text{de } n \text{ moles de um gás ideal)}\end{array} \qquad (18.14)$$

Esse resultado extraordinariamente simples mostra que K_{tr} é *diretamente proporcional* à temperatura absoluta T (Figura 18.13). Usaremos esse importante resultado diversas vezes nas discussões que se seguirão.

A energia cinética translacional média de uma única molécula é a energia cinética translacional total K_{tr} dividida pelo número de moléculas N

Figura 18.13 O ar do verão (em cima) é mais quente do que o ar do inverno (embaixo). Isto é, a energia cinética translacional média das moléculas do ar é maior no verão.

$$\frac{K_{tr}}{N} = \frac{1}{2}m(v^2)_{méd} = \frac{3nRT}{2N}$$

Além disso, o número total de moléculas N é o número de moles n multiplicado pelo número de Avogadro N_A, logo

$$N = nN_A \qquad \frac{n}{N} = \frac{1}{N_A}$$

e

$$\frac{K_{tr}}{N} = \frac{1}{2}m(v^2)_{méd} = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{N_A}\right)T \qquad (18.15)$$

A razão R/N_A ocorre frequentemente na teoria molecular. Ela é chamada de **constante de Boltzmann**, k.

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}314\ \text{J/mol} \cdot \text{K}}{6{,}022 \times 10^{23}\ \text{moléculas/mol}}$$
$$= 1{,}381 \times 10^{-23}\ \text{J/molécula} \cdot \text{K}$$

Figura 18.14 Embora o hidrogênio seja um combustível interessante [illegible] veículos, ele existe em nossa atmosfera apenas em quantidades [illegible]. Assim, o combustível de [illegible] um processo que [illegible] grande quantidade de energia.

O valor de k com melhor aproximação atualmente é $1{,}3806503\ (24) \times 10^{-23}$ J/molécula · K. Podemos reescrever a Equação (18.15) em termos de k do seguinte modo

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{méd} = \frac{3}{2}kT \quad \begin{matrix}\text{(energia cinética translacional}\\ \text{média da molécula de um gás)}\end{matrix} \qquad (18.16)$$

O resultado anterior mostra que a energia cinética translacional média *por molécula* depende somente da temperatura e não da pressão, nem do volume, nem do tipo de molécula. Podemos obter a energia cinética translacional média *por mol* multiplicando a Equação (18.16) pelo número de Avogadro e usando a relação $M = N_A m$.

$$N_A\frac{1}{2}m(v^2)_{méd} = \frac{1}{2}M(v^2)_{méd} = \frac{3}{2}RT$$

(energia cinética translacional média por mol do gás) (18.17)

A energia cinética translacional de um mol das moléculas de um gás ideal depende somente de T.

Finalmente, às vezes é conveniente reescrever a equação do gás ideal em uma base molecular. Usamos $N = N_A n$ e $R = N_A k$ para obter a forma alternativa da equação do gás ideal

$$PV = NkT \qquad (18.18)$$

Esse resultado mostra que a constante de Boltzmann é uma constante dos gases em base "por molécula", em vez da usual base "por mol" relacionada à constante R.

Velocidades moleculares

Usando as equações (18.16) e (18.17) podemos obter expressões para a raiz quadrada de $(v^2)_{méd}$, a chamada **velocidade quadrática média** $v_{q\text{-}méd}$.

$$v_{q\text{-}méd} = \sqrt{(v^2)_{méd}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

(velocidade quadrática média) (18.19)

Poderia parecer mais natural caracterizar a velocidade molecular pelo valor da velocidade *média*, em vez de se achar a $v_{q\text{-}méd}$. Notamos, contudo, que o valor de $v_{q\text{-}méd}$ decorre diretamente das equações (18.16) e (18.17). Para calcular o valor da velocidade quadrática média, elevamos ao quadrado a velocidade de cada molécula, somamos os resultados, dividimos pelo número de moléculas e extraímos a raiz quadrada; $v_{q\text{-}méd}$ é a *raiz quadrada* do valor *médio* dos *quadrados* das velocidades. O Exemplo 18.7 ilustra esse procedimento.

As equações (18.16) e (18.17) mostram que, em uma dada temperatura T do gás, as moléculas com massas m diferentes possuem a mesma energia cinética média, porém velocidades quadráticas médias diferentes. Na média, as moléculas de nitrogênio (M = 28 g/mol) do ar que você respira se movem com velocidades menores do que as moléculas de oxigênio (M = 32 g/mol). As moléculas de hidrogênio (M = 2 g/mol) são as que se movem com a maior velocidade entre todos os gases; essa é a razão pela qual não existe praticamente nenhum hidrogênio na atmosfera terrestre, embora esse gás seja formado pelo elemento mais abundante em todo o universo (Figura 18.14). Uma parcela significativa das moléculas de H_2 da atmosfera terrestre tem velocidades superiores à 'velocidade de escape' de $1{,}12 \times 10^4$ m/s (calculado no Exemplo 12.5, Seção 12.3) e escapariam da atmosfera para o espaço. Os gases mais pesados e mais lentos não podem escapar com muita facilidade, sendo essa a razão do predomínio desses gases na atmosfera terrestre.

A hipótese de que as moléculas individuais sofrem colisões perfeitamente elásticas com a parede do recipiente é, na realidade, simplista demais. Investigações mais aprofundadas revelaram que, na maioria dos casos, as moléculas aderem à superfície da parede por um curto intervalo de tempo e, a seguir, afastam-se da parede com velocidades características da temperatura *da parede*. Contudo, o gás e a parede estão geralmente em equilíbrio térmico, tendo a mesma temperatura. Logo, não existe nenhuma transferência líquida de energia entre a parede e o gás, e essa descoberta não altera a validade das nossas conclusões.

Estratégia para a solução de problemas

MODELO CINÉTICO MOLECULAR

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* use os resultados do modelo cinético-molecular sempre que o problema pedir para você relacionar as propriedades macroscópicas de um gás, como a temperatura e a pressão, com as propriedades microscópicas, como as velocidades das moléculas.

PREPARAR *por meio dos seguintes passos.*

1. Identifique quais são as variáveis conhecidas e quais são as incógnitas.
2. Escolha a equação a ser usada dentre as equações (18.14), (18.16) e (18.19).

EXECUTAR *o problema da seguinte forma:* preste atenção para não misturar as unidades. Uma cautela especial é necessária nas seguintes questões.

1. A unidade usual da massa molar M é gramas por mol. A massa molar do oxigênio (O_2) é 32 g/mol, por exemplo. Essas unidades são geralmente omitidas nas tabelas. Em equações como a Equação (18.9), quando você usar unidades SI, *deve* expressar M em quilogramas por mol multiplicando o valor da tabela por (1 kg/10^3 g). Logo, usando unidades SI, a massa M do oxigênio é igual a 32×10^{-3} kg/mol.
2. Você está usando uma base "por molécula" ou uma "base por mol"? Lembre-se de que m é a massa de uma única molécula, e M é a massa de um mol de moléculas, N é o número total de moléculas e n é o número de moles, k é a constante dos gases por molécula e R é a constante dos gases por mol. Você poderá conferir os resultados imaginando que a unidade de N é "moléculas", então, a unidade de m é "massa por molécula" e a unidade de k é "joules por molécula por Kelvin".
3. Lembre-se de que T é sempre uma temperatura *absoluta* (em Kelvin).

AVALIAR *a sua resposta:* as suas respostas fazem sentido? Lembre-se de que as velocidades moleculares à temperatura ambiente costumam ser de várias centenas de metros por segundo. Se a sua resposta difere muito disso, verifique os cálculos.

Exemplo 18.7

CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA MOLECULAR E DA VELOCIDADE QUADRÁTICA MÉDIA

a) Qual é a energia cinética translacional média de uma molécula de gás ideal a uma temperatura de 27 °C? b) Qual é a energia cinética translacional aleatória das moléculas de um grama desse gás? c) Qual é a velocidade quadrática média das moléculas do oxigênio nessa temperatura?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR este problema envolve a energia cinética translacional de um gás ideal em uma base "por molécula" e em uma base "por mol", assim como a velocidade quadrática média das moléculas do gás.

PREPARAR o problema fornece a temperatura (T = 27 °C) e o número de moles (n = 1 mol). A massa molecular m é a do oxigênio. Usamos a Equação (18.16) para encontrar a energia cinética média de uma molécula, a Equação (18.14) para encontrar a energia cinética molecular total e a Equação (18.19) para encontrar a velocidade quadrática média de uma molécula.

EXECUTAR a) Para usar a Equação (18.16), precisamos primeiro converter a temperatura na escala Kelvin: 27 °C = 300 K. Logo,

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{méd} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})$$
$$= 6{,}21 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

Essa resposta *não* depende da massa da molécula.

b) Pela Equação (18.14), a energia cinética translacional total de um mol de moléculas é

$$K_{tr} = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}(1\ \text{mol})(8{,}314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})$$
$$= 3740\ \text{J}$$

Essa energia é aproximadamente igual à energia cinética de um velocista em uma corrida de 100 m.

c) De acordo com o Exemplo 18.5 (Seção 18.2), a massa da molécula de oxigênio é

$$m_{O2} = (53{,}1 \times 10^{-24}\,\text{g})(1\,\text{kg}/10^{3}\,\text{g}) = 5{,}31 \times 10^{-26}\,\text{kg}$$

Usando a Equação (18.19),

$$v_{q\text{-méd}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1{,}38 \times 10^{-23}\,\text{J/K})(300\,\text{K})}{5{,}31 \times 10^{-26}\,\text{kg}}} = 484\,\text{m/s}$$

Isso equivale a 1740 km/h! Alternativamente,

$$v_{q\text{-méd}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}314\,\text{J/mol·K})(300\,\text{K})}{32{,}0 \times 10^{-3}\,\text{kg/mol}}} = 484\,\text{m/s}$$

AVALIAR: você pode conferir o resultado obtido na parte (b) observando que a energia cinética translacional por mol precisa ser igual à energia cinética translacional média por molécula da parte (a) multiplicada pelo número de Avogadro, N_A: $K_{tr} = (6{,}022 \times 10^{23}\ \text{moléculas/mol})(6{,}21 \times 10^{-21}\,\text{J/molécula}) = 3740\,\text{J}$.

Na parte (c), note que, para usar a Equação (18.19) com R expresso em unidades SI, devemos usar M em *quilogramas* por mol e não em gramas por mol. Neste exemplo, nós usamos $M = 32{,}0 \times 10^{-3}$ kg/mol, não 32,0 g/mol.

Exemplo 18.7

VELOCIDADE QUADRÁTICA MÉDIA E VELOCIDADE MÉDIA

Verifica-se que cinco moléculas escolhidas ao acaso possuem velocidades de 500, 600, 700, 800 e 900 m/s. Ache a velocidade quadrática média. Essa velocidade é igual à velocidade *média*?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: para resolver este problema, precisamos usar as definições de média quadrática e média aritmética de diversos valores.

PREPARAR: para encontrar o valor da *média quadrática*, elevamos ao quadrado cada velocidade, calculamos a média dos quadrados e depois extraímos a raiz quadrada do resultado.

EXECUTAR: o valor médio de v^2 para as cinco moléculas é

$$v_{q\text{-méd}}^2 = \frac{(500\,\text{m/s})^2 + (600\,\text{m/s})^2 + (700\,\text{m/s})^2 + (800\,\text{m/s})^2 + (900\,\text{m/s})^2}{5}$$

$$= 510 \times 10^3\,\text{m}^2/\text{s}^2$$

A raiz quadrada desse resultado é a velocidade quadrática média $v_{q\text{-méd}}$:

$$v_{q\text{-méd}} = 714\,\text{m/s}$$

A velocidade *média* $v_{méd}$ é dada pela média aritmética:

$$v_{méd} = \frac{500\,\text{m/s} + 600\,\text{m/s} + 700\,\text{m/s} + 800\,\text{m/s} + 900\,\text{m/s}}{5} = 700\,\text{m/s}$$

AVALIAR: vemos que, geralmente, os valores de $v_{méd}$ e $v_{q\text{-méd}}$ *não* são iguais. Falando de modo aproximado, $v_{q\text{-méd}}$ atribui um peso maior às velocidades mais elevadas, o que não acontece com $v_{méd}$.

Colisões entre moléculas

Não consideramos a possibilidade da colisão entre duas moléculas do gás. Quando consideramos as moléculas como pontos, elas *nunca* podem colidir. Contudo, vamos considerar um modelo mais realista no qual cada molécula é uma esfera de raio r. Qual seria a frequência das colisões moleculares? Qual seria, na média, a distância percorrida por uma molécula antes de ela colidir com outra? Podemos obter respostas aproximadas a partir do modelo bastante primitivo apresentado a seguir.

Considere N moléculas esféricas com raio r e volume V. Suponha que somente uma molécula esteja se movendo. Quando ela colide com outra molécula, a distância entre os centros das moléculas é igual a $2r$. Suponha que você trace um cilindro de raio $2r$ com o seu eixo paralelo à direção da velocidade da molécula (Figura 18.15). A molécula que se move colidirá com qualquer outra molécula cujo centro esteja no interior desse cilindro. Durante um breve intervalo de tempo dt, a molécula se desloca uma distância $v\,dt$; durante esse intervalo de tempo ela colide com qualquer molécula que esteja no interior do volume cilíndrico de raio $2r$ e comprimento $v\,dt$. O volume desse cilindro é $4\pi r^2 v\,dt$. Existem N/V moléculas por unidade de volume; logo, o número dN de moléculas com centros no interior desse cilindro é

$$dN = 4\pi r^2 v\,dt\,N/V$$

Portanto, o número de colisões *por unidade de tempo* é dado por

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi r^2 v N}{V}$$

Esse resultado pressupõe o movimento de uma única molécula. A análise se torna mais realista considerando o movimento simultâneo de todas as moléculas. Verifica-se, nesse caso, que as colisões se tornam mais frequentes, e a equação anterior deve ser multiplicada por $\sqrt{2}$.

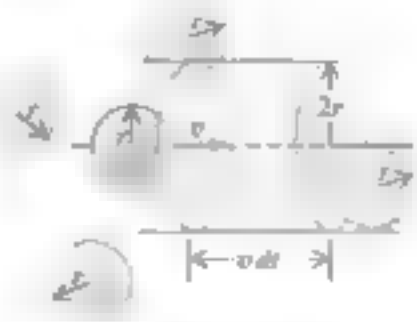


Figura 18.15 Em um intervalo de tempo dt, uma molécula de raio r colide com outra no interior do volume de um cilindro de raio $2r$ e comprimento $v\,dt$.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi\sqrt{2}r^2vN}{V}$$

O tempo médio $t_{méd}$ entre as colisões, denominado *tempo livre médio*, é o inverso desse resultado

$$t_{méd} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}r^2vN} \qquad (18.20)$$

A distância média percorrida entre duas colisões sucessivas é chamada de caminho médio livre ou **livre caminho médio**, designado por λ (letra grega lambda). Em nosso modelo simples, ele é precisamente igual à velocidade v da molécula multiplicada por $t_{méd}$.

$$\lambda = vt_{méd} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}r^2N}$$

(livre caminho médio da molécula de um gás) (18.21)

O livre caminho médio é inversamente proporcional ao número de moléculas por unidade de volume (N/V) e inversamente proporcional à área da seção reta πr^2 de uma molécula; quanto maior for o número de moléculas e maior for o tamanho da molécula, menor será o tamanho entre duas colisões sucessivas (Figura 18.16). Note que o livre caminho médio *não* depende da velocidade da molécula.

Podemos escrever a Equação (18.21) em termos das propriedades microscópicas do gás, usando a equação do gás ideal na forma dada pela Equação (18.18), $PV = NkT$. Achamos

$$\lambda = \frac{kT}{4\pi\sqrt{2}r^2P} \qquad (18.22)$$

Se aumentamos a temperatura mantendo a pressão constante, o gás se expande, a distância média entre as moléculas aumenta e o valor de λ cresce. Se aumentamos a pressão mantendo constante a temperatura, o gás se comprime e λ diminui.

Figura 18.16 Quando você caminha no meio de uma multidão, seu livre caminho médio — a distância que você percorre sem esbarrar em outra pessoa — depende da quantidade de pessoas e da aproximação entre elas.

Exemplo 18.8

CÁLCULO DO LIVRE CAMINHO MÉDIO a) Estime o livre caminho médio de uma molécula de ar a 27 °C e 1 atm. Considere as moléculas como esferas com raio $r = 2,0 \times 10^{-10}$ m. b) Estime o tempo livre médio de uma molécula de oxigênio com velocidade $v = v_{q\text{-}méd}$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema utiliza os conceitos de livre caminho médio e tempo livre médio (que são as nossas incógnitas).

PREPARAR: usamos a Equação (18.21) para calcular o livre caminho médio λ. Para encontrar o tempo livre médio, $t_{méd}$, poderíamos usar a Equação (18.20), mas é mais conveniente usar a relação básica entre $t_{méd}$ e o livre caminho médio, Equação (18.21). Para achar a velocidade, usamos a velocidade média quadrática do oxigênio calculada no Exemplo 18.6.

EXECUTAR a) Pela Equação (18.22),

$$\lambda = \frac{kT}{4\pi\sqrt{2}r^2P}$$

$$= \frac{(1,38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{4\pi\sqrt{2}(2,0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2(1,01 \times 10^5\ \text{Pa})}$$

$$= 5,8 \times 10^{-8}\ \text{m}$$

A molécula não percorre uma distância muito grande entre as colisões, porém, a distância é ainda centenas de vezes maior que o raio da molécula. Para obter um livre caminho médio de um metro, a pressão deveria ser aproximadamente igual a $5,8 \times 10^{-8}$ atm. Pressões tão baixas como essa podem ser encontradas a cerca de 100 km acima da superfície terrestre, no topo da atmosfera.

b) De acordo com o Exemplo 18.6, para o oxigênio a 27 °C a velocidade quadrática média é $v_{q\text{-}méd} = 484$ m/s, então o tempo livre médio de uma molécula com essa velocidade é

$$t_{méd} = \frac{\lambda}{v} = \frac{5,8 \times 10^{-8}\ \text{m}}{484\ \text{m/s}} = 1,2 \times 10^{-10}\ \text{s}$$

Essa molécula sofre cerca de 10^{10} colisões por segundo!

AVALIAR: observe que o livre *caminho* médio calculado na parte (a) não depende da velocidade da molécula, porém, o *tempo* livre médio, sim. As moléculas mais lentas apresentam um intervalo de tempo mais longo $t_{méd}$ entre as colisões do que as moléculas mais velozes, porém, a *distância* média λ entre as colisões é a mesma, independentemente do valor da velocidade da molécula.

Teste sua compreensão da Seção 18.3 Coloque os seguintes gases em ordem a) da maior para a menor velocidade quadrática média das moléculas e b) da maior para a menor energia cinética translacional média de uma molécula: (i) oxigênio ($M = 32,0$ g/mol) a 300 K, (ii) nitrogênio ($M = 28,0$ g/mol) a 300 K, (iii) oxigênio a 330 K, (iv) nitrogênio a 330 K. ■

18.4 Calor específico

Quando introduzimos o conceito de calor específico na Seção 17.5, mencionamos dois modos para *medir* o calor específico ou calor específico molar de um dado material. Veremos agora como essas grandezas podem ser *previstas* com base na teoria. Trata-se de um importante passo adiante.

Calor específico de um gás

A base de nossa análise é a de que o calor é uma *energia* em trânsito. Quando fornecemos calor a uma substância, estamos aumentando sua energia molecular. Neste ponto do estudo, manteremos o volume do gás constante, de modo que não precisaremos nos preocupar com a energia convertida em trabalho mecânico. Se o gás se expandisse, ele realizaria trabalho ao empurrar as paredes do recipiente, e essa transferência de energia adicional teria de ser incluída em nossos cálculos. Retornaremos a esse caso mais geral no Capítulo 19. Por enquanto, mantendo o volume constante, analisaremos C_V, o calor específico molar *a volume constante*.

No modelo cinético-molecular simples da Seção 18.3, a energia molecular consistia apenas na energia cinética translacional K_{tr} das moléculas puntiformes. Essa energia é diretamente proporcional à temperatura absoluta T, como indicado na Equação (18.14), $K_{tr} = \frac{3}{2}nRT$. Quando a temperatura varia de uma pequena quantidade dT, a variação correspondente da energia cinética é

$$dK_{tr} = \frac{3}{2}nR\,dT \tag{18.23}$$

Pela definição de calor específico molar a volume constante C_V (Seção 17.5), temos também

$$dQ = nC_V\,dT \tag{18.24}$$

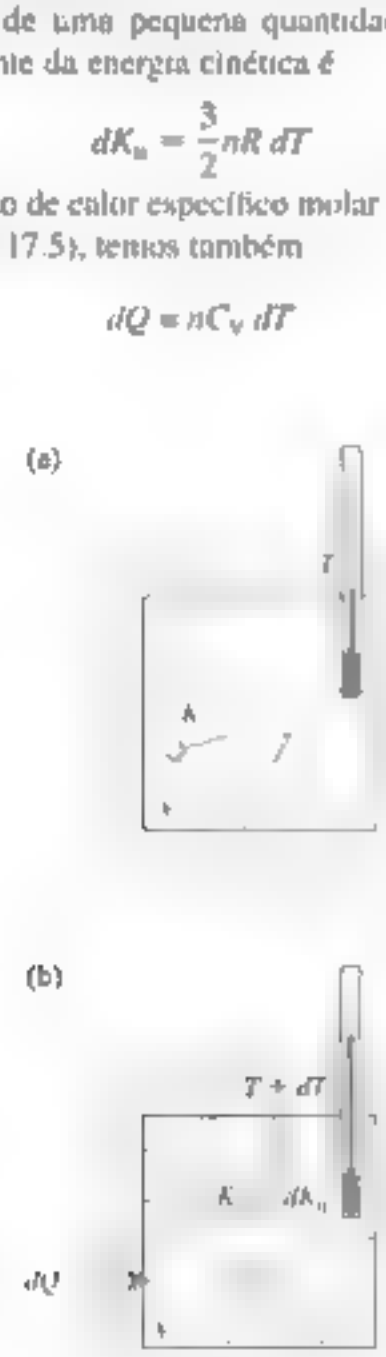


Figura 18.17 (a) Um volume fixo V de um gás ideal monoatômico. (b) Quando uma quantidade de calor dQ for fornecida ao gás, a energia cinética translacional total cresce de $dK_{tr} = dQ$, e a temperatura aumenta de $dT = dQ/nC_V$.

onde dQ é o calor fornecido necessário para produzir uma variação de temperatura dT. Se K_{tr} representa a energia molecular total, como havíamos suposto, então dQ deve ser *igual* a dK_{tr} (Figura 18.17). Igualando as expressões dadas pelas equações (18.23) e (18.24), obtemos

$$nC_V\,dT = \frac{3}{2}nR\,dT$$

$$C_V = \frac{3}{2}R$$

(gás ideal de partículas puntiformes) (18.25)

Esse resultado surpreendentemente simples afirma que o calor específico molar (a volume constante) de *qualquer* gás monoatômico é igual a $3R/2$.

Para verificar se isso faz sentido, vamos inicialmente conferir as unidades. A constante dos gases é *realmente* expressa como uma unidade de energia por mol por Kelvin, a unidade correta do calor específico molar. Porém, é mais importante verificar se a Equação (18.25) concorda com valores *medidos* do calor específico molar. Usando unidades SI na Equação (18.25), obtemos

$$C_V = \frac{3}{2}(8{,}314\ \text{J/mol}\cdot\text{K}) = 12{,}47\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

Compare com os valores medidos de C_V para diversos gases na Tabela 18.1. Vemos que, para um gás *monoatômico*, a previsão é muito boa, mas para gases diatômicos e poliatômicos nossa previsão está bem distante da realidade.

Essa comparação nos informa que nosso modelo de moléculas puntiformes é suficientemente bom para moléculas monoatômicas, mas para moléculas poliatômicas precisamos de um modelo mais sofisticado. Por exemplo, podemos representar uma molécula diatômica como duas massas puntiformes, semelhante a um pequeno haltere elástico, com uma força de interação entre os átomos do tipo indicado na Figura 18.8. Tal molécula pode ter uma energia cinética adicional associada à rotação em torno dos eixos que passam por seu centro de massa. Os átomos também podem apresentar um movimento vibratório para a frente e para trás ao longo da linha que os une, com energias cinéticas e energias potenciais adicionais. Essa possibilidade é ilustrada na Figura 18.18.

Quando o calor flui para o interior de um gás *monoatômico* a volume constante, *toda* a energia adicionada é usada para aumentar a energia cinética molecular *translacional* aleatória. A Equação (18.23) mostra que isso dá origem a um aumento de temperatura. Porém, quando a temperatura aumenta de um mesmo valor em um gás *diatômico* ou *poliatômico*, é necessário um calor adicional para suprir o aumento da energia rotacional e da energia do movimento vibratório. Logo, um gás poliatômico tem um calor específico molar *maior* do que um gás monoatômico, como mostra a Tabela 18.1.

Tabela 18.1 Calores específicos molares de gases

Tipo de gás	Gás	C_V (J/mol • K)
Monoatômico	He	12,47
	Ar	12,47
Diatômico	H_2	20,42
	N_2	20,76
	O_2	21,10
	CO	20,85
Poliatômico	CO_2	28,46
	SO_2	31,39
	H_2S	25,95

Como podemos, entretanto, saber qual é a quantidade de energia associada a cada espécie de movimento de uma molécula complexa, em comparação com a energia cinética translacional? O novo princípio de que precisamos denomina-se **princípio da equipartição da energia**. Ele pode ser deduzido a partir de considerações sofisticadas de mecânica estatística: essa dedução está fora dos nossos objetivos, e vamos considerar esse princípio um axioma.

O princípio da equipartição da energia afirma que cada componente da velocidade (linear ou angular) possui, em média, uma energia cinética associada a cada molécula igual a $\frac{1}{2}kT$, ou seja, metade da constante de Boltzmann multiplicada pela temperatura absoluta. O número dos componentes da velocidade necessários para descrever completamente o movimento de uma molécula constitui o número de **graus de liberdade**. Para um gás monoatômico, existem três graus de liberdade (para os componentes das velocidades v_x, v_y, e v_z); isso resulta em uma energia cinética total média por molécula igual a $3(\frac{1}{2}kT)$, consistente com a Equação (18.16).

Para uma molécula *diatômica* existem dois eixos possíveis de rotação, perpendiculares um ao outro e também ao eixo molecular. (Não incluímos a rotação em torno do eixo molecular porque, nas colisões comuns, não existe nenhuma possibilidade de que haja variação do movimento de rotação em torno desse eixo.) Atribuindo cinco graus de liberdade a uma molécula diatômica, a energia cinética total por molécula é $\frac{5}{2}kT$, em vez de $\frac{3}{2}kT$. A energia cinética total de n moles é $K_{total} = nN_A(\frac{5}{2}kT) = \frac{5}{2}n(kN_A)T = \frac{5}{2}nRT$, e o calor específico molar (a volume constante) é

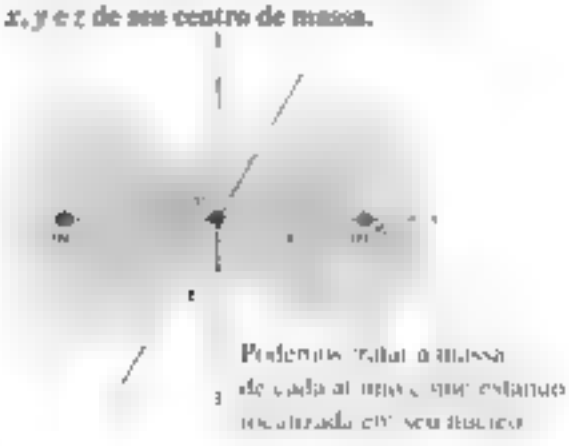
$$C_V = \frac{5}{2}R \text{ (gás diatômico, incluindo a rotação)} \quad (18.26)$$

Em unidades SI, temos

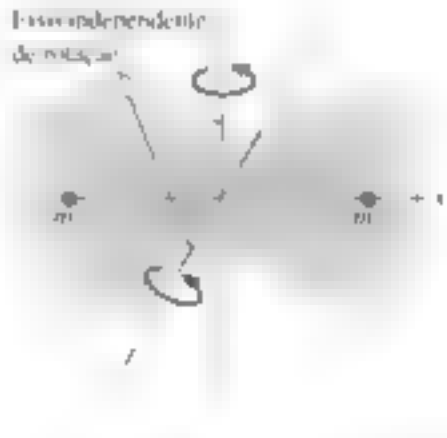
$$C_V = \frac{5}{2}(8{,}314\ \text{J/mol} \cdot \text{K}) = 20{,}79\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

Isso está de acordo – com uma pequena porcentagem de erro – com os valores medidos para os gases diatômicos fornecidos na Tabela 18.1.

(a) Movimento translacional. A molécula se move como um todo; sua velocidade pode ser descrita como os componentes x, y e z de seu centro de massa.



(b) Movimento rotacional. A molécula gira ao redor do seu centro de massa. Essa molécula tem dois eixos de rotação independentes.



(c) Movimento vibratório. A molécula oscila como se os núcleos estivessem ligados por uma mola.

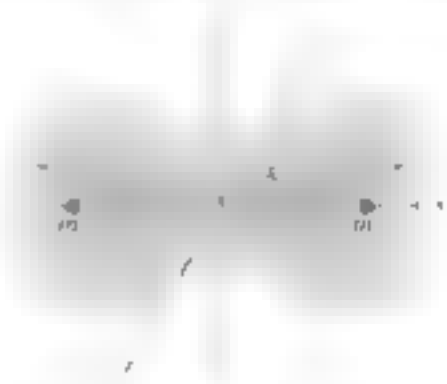


Figura 18.18 Movimentos de uma molécula diatômica

O *movimento vibratório* pode também contribuir para o calor específico dos gases. As ligações moleculares não são rígidas; elas podem se esticar e encurvar, e as vibrações resultantes produzem graus de liberdade adicionais e energias adicionais. Contudo, para a maior parte dos gases diatômicos, o movimento vibratório *não* contribui de modo significativo para o calor específico. A razão para isso é sutil e envolve alguns conceitos de mecânica quântica. Resumidamente, podemos dizer que a energia de vibração só pode variar por meio de saltos finitos. Se a variação de energia no primeiro salto for muito maior do que a energia contida em muitas moléculas, então quase todas as moléculas permanecem no estado mínimo de energia. Nessas circunstâncias, as variações de temperatura não

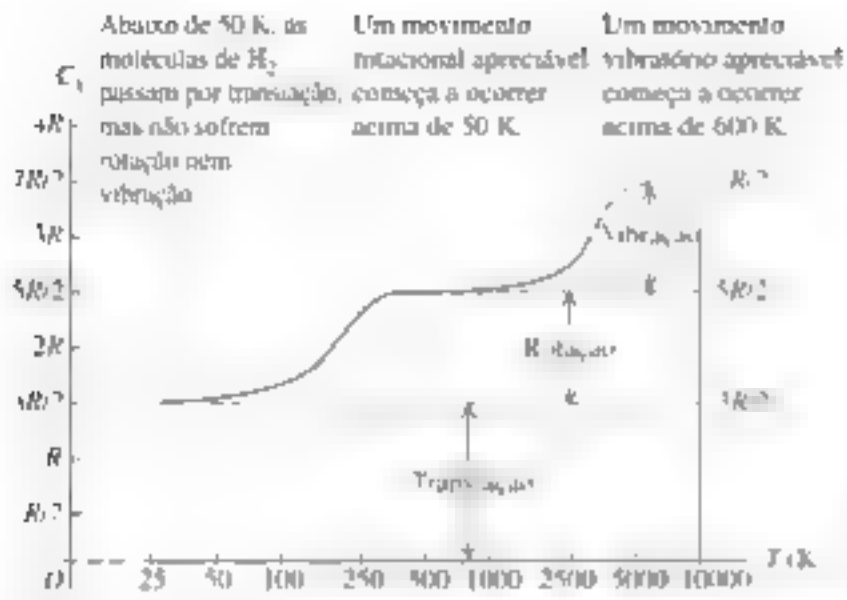


Figura 18.19 Valores experimentais de C_v, o calor específico molar a volume constante, para o gás hidrogênio (H_2). A temperatura é representada em escala logarítmica.

produzem variações apreciáveis na energia de vibração das moléculas, e dizemos que os graus de liberdade das vibrações são 'congelados'. Em moléculas mais complexas, os intervalos entre os níveis de energia de cada estado permitido são muito menores, e as vibrações *contribuem* para o calor específico. As energias da rotação das moléculas também variam por meio de saltos finitos, porém, eles são geralmente muito pequenos; o 'congelamento' de um grau de liberdade da rotação ocorre somente em casos raros, tal como no caso da molécula de hidrogênio abaixo de 100 K.

Na Tabela 18.1, os valores elevados de C_V em algumas moléculas poliatômicas indicam contribuições da energia de vibração. Além disso, as moléculas com três ou mais átomos não alinhados possuem três, e não dois graus de liberdade de rotação.

Pelo que acabamos de estudar, concluímos que o calor específico depende da temperatura, geralmente aumentando quando a temperatura aumenta. A Figura 18.19 mostra um gráfico da dependência de C_V em relação à temperatura no gás hidrogênio (H_2), mostrando as temperaturas em que as energias de rotação e de vibração começam a contribuir para o calor específico.

Calor específico de um sólido

Podemos desenvolver uma análise semelhante para estudar o calor específico de um sólido. Considere um cristal formado por N átomos idênticos (um *sólido monoatômico*). Cada átomo está ligado a uma posição de equilíbrio pela ação de forças interatômicas. A elasticidade de um material sólido nos mostra que essas forças podem esticar e encurvar as ligações. Podemos modelar o cristal como um conjunto de átomos interligados por pequenas molas (Figura 18.20). Cada átomo pode *vibrar* em torno da posição de equilíbrio.

Cada átomo apresenta três graus de liberdade, que correspondem aos três componentes da velocidade. De acordo com o princípio da equipartição, cada átomo tem

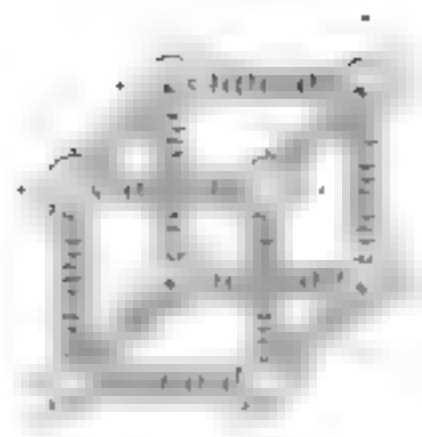


Figura 18.20 Para visualizar as forças entre átomos vizinhos em um cristal, imagine que cada átomo está ligado aos átomos vizinhos por meio de molas.

uma energia cinética de $\frac{1}{2}kT$ para cada grau de liberdade. Além disso, cada átomo possui uma energia *potencial* associada à deformação elástica. Para um oscilador harmônico simples (discutido no Capítulo 13), é fácil mostrar que a energia cinética média de um átomo é *igual* à sua energia potencial média. Em nosso modelo de cristal, cada átomo é essencialmente um oscilador harmônico simples, podemos mostrar que a igualdade entre a energia cinética e a energia potencial continua válida nesse caso, desde que as forças das 'molas' obedeçam à lei de Hooke.

Logo, devemos esperar que cada átomo apresente uma energia cinética média igual a $\frac{3}{2}kT$ e uma energia potencial média igual a $\frac{3}{2}kT$, ou uma energia total $3kT$ por átomo. Quando o cristal possui N átomos ou n moles, sua energia total é

$$E_{int} = 3NkT = 3nRT \qquad (18.27)$$

Assim, concluímos que o calor específico molar do cristal deve ser dado por

$$C_V = 3R \text{ (sólido monoatômico ideal)} \qquad (18.28)$$

Em unidades SI

$$C_V = (3)(8.314\ \text{J/mol} \cdot \text{K}) = 24,9\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

Essa é a **regra de Dulong e Petit**, que vimos como uma conclusão *empírica* na Seção 17.5. Todos os sólidos constituídos por um único elemento possuem um calor específico molar igual a aproximadamente 25 J/mol · K. Agora *deduzimos* essa regra usando a teoria cinética. A concordância com os dados é apenas aproximada, mas, considerando a natureza simples do modelo, ela é bastante significativa.

Sob baixas temperaturas, o calor específico da maioria dos sólidos *diminui* quando a temperatura diminui (Figura 18.21); pela mesma razão, os graus de liberdade das vibrações das moléculas são congelados em baixas temperaturas. Em temperaturas muito baixas, a grandeza kT é muito *menor* do que o menor salto de energia das vibrações dos átomos. Portanto, quase todos os átomos permanecem nos estados de

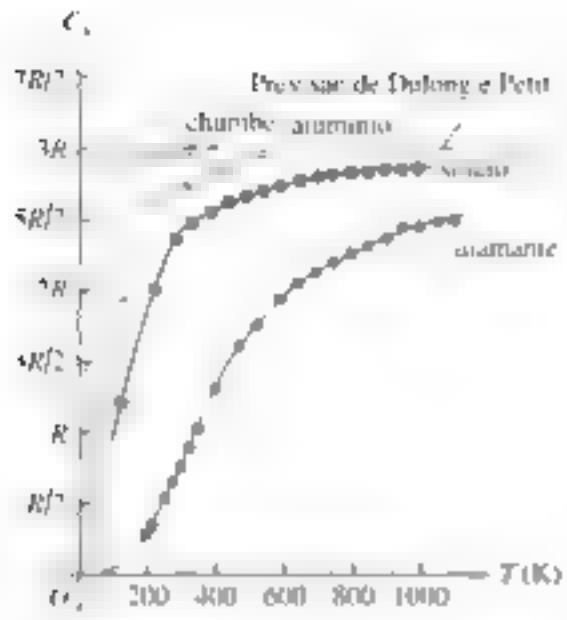


Figura 18.21 Valores experimentais de C_v para o chumbo, o alumínio, o silício e o diamante. Em temperaturas elevadas, o C_v de cada sólido tende ao valor aproximado de $3R$, concordando com a regra de Dulong e Petit. Em baixas temperaturas, C_v é muito menor do que $3R$.

energia mais baixos, porque as energias das vibrações não são suficientes para atingir o nível de energia seguinte mais elevado. A energia média de vibração por átomo é então *menor* do que $3kT$, e o calor específico por molécula é *menor* do que $3k$. Em temperaturas mais elevadas, quando kT é *maior* do que o menor salto de energia, o princípio da equipartição se aplica, e o calor específico total é igual a $3k$ por molécula ou $3R$ por mol, conforme previsto pela regra de Dulong e Petit. A explicação quantitativa da variação do calor específico em função da temperatura foi um dos triunfos da mecânica quântica durante seu desenvolvimento inicial na década de 1920.

Teste sua compreensão da Seção 18.4 Um cilindro com um volume fixo contém gás hidrogênio (H_2) a 25 K. Você fornece calor ao gás a uma taxa constante até que sua temperatura chegue a 500 K. A temperatura do gás aumenta em uma taxa constante? Sim ou não, e por quê? Em caso negativo, o aumento de temperatura é mais rápido no início ou no final desse processo? ❚

*18.5 Velocidades moleculares

Como dissemos na Seção 18.3, nem todas as moléculas de um gás têm a mesma velocidade. A Figura 18.22 mostra um esquema experimental para medir velocidades moleculares. Uma substância é vaporizada em um forno quente; as moléculas do vapor passam por uma fenda na parede do forno e atingem uma câmara a vácuo. Uma série de fendas bloqueia todas as moléculas, exceto aquelas que se deslocam paralelamente a um feixe estreito, que é dirigido para um par de discos que giram. A molécula que passa por uma fenda no primeiro disco é bloqueada pelo segundo disco, a menos que atinja o segundo disco no momento em que a fenda esteja alinhada com a direção do feixe. Os discos funcionam como seletores de velocidade que deixam passar somente moléculas com velocidades dentro de um certo intervalo muito pequeno. Esse intervalo pode ser alterado fazendo-se variar a velocidade de rotação dos discos, de modo que possamos medir o número de moléculas cujas velocidades estejam dentro do limite determinado pelos intervalos selecionados.

Para descrever os resultados de tais medidas, definimos uma função $f(v)$, denominada *função de distribuição*. Se estamos medindo um total de N moléculas, o número dN de moléculas cujas velocidades estão no intervalo entre v e $v + dv$ é dado por

$$dN = Nf(v)dv \qquad (18.29)$$

Podemos dizer também que a *probabilidade* de que uma molécula escolhida ao acaso tenha uma velocidade no intervalo entre v e $v + dv$ é dada por $f(v)dv$. Logo, $f(v)$ é a probabilidade por unidade de *intervalo* de velocidade; ela *não* é igual à probabilidade de que uma molécula tenha uma velocidade exatamente igual a v. Como a probabilidade é um número puro, $f(v)$ possui unidades de inverso de velocidade (s/m).

A Figura 18.23a mostra a função de distribuição para cada temperatura especificada. Em cada temperatura, a altura da curva para qualquer valor de v é proporcional ao número de moléculas com velocidades nas vizinhanças de

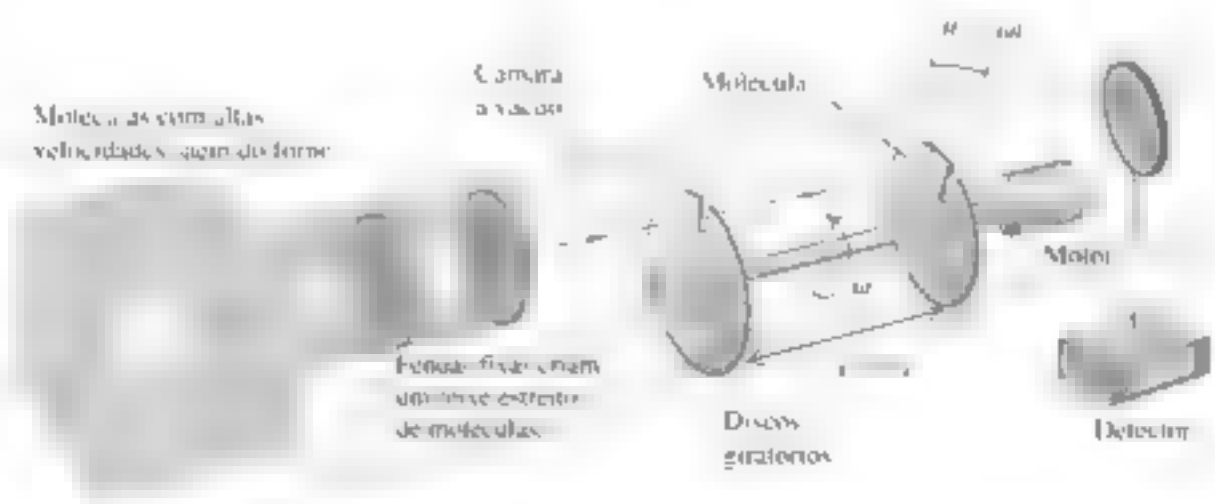


Figura 18.22 [illegible] Quando ela atinge o segundo disco giratório, os discos giraram de um ângulo de seleção θ. Se $v = \omega x/\theta$ a molécula passa pela fenda do segundo disco e atinge o detector.

v. O pico da curva indica o valor da *velocidade mais provável* v_{mp} para a temperatura correspondente. À medida que a temperatura aumenta, a energia cinética molecular média aumenta e, portanto, o pico de $f(v)$ é deslocado para velocidades cada vez mais elevadas.

A Figura 18.23b mostra que a área embaixo da curva entre dois valores de v representa a fração de todas as moléculas cujas velocidades se encontram nesse intervalo. Toda molécula deve ter *algum* valor de v, de modo que a integral de $f(v)$ sobre todos os valores de v deve ser igual a um para qualquer valor de T.

Conhecendo-se $f(v)$, podemos calcular a velocidade v_{mp} mais provável, a velocidade média $v_{méd}$ e a velocidade quadrática média $v_{q\text{-}méd}$. Para calcular a v_{mp}, basta achar o ponto onde $df/dv = 0$, que fornece o valor da velocidade na qual a curva atinge o pico. Para calcular $v_{méd}$, tomamos o número $Nf(v)\,dv$ de moléculas que possuem velocidades em cada intervalo dv, multiplicamos cada um desses números pelas respectivas velocidades v e somamos todos esses produtos (integrando-se sobre todos os valores de v desde zero até o infinito) e, finalmente, dividimos o resultado por N. Ou seja,

$$v_{méd} = \int_0^\infty v f(v)\,dv \qquad (18.30)$$

A velocidade quadrática média é determinada de modo análogo; a média de v^2 é dada por

$$(v^2)_{méd} = \int_0^\infty v^2 f(v)\,dv \qquad (18.31)$$

e o valor da $v_{q\text{-}méd}$ é a raiz quadrada do resultado anterior.

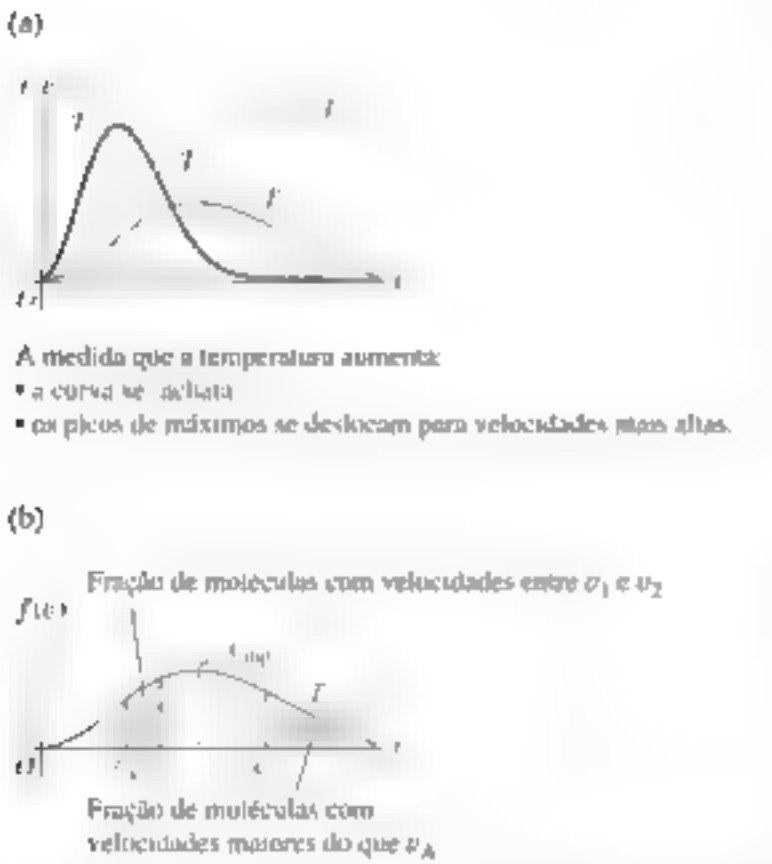

(a)
A medida que a temperatura aumenta:
• a curva se achata
• os picos de máximos se deslocam para velocidades mais altas.
(b)
Fração de moléculas com velocidades entre v_1 e v_2
Fração de moléculas com velocidades menores do que v_A

Figura 18.23 (a) Curvas da função de distribuição de Maxwell-Boltzmann $f(v)$ para três temperaturas. (b) As áreas sombreadas sob a curva representam a fração de moléculas cujas velocidades se encontram em determinado intervalo. A velocidade mais provável v_{mp} em uma dada temperatura é o pico da curva.

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

A função $f(v)$ que descreve a distribuição real das velocidades moleculares denomina-se **distribuição de Maxwell-Boltzmann**. Ela pode ser deduzida a partir de considerações de mecânica estatística. Porém, essa dedução está fora dos nossos objetivos. Eis aqui o resultado:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

(distribuição de Maxwell-Boltzmann) (18.32)

Podemos também expressar essa função em termos da energia cinética translacional de uma molécula, que será designada por ε. Ou seja, $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$. Convidamos você a verificar que, ao substituir essa expressão na Equação (18.32), o resultado é

$$f(\varepsilon) = \frac{2\pi}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} \qquad (18.33)$$

Essa expressão mostra que o expoente da função de distribuição de Maxwell-Boltzmann é igual a $-\varepsilon/kT$ e a forma da curva é determinada pelos valores de ε e kT em cada ponto. Deixamos a você como um exercício (ver Exercício 18.48) provar que o *pico* de cada curva ocorre quando $\varepsilon = kT$, correspondendo à velocidade mais provável v_{mp} dada por

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad (18.34)$$

Para determinar a velocidade média, substituímos a Equação (18.32) na Equação (18.30), calculamos a integral fazendo a mudança de variável $v^2 = x$ e a seguir integrando por partes; o resultado é

$$v_{méd} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \qquad (18.35)$$

Finalmente, para calcular a velocidade quadrática média, substituímos a Equação (18.32) na Equação (18.31). O cálculo da integral resultante exigiria uma série de acrobacias matemáticas, porém você pode achar essa integral em uma tabela de integrais. O resultado é

$$v_{q\text{-}méd} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \qquad (18.36)$$

Esse resultado concorda com a Equação (18.19); ele *deve* concordar para que a distribuição de Maxwell-Boltzmann seja consistente com o princípio da equipartição da energia e com outros cálculos da teoria cinética.

A Tabela 18.2 mostra a fração de todas as moléculas de um gás ideal que possuem velocidades *menores do que* vários múltiplos de $v_{q\text{-}méd}$. Esses números foram obtidos por integração numérica; eles são os mesmos para todos os gases ideais.

A distribuição das velocidades das moléculas de um líquido é semelhante à distribuição das velocidades das moléculas nos gases, embora não seja idêntica. Este modelo ajuda

Tabela 18.2 Frações de moléculas de um gás ideal com velocidades menores do que os múltiplos de $v/v_{q\,mol}$

$v/v_{q\,mol}$	Fração
0,20	0,011
0,40	0,077
0,60	0,218
0,80	0,411
1,00	0,608
1,20	0,771
1,40	0,882
1,60	0,947
1,80	0,979
2,00	0,993

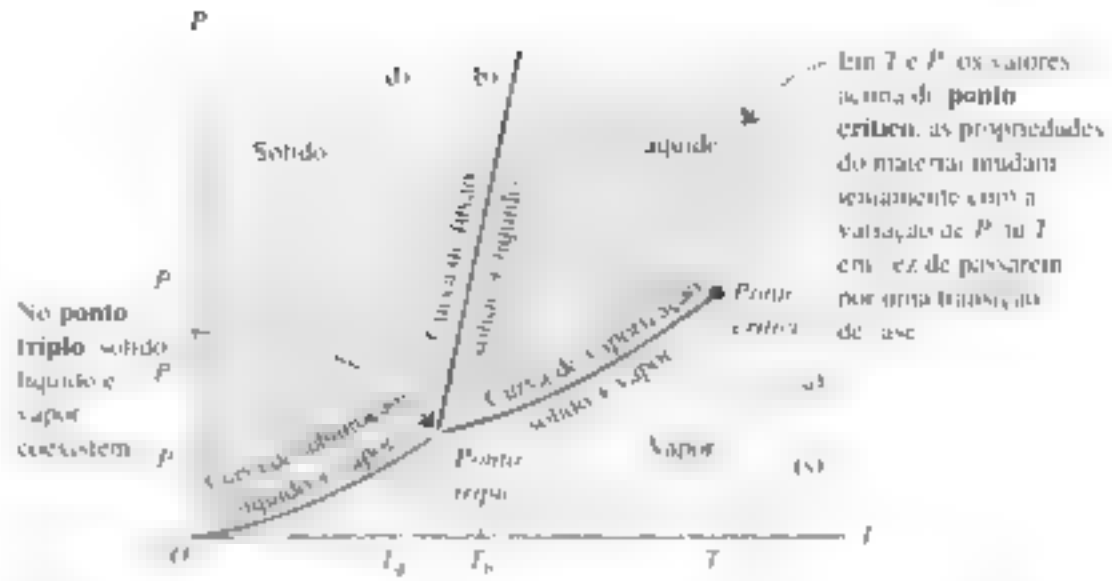

P
Sólido
Líquido
Vapor
No ponto triplo sólido líquido e vapor coexistem
Em T e P os valores acima do ponto crítico as propriedades do material mudam lentamente com a variação de P ou T em vez de passarem por uma transição de fase
T

Figura 18.24 Um tipico diagrama de fase *PT* mostrando as regiões de temperatura e pressão em que ocorrem as várias fases, e também as linhas que caracterizam as transições entre as fases

a entender a questão da pressão de vapor de um líquido e o fenômeno da ebulição. Suponha que, quando uma molécula tem uma velocidade no mínimo igual a v_A na Figura 18.23b, ela possa escapar da superfície do líquido e passar para a fase vapor. O número dessas moléculas, representado pela área embaixo da 'extremidade' de cada curva (do lado direito da velocidade v_A), cresce rapidamente com a temperatura. Logo, a taxa com a qual as moléculas podem escapar depende muito da temperatura. Esse processo compete com outro, no qual as moléculas da fase vapor colidem inelasticamente com a superfície e ficam presas na fase líquida. O número de moléculas que sofrem essa colisão é proporcional à pressão da fase vapor. O equilíbrio de fase entre o líquido e o vapor ocorre quando esses dois processos competitivos apresentam uma taxa exatamente igual. Portanto, quando as distribuições das velocidades moleculares forem conhecidas em diversas temperaturas, podemos fazer uma previsão teórica da pressão de vapor em função da temperatura. Quando um líquido evapora, são as moléculas com velocidades mais elevadas que escapam da superfície. Aquelas que permanecem na fase líquida são as que têm, em média, uma energia menor. Esse é um enfoque molecular do resfriamento produzido pela vaporização.

As taxas das reações químicas costumam depender bastante da temperatura, e a reação está contida na distribuição de Maxwell-Boltzmann. Quando duas moléculas que reagem colidem, a reação só pode ocorrer quando as moléculas estiverem suficientemente próximas para que haja interação entre os elétrons das suas distribuições de carga elétrica. Isso exige uma energia mínima, chamada de *energia de ativação* e, portanto, é necessário que haja uma certa velocidade molecular mínima. A Figura 18.23a mostra que o número de moléculas existentes na extremidade da curva cresce rapidamente com a temperatura. Assim, a taxa de qualquer reação que dependa de uma energia de ativação deve crescer rapidamente com a temperatura. Analogamente, as taxas de muitos processos de crescimento de plantas dependem muito da temperatura, como podemos constatar pelo crescimento rápido e diversificado das plantas das florestas tropicais.

Teste sua compreensão da Seção 18.5 Uma quantidade de gás contendo N moléculas tem uma função de distribuição da velocidade $f(v)$. Quantas moléculas têm velocidades entre v_1 e v_2? (i) $\int_0^{v_2} f(v)\,dv - \int_0^{v_1} f(v)\,dv$; (ii) $N[\int_0^{v_2} f(v)\,dv - \int_0^{v_1} f(v)\,dv]$; (iii) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv - \int_0^{v_2} f(v)\,dv$; (iv) $N[\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv - \int_0^{v_2} f(v)\,dv]$; (v) nenhuma das anteriores. ■

18.6 Fases da matéria

Já falamos bastante sobre gases ideais nas últimas seções. O gás ideal é o sistema mais fácil de ser analisado do ponto de vista molecular, porque desprezamos as interações entre as moléculas. Porém, essas interações são as responsáveis pela condensação da matéria nas fases sólida e líquida em determinadas condições. Por isso, não é surpresa verificar que a estrutura de um líquido ou de um sólido é muito mais complicada do que a dos gases. Não entraremos em detalhes sobre a estrutura microscópica, mas falaremos genericamente sobre as fases da matéria, o equilíbrio de fases e as transições de fase.

Na Seção 17.6, aprendemos que cada fase só é estável em certos intervalos de temperatura e de pressão. A transição de uma fase para outra geralmente ocorre quando existem condições de **equilíbrio de fase** entre as fases, e para uma dada pressão isso ocorre somente em uma temperatura específica. Podemos representar essas condições em um gráfico de P em função de T, chamado de **diagrama de fase**; a Figura 18.24 mostra um exemplo. Cada ponto do diagrama representa um par de valores P e T. Existe apenas uma única fase em cada ponto, exceto nos pontos sobre linhas contínuas, em que duas fases coexistem em equilíbrio de fase.

Essas linhas separam o diagrama nas regiões referentes ao sólido, ao líquido e ao vapor. Por exemplo, a curva de fusão separa a área da fase líquida da região da fase sólida, e representa as condições possíveis de existência do equilíbrio de fase sólido-líquido. Analogamente, a curva de vaporização separa a área da fase líquida da região da fase vapor, e a curva de sublimação separa a área da fase sólida da região da fase vapor. As três curvas se cortam em um

Figura 18.25 A pressão atmosférica na Terra é maior do que a pressão do ponto triplo da água (ver linha (a) na Figura 18.24). Dependendo da temperatura, a água pode existir como vapor (na atmosfera), como líquido (nos oceanos) e como sólido (como no caso deste iceberg).

ponto denominado **ponto triplo**, o único ponto do diagrama onde as três fases podem coexistir (Figura 18.25). Na Seção 17.3 usamos a temperatura do ponto triplo da água para definir a escala de temperatura Kelvin. Na Tabela 18.3 fornecemos o ponto triplo de diversas substâncias.

Se fornecermos calor a certa substância a uma pressão constante P_a, representada pela reta horizontal (a) na Figura 18.24, ela passará por diversas fases. Nessa pressão, a temperatura de fusão é dada pela interseção dessa reta com a curva de fusão, e a temperatura de ebulição é dada pela interseção com a curva de vaporização. Quando a pressão é P_t, o aquecimento à pressão constante transforma a fase sólida diretamente na fase vapor. Esse processo denomina-se *sublimação*, a interseção da linha (s) com a curva de sublimação fornece a temperatura T_t para a qual ela ocorre a uma dada pressão P_t. Para qualquer pressão menor do que a pressão do ponto triplo, a ocorrência da fase líquida não é possível. A pressão do ponto triplo do dióxido de carbono é igual a 5,1 atm. Na pressão atmosférica normal, o dióxido de carbono sólido ("gelo seco") sofre sublimação: não existe a fase líquida nessa pressão.

A linha (b) na Figura 18.24 representa uma compressão a uma temperatura constante T_b. O material passa da fase sólida para a fase líquida e, finalmente, para a fase vapor quando a linha (b) cruza com a curva de vaporização e com a curva de fusão, respectivamente. A linha (d) indica uma compressão a essa temperatura constante T_d: o material passa da fase vapor para a fase sólida no ponto onde a linha reta (d) cruza com a curva de sublimação.

Verificamos no diagrama *PV* da Figura 18.7 que a transição de fase líquido-vapor ocorre somente quando a temperatura e a pressão forem menores do que os valores do pico da curva que delimita a área sombreada indicada como

Tabela 18.3 Ponto triplo de algumas substâncias

Substância	Temperatura (K)	Pressão (Pa)
Hidrogênio	13,80	$0{,}0704 \times 10^5$
Deutério	18,63	$0{,}171 \times 10^5$
Neônio	24,56	$0{,}432 \times 10^5$
Nitrogênio	63,18	$0{,}125 \times 10^5$
Oxigênio	54,36	$0{,}00152 \times 10^5$
Amônia	195,40	$0{,}0607 \times 10^5$
Dióxido de carbono	216,55	$5{,}17 \times 10^5$
Dióxido de enxofre	197,68	$0{,}00167 \times 10^5$
Água	273,16	$0{,}00610 \times 10^5$

"região de equilíbrio da fase líquido-vapor". Esse ponto corresponde ao ponto final no topo da curva de vaporização indicada na Figura 18.24. Trata-se do chamado **ponto crítico**, e os valores de P e T correspondentes a ele denominam-se pressão crítica p_c e temperatura crítica T_c. Um gás submetido a uma pressão *maior* do que a pressão do ponto crítico não se separa em duas fases quando é resfriado à pressão constante (ao longo de uma reta horizontal acima do ponto crítico na Figura 18.24). Em vez disso, suas propriedades variam continuamente e se afastam do comportamento normalmente associado a um gás (baixa densidade, alta compressibilidade) até chegar gradualmente ao comportamento de um líquido (alta densidade, compressibilidade pequena) *sem que ocorra uma transição de fase*.

Se isso parece difícil de acreditar, pense em uma transição da fase líquida para a fase vapor em pontos sucessivamente mais elevados da curva de vaporização. Conforme nos aproximamos do ponto crítico, as *diferenças* entre as propriedades físicas (tais como a densidade, a compressibilidade volumétrica e a viscosidade) da fase líquida e da fase vapor vão se tornando cada vez menores. Exatamente *no* ponto crítico todas as diferenças se anulam e desaparece a distinção entre líquido e vapor. O calor de vaporização também cresce mais lentamente à medida que nos aproximamos do ponto crítico, e também é igual a zero no ponto crítico.

Em quase todos os materiais conhecidos, as pressões críticas são muito maiores do que a pressão atmosférica, de modo que não podemos observar esse comportamento em nossa vida cotidiana. Por exemplo, a pressão crítica da água ocorre a uma temperatura de 647,4 K e a uma pressão igual a $221{,}2 \times 10^5$ Pa (cerca de 218 atm). Entretanto, as caldeiras que aquecem o vapor em usinas termelétricas em geral operam mantendo o gás em temperaturas e pressões muito maiores do que os respectivos valores no ponto triplo.

Muitas substâncias podem apresentar mais de uma fase no estado sólido. Um exemplo familiar é o carbono, que pode existir na forma não cristalina como carvão e na forma cristalina como grafite e diamante. A água é outro exemplo: foram identificados pelo menos oito tipos de gelo com propriedades e estruturas cristalinas diferentes quando o gelo é submetido a pressões muito elevadas.

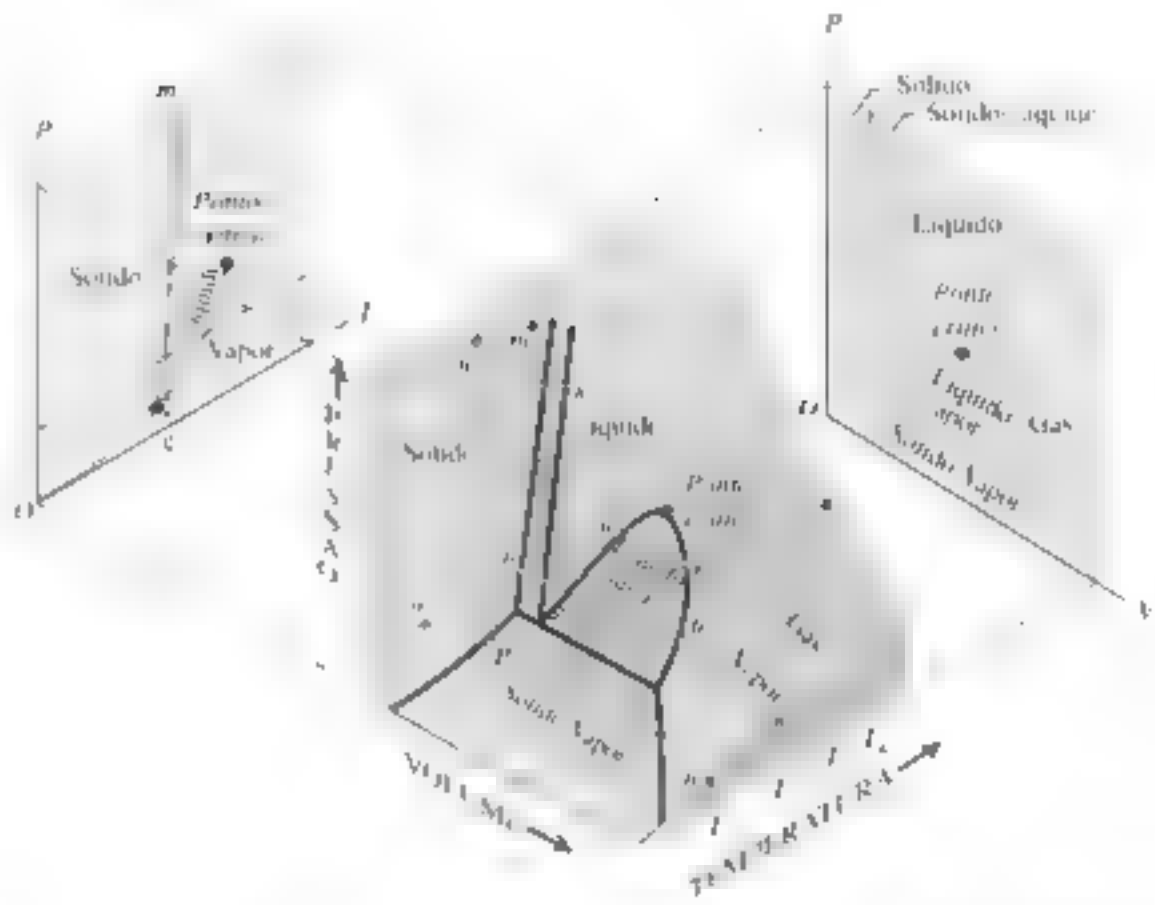


Figura 18.26 Uma superfície *PVT* para uma substância que se dilata quando se funde. As projeções das fronteiras da superfície sobre o plano *PV* e sobre o plano *PT* também são mostradas.

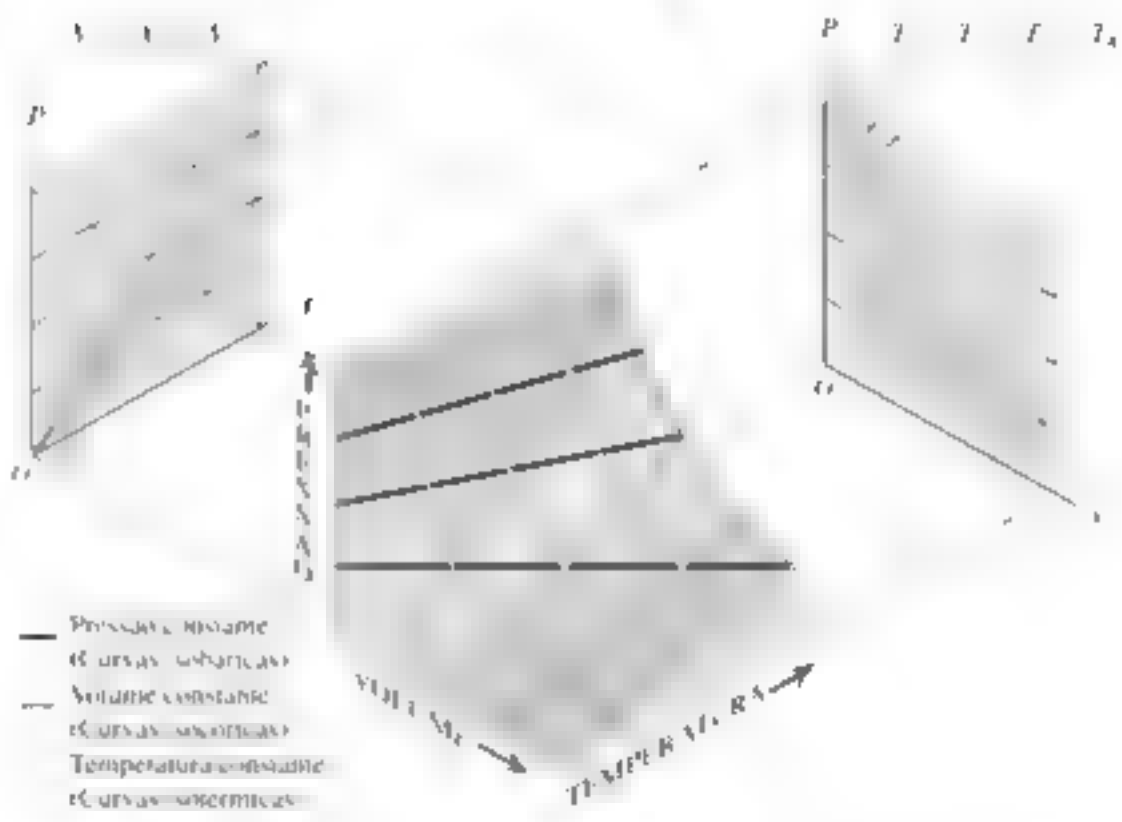


Figura 18.27 Uma superfície *PVT* para um gás ideal. No lado esquerdo, cada curva corresponde a certo volume constante; no lado direito, cada curva corresponde a uma certa temperatura constante.

Superfícies *PVT*

Afirmamos na Seção 18.1 que a equação de estado de qualquer material pode ser representada graficamente como uma superfície em um espaço de três dimensões com coordenadas *P*, *V* e *T*. Raramente essa superfície é útil para a representação de informações quantitativas detalhadas, porém, pode contribuir para nosso entendimento geral do comportamento de um material em diferentes temperaturas e pressões. A Figura 18.26 mostra uma superfície *PVT* típica. As linhas finas representam isotermas no plano *PV*; projetando-as sobre o plano *PV*, obteríamos um diagrama semelhante ao mostrado na Figura 18.7. As isotermas *PV* representam linhas de contorno sobre a superfície *PVT*, exatamente como as linhas de contorno em um mapa topográfico representam a altitude (a terceira dimensão) em cada ponto. As projeções das arestas da superfície sobre o plano *PT* produzem o diagrama de fase *PT* mostrado na Figura 18.24.

A linha *abcdef* na Figura 18.26 representa um aquecimento à pressão constante; a fusão ocorre ao longo da linha *bc*, e a vaporização ao longo da linha *de*. Observe as variações de volume que ocorrem ao longo dessa linha quando *T* aumenta. A linha *ghjklm* corresponde a uma compressão isotérmica (temperatura constante), ocorrendo liquefação ao longo da linha *hj* e solidificação ao longo da linha *kl*. Entre os pontos *g* e *k*, os segmentos *gh* e *jk* representam uma compressão isotérmica com aumento de pressão; o

aumento de pressão é muito maior na região líquida *jk* e na região sólida *lm* do que na fase vapor *gh*. Finalmente, a linha *nopq* representa solidificação isotérmica diretamente a partir da fase vapor; esse é o processo envolvido quando um cristal cresce diretamente a partir da fase vapor, como na formação da neve ou do granizo, e na fabricação de alguns dispositivos eletrônicos sólidos. Essas três linhas da superfície *PVT* merecem um estudo cuidadoso.

Em contraste, a Figura 18.27 mostra a superfície *PVT* mais simples de uma substância que obedece sempre à equação de estado do gás ideal. As projeções das curvas isotérmicas sobre o plano *PV* correspondem às curvas isotérmicas da Figura 18.6, e as projeções das curvas isocóricas (curvas com volume constante) sobre o plano *PT* mostram que, nesse caso, a pressão é diretamente proporcional à temperatura.

Teste sua compreensão da Seção 18.6 A pressão atmosférica média em Marte é 6.0×10^2 Pa. Poderia haver lagos ou rios em Marte hoje em dia? E no passado, quando se acredita que a pressão atmosférica fosse significativamente maior do que é hoje? (i)

Resumo

Equação de estado. A pressão P, o volume V e a temperatura T de uma dada quantidade de substância são denominadas variáveis de estado. Elas são relacionadas pela equação de estado. Essa relação é aplicável apenas em estados de equilíbrio, em que P e T são uniformes em todo o sistema. A equação de estado do gás ideal relaciona P, V, T e o número de moles n por meio de uma constante R que é igual para todos os gases. (Ver exemplos 18.1–18.4.)

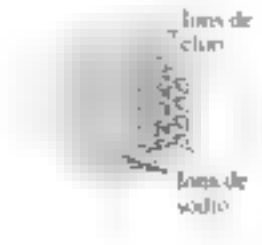
Um diagrama *PV* é um conjunto de gráficos de pressão, chamado isotermas, em que cada pressão é mostrada em função do volume para uma temperatura constante.

$$PV = nRT \tag{18.3}$$

Propriedades moleculares da matéria. A massa molar M de uma substância pura é a massa por mol. A massa total m_{tot} é igual a M multiplicada pelo número de moles n. O número de Avogadro, N_A, é o número de moléculas em um mol. A massa m de uma molécula individual é M dividida por N_A. (Ver Exemplo 18.5.)

$$m_{tot} = nM \tag{18.7}$$

$$M = N_A m \tag{18.8}$$



Modelo cinético-molecular de um gás ideal. Em um gás ideal, a energia cinética translacional total do gás como um todo (K_{tr}) e a energia cinética translacional média por molécula são proporcionais à temperatura absoluta T. A velocidade quadrática média das moléculas de um gás ideal é proporcional à raiz quadrada de T. Essas expressões envolvem a constante de Boltzmann $k = R/N_A$. (Ver Exemplos 18.6 e 18.7.)

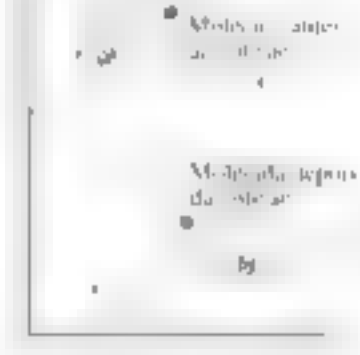
O livre caminho médio λ das moléculas de um gás ideal depende do número de moléculas por volume (N/V) e do raio molecular r. (Ver Exemplo 18.8.)

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{méd} = \tag{18.14}$$

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{méd} = \frac{3}{2}kT \tag{18.15}$$

$$v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{méd}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \tag{18.19}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}r^2\frac{N}{V}} \tag{18.21}$$

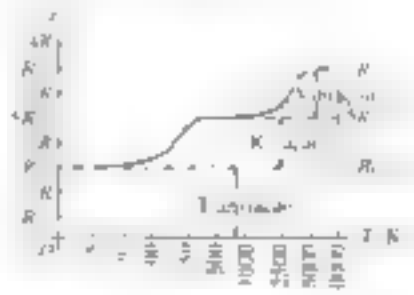


Calores específicos. O calor específico molar a volume constante C_V pode ser expresso como um simples múltiplo da constante do gás R em certos casos ideais: um gás monoatômico ideal [Equação (18.25)]; um gás diatômico ideal, incluindo a energia de rotação [Equação (18.26)] e um sólido monoatômico ideal [Equação (18.28)]. Essas idealizações funcionam com uma boa aproximação para muitos sistemas reais.

$$C_V = \frac{3}{2}R \text{ (gás monoatômico)} \tag{18.25}$$

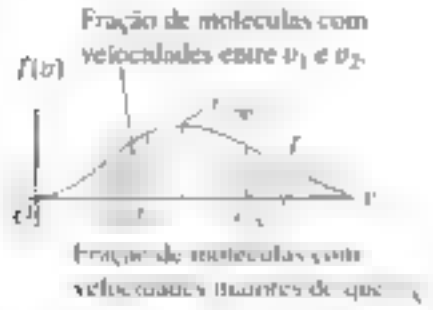
$$C_V = \frac{5}{2}R \text{ (gás diatômico)} \tag{18.26}$$

$$C_V = 3R \text{ (sólido monoatômico)} \tag{18.28}$$

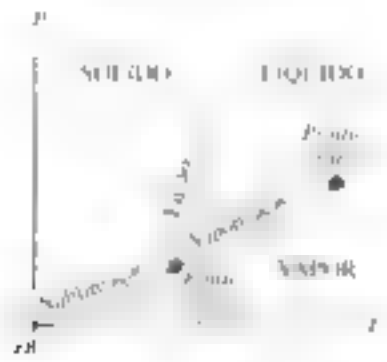


Velocidades moleculares. As velocidades das moléculas em um gás ideal comportam-se de acordo com a distribuição de Maxwell-Boltzmann $f(v)$. A grandeza $f(v)\,dv$ descreve que fração das moléculas tem velocidades entre v e $v + dv$.

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \qquad (18.32)$$



Fases da matéria. A matéria comum pode existir nas fases sólida, líquida e gasosa. Um diagrama de fases mostra as curvas ao longo das quais duas fases podem coexistir em equilíbrio de fase. Todas as três fases podem coexistir no ponto triplo. A curva de vaporização termina no ponto crítico, acima do qual desaparece a distinção entre a fase líquida e a fase gasosa.



Principais termos

condições normais de temperatura e pressão (CNTP), 220
constante de Boltzmann, 228
constante dos gases ideais, 219
diagrama de fase, 237
diagrama *PV*, 222
distribuição de Maxwell-Boltzmann, 236
equação de estado do gás ideal, 218
equação de estado, 218
equação de van der Waals, 222
equilíbrio de fase, 237
gás ideal, 219
graus de liberdade, 233
isoterma, 222
livre caminho médio, 231
massa molar, 218
mol, 225
moléculas, 223
número de Avogadro, 225
poço de potencial, 224
ponto crítico, 238
ponto triplo, 238
princípio da equipartição da energia, 233
regra de Dulong e Petit, 234
variáveis de estado, 217
velocidade quadrática média, 228

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Segundo a Equação (18.19), a velocidade quadrática média de uma molécula de gás é proporcional à raiz quadrada da temperatura absoluta T. O intervalo de temperatura que estamos considerando é de (25 + 273,15) K = 298 K até (100 + 273,15) K = 373 K. Logo, as velocidades aumentam de um fator de $\sqrt{(373\text{ K})/(298\text{ K})} = 1,12$, isto é, em 12%. Embora 100 °C pareça bem mais quente do que 25 °C, a diferença nas velocidades moleculares é relativamente pequena.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

18.1 **Resposta: (ii) e (iii) (empate), (i) e (v) (empate), (iv).** Podemos reescrever a equação do gás ideal, a Equação (18.3), como $n = pV/RT$. Isso nos diz que o número de moles n é proporcional à pressão e volume, e inversamente proporcional à temperatura absoluta. Logo, comparando-se a (i), o número de moles em cada caso é (ii) (2)(1)/(1) = duas vezes maior, (iii) (1)(2)/(1) = duas vezes maior, (iv) (1)(1)/(2) = $\frac{1}{2}$ (a metade do valor) e (v) (2)(1)/(2) = uma vez maior (ou seja, igual).

18.2 **Resposta: (vi).** O valor de r_0 determina a posição de equilíbrio das moléculas na fase sólida; portanto, dobrando r_0, a separação também dobra. Assim, um cubo sólido desse composto pode crescer de 1 cm de aresta a 2 cm de aresta. O volume ficaria, então, 2^3 = 8 vezes maior, e a densidade (massa dividida pelo volume) passaria a ser $\frac{1}{8}$ da inicial.

18.3 **Respostas: (a) (iv), (ii), (iii), (i); (b) (ii) e (iv) (empate), (i) e (iii) (empate).** a) A Equação (18.19) indica que $v_{q\text{-méd}} = \sqrt{3RT/M}$, então, a velocidade quadrática média é proporcional à raiz quadrada da razão da temperatura absoluta T e da massa molar M. Comparada a (i) oxigênio a 300 K, $v_{q\text{-méd}}$ nos outros casos é (ii) $\sqrt{(330\text{ K})/(300\text{ K})} = 1,05$ vez maior e (iv) $\sqrt{(330\text{ K})(32,0\text{ g/mol})/(300\text{ K})(28,0\text{ g/mol})} = 1,12$ vez maior. b) Conforme a Equação (18.16), a energia cinética translacional média por molécula é $\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle_{méd} = \frac{3}{2}kT$, que é diretamente proporcional a T e independe de M. Temos T = 300 K nos casos (i) e (ii), e T = 330 K nos casos (iii) e (iv), então $\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle_{méd}$ apresenta valores iguais nos casos (ii) e (iv) e valores iguais (mas menores) nos casos (i) e (iii).

18.4 **Respostas: não; perto do início.** Fornecendo-se uma pequena quantidade de calor dQ ao gás, ocorre uma variação de temperatura dT, onde $dQ = nC_v dT$ conforme a Equação (18.24). A Figura 18.19 mostra que C_v varia em H_2 a temperaturas entre 25 K e 900 K, portanto, uma dada quantidade de calor provoca diferentes valores de variação de temperatura durante o processo. Logo, a temperatura não aumentará em uma taxa constante. A variação de temperatura $dT = dQ/nC_v$ é inversamente proporcional a C_v, então a temperatura aumenta mais rapidamente no início do processo, quando a temperatura é mais baixa e C_v é menor (ver Figura 18.19).

18.5 **Resposta: (iii).** A Figura 18.23b mostra que a *fração* de moléculas com velocidades entre v_1 e v_2 é igual à área sob a curva de $f(v)$ por v de $v = v_1$ até $v = v_2$. Isso é igual à integral $\int_0^{v_2} f(v)\,dv$, que, por sua vez, é igual à diferença entre as integrais $\int_0^{v_2} f(v)\,dv$ (a fração de moléculas com velocidades entre 0 e v_2) e $\int_0^{v_1} f(v)\,dv$ (a fração de moléculas com velocidades entre 0 e a velocidade mais baixa, v_1). O *número* de moléculas com velocidades entre v_1 e v_2 é igual à fração de moléculas nesse intervalo de velocidades multiplicado por N, o número total de moléculas.

18.6 **Respostas: não; sim.** A pressão da água no ponto triplo fornecida na Tabela 18.3 é $6,10 \times 10^2$ Pa. A pressão atual em Marte é só um pouco menor do que esse valor, correspondendo à linha designada como P_3 na Figura 18.24. Logo, água líquida não pode existir

na superfície marciana atual, e não há nos de lagos por lá. Os cientistas especializados concluem que pode ter existido, e provavelmente existiu, água líquida em Marte no passado, quando a atmosfera era mais densa.

Questões para discussão

Q18.1 Na Seção 18.1, afirmamos que, geralmente, a pressão, o volume e a temperatura não podem variar individualmente sem afetar os valores das outras grandezas. Contudo, quando um líquido evapora, seu volume varia, embora a pressão e a temperatura permaneçam constantes. Isso é coerente com o que dissemos? Justifique sua resposta.

Q18.2 Na equação do gás ideal, você poderia usar a escala Celsius de temperatura em vez de usar a escala Kelvin, se utilizasse um valor numérico apropriado para cada constante *R*? Explique por que.

Q18.3 Em manhãs muito frias você pode "ver sua respiração". Será que isso é verdade? O que você está realmente vendo? Esse fenômeno depende da temperatura, da umidade ou de ambas? Explique.

Q18.4 Quando um carro percorre uma certa distância, a pressão do ar nos pneus aumenta. Por quê? Para reduzir a pressão você deveria retirar um pouco de ar do pneu? Justifique sua resposta.

Q18.5 O líquido refrigerante no radiador de um automóvel é mantido sob pressão maior do que a pressão atmosférica. Por que isso é desejável? A tampa do radiador liberta um pouco do líquido refrigerante quando a pressão manométrica supera certo valor, aproximadamente igual a 1,02 atm. Por que não vedar o sistema completamente?

Q18.6 Quando um alimento é colocado em um *freezer* sem nenhuma proteção, ele sofre desidratação, fenômeno conhecido como "queima no *freezer*". Explique por quê.

Q18.7 A liofilização ou "secagem no *freezer*" é uma técnica usada para preservar alimentos semelhante à "queima no *freezer*", mencionada na questão anterior. Na liofilização, o alimento em geral é previamente congelado, a seguir é colocado em uma câmara a vácuo e recebe irradiações de luz infravermelha. Para que serve o vácuo? E a luz infravermelha? Que vantagens oferece a liofilização em comparação com a secagem comum?

Q18.8 Um grupo de estudantes viajou da universidade (próxima do nível do mar) até o alto de uma montanha para praticar esqui no fim de semana. Ao chegar ao topo da montanha, eles verificaram que os pacotes de batatas fritas que haviam levado para o lanche se romperam. Por que isso aconteceu?

Q18.9 Como a evaporação da transpiração da sua pele resfria o seu corpo?

Q18.10 Um recipiente rígido, perfeitamente isolado, tem seu volume dividido ao meio por uma membrana. Um lado contém um gás em temperatura absoluta T_0 e pressão P_0 enquanto o outro lado está completamente vazio. De repente, um pequeno buraco surge na membrana, permitindo que o gás escape para o outro lado até ocupar duas vezes seu volume original. Em termos de T_0 e P_0, qual será a nova temperatura e pressão do gás quando ele estiver distribuído igualmente pelas duas metades do recipiente? Explique o seu raciocínio.

Q18.11 a) Qual amostra possui maior número de átomos, um quilograma de hidrogênio ou um quilograma de chumbo? E a maior massa? b) Qual amostra possui maior número de átomos, um mol de hidrogênio ou um mol de chumbo? E a maior massa? Explique.

Q18.12 Use os conceitos do modelo cinético-molecular para explicar: a) por que a pressão de um gás em um recipiente rígido aumenta à medida que se fornece calor ao gás e b) por que a pressão de um gás aumenta quando o comprimimos, mesmo que a sua temperatura não varie.

Q18.13 A proporção dos diversos gases na atmosfera terrestre varia ligeiramente com a altitude. Você esperaria que a proporção de oxigênio fosse maior ou menor do que a proporção de nitrogênio em altitudes muito elevadas? Por quê?

Q18.14 Comente a seguinte afirmação: "*quando dois gases são misturados, eles devem possuir a mesma velocidade molecular média para que permaneçam em equilíbrio térmico*". Essa afirmação está correta? Justifique sua resposta.

Q18.15 O modelo cinético-molecular contém uma hipótese implícita acerca da temperatura das paredes do recipiente. Qual é essa hipótese? O que ocorreria se essa hipótese não fosse válida?

Q18.16 A temperatura de um gás ideal é diretamente proporcional à energia cinética média das suas moléculas. Se o recipiente de um gás ideal estivesse passando por você a 2000 m/s, a temperatura do gás seria maior do que no caso do mesmo gás em repouso? Defenda sua resposta.

Q18.17 Se a pressão de um gás monoatômico ideal é aumentada enquanto o número de moles é mantido constante, o que acontece com a energia cinética translacional média de um átomo do gás? É possível variar o volume e a pressão de um gás ideal *ao mesmo tempo* e manter constante a energia cinética translacional média dos átomos? Explique.

Q18.18 Ao deduzirmos a equação do gás ideal a partir do modelo cinético-molecular, desprezamos a energia potencial decorrente da gravidade terrestre. Essa omissão se justifica? Por quê?

Q18.19 A dedução da equação do gás ideal inclui a hipótese de que o número de moléculas é muito grande, de modo que pudéssemos calcular a força média criada por muitas colisões. Contudo, a equação do gás ideal só é válida com precisão quando a pressão é pequena, ou seja, quando existem poucas moléculas e as distâncias entre elas são grandes. Existe incompatibilidade entre essas duas afirmações? Explique sua resposta.

Q18.20 Existe um pequeno vazamento em um tanque de armazenamento de gás. A pressão do interior do tanque diminui mais rapidamente quando o gás é o hidrogênio ou hélio ou quando o gás é o oxigênio? Por quê?

Q18.21 Considere dois gases ideais na mesma temperatura. O gás A possui a mesma massa total que o gás B, porém, a massa molar do gás A é maior do que a massa molar do gás B. Qual dos dois gases possui a maior energia cinética total? A sua resposta depende da estrutura molecular dos gases? Explique a sua resposta.

Q18.22 A temperatura de um gás monoatômico ideal é aumentada de 25 °C a 90 °C. A energia cinética translacional média de cada átomo do gás dobra? Explique. Se a sua resposta é "não", qual seria a temperatura final se a energia cinética translacional média fosse dobrada?

Q18.23 De que fator a temperatura na escala Kelvin do gás deveria ser aumentada para dobrar a velocidade quadrática média dos átomos de um gás ideal? Explique.

Q18.24 a) Se você fornece a mesma quantidade de calor a um mol de um gás monoatômico ideal e a um mol de um gás diatômico ideal, em qual deles a temperatura aumentará mais (se é que a temperatura de algum deles aumenta)? b) Fisicamente, *por que* os gases diatômicos têm um calor específico molar maior do que os gases monoatômicos?

Q18.25 Na Seção 18.4, concluímos que todos os gases diatômicos ideais têm o mesmo calor específico C_v. Isso significa que a mesma quantidade de calor é necessária para elevar a temperatura de um grama de todos esses gases em 1,0 K? Explique o seu raciocínio.

*Q18.26 Para um gás que contém N moléculas, seria correto dizer que o número de moléculas com velocidade v é igual a $f(v)$? Ou seria correto dizer que esse número é $Nf(v)$? Explique suas respostas.

*Q18.27 Imagine um filtro de ar especial colocado na janela de uma casa. Os pequenos furos do filtro permitem que somente moléculas de ar que se movem com velocidades acima de certo valor saiam da casa, ao mesmo tempo em que permite moléculas com velocidades abaixo desse limite entrarem na casa. Qual seria o efeito desse filtro no interior da casa? (De acordo com a segunda lei da termodinâmica — que discutiremos no Capítulo 20 — esse filtro de ar maravilhoso não pode ser fabricado.)

Q18.28 Um frasco de água em temperatura ambiente é colocado em um recipiente fechado, e a pressão do ar do recipiente é reduzida lentamente. Quando a pressão do ar está suficientemente reduzida, a água começa a entrar em ebulição. Enquanto ocorre a vaporização, a temperatura da água permanece constante; na verdade, a temperatura cai ligeiramente. Explique esses fenômenos.

Q18.29 Escorregamos quando caminhamos sobre o gelo, especialmente quando usamos patins. O que isso informa sobre a dependência da temperatura de fusão em relação à pressão? Explique.

Q18.30 "Chaminés hidrotérmicas" são fraturas no fundo do oceano que expelem água muito quente. A água que emerge de uma dessas fraturas na costa do Oregon, a uma profundidade de 2400 m, apresenta uma temperatura de 279 °C. Apesar dessa temperatura elevada, a água não entra em ebulição. Por quê?

Q18.31 Uma área escura da superfície lunar denomina-se *mare*, a palavra latina da qual deriva "mar" em português, e antigamente pensava-se que cada *mare* continesse grande quantidade de água. Na realidade, um *mare* não é absolutamente um "mar", mas sim uma planície lunar por lava solidificada. Sabendo que a Lua não possui atmosfera, como você explica a ausência de água na superfície da Lua?

Q18.32 Além das instruções normais para cozinhar arroz contidas no verso de uma embalagem de arroz, existem também "instruções" para altitudes elevadas. A única diferença é que essas "instruções para altitudes elevadas" sugerem usar um tempo maior e um maior volume de água para cozinhar o arroz. Por que as instruções variam conforme a altitude?

Exercícios

Seção 18.1 Equações de estado

18.1 Um tanque de 20,0 L contém 0,225 kg de hélio a 18 °C. A massa molar do hélio é 4,0 g/mol. a) Quantos moles de hélio existem no tanque? b) Calcule a pressão no tanque em pascals e em atmosferas.

18.2 Um volume de 2,6 L de gás hélio, submetido a uma pressão de 1,3 atm e a uma temperatura de 41,0 °C é aquecido até que o volume e a temperatura fiquem iguais ao dobro dos valores iniciais. a) Qual é a temperatura final? b) Quantos gramas de hélio existem? A massa molar do hélio é 4,0 g/mol.

18.3 Um tanque cilíndrico possui um pistão bem ajustado que permite alterar o volume do cilindro. O tanque inicialmente contém 0,110 m^3 de ar a uma pressão de 3,4 atm. O pistão é lentamente puxado para fora até que o volume do gás aumenta para 0,390 m^3. Sabendo que a temperatura permaneceu constante, qual é a pressão final?

18.4 Um tanque de 3,0 L contém ar a uma pressão de 3,0 atm e 20 °C. O tanque é fechado e resfriado até atingir uma pressão igual a 1,0 atm. a) Qual é a temperatura final em graus Celsius? Suponha que o volume do tanque permaneça constante. b) Se a temperatura for mantida constante com o valor calculado na parte (a) e o gás for comprimido, qual seria seu volume quando a pressão voltasse para 3,0 atm?

18.5 a) Use a lei do gás ideal para estimar o número de moléculas de ar no seu laboratório de física, supondo que todo o ar seja composto por N_2. b) Calcule a densidade das partículas no laboratório (isto é, o número de moléculas por centímetro cúbico).

18.6 Você tem vários balões idênticos. Empolgado, você descobre que um balão irá estourar se o seu volume exceder 0,900 L. A pressão do gás dentro do balão é igual à pressão do ar (1,0 atm). a) Se o ar dentro do balão está à temperatura constante de 22 °C e se comporta como um gás ideal, qual a massa de ar que você pode soprar para dentro de um desses balões antes que ele estoure? b) Repita a parte (a) considerando que o gás é o hélio, em vez do ar.

18.7 Um automóvel Jaguar XK8 possui motor com 8 cilindros. No início do tempo da compressão, um dos cilindros contém 499 cm^3 de ar sob pressão de uma atmosfera ($1,01 \times 10^5$ Pa) e temperatura igual a 27 °C. No final do tempo de compressão, o ar foi reduzido até um volume igual a 46,2 cm^3 e a pressão manométrica cresceu para $2,72 \times 10^6$ Pa. Calcule a temperatura final.

18.8 Um soldador enche de oxigênio (massa molar = 32,0 g/mol) um tanque com volume de 0,0750 m^3 submetido a uma pressão de $3,0 \times 10^7$ Pa e temperatura igual a 37 °C. Há um pequeno vazamento no tanque e, após certo tempo, uma parte do oxigênio terá escapado. Em um dia em que a temperatura é 22 °C, a pressão manométrica é $1,80 \times 10^7$ Pa. Calcule a) a massa inicial do oxigênio, b) a massa do oxigênio que escapou.

18.9 Um grande tanque cilíndrico contém 0,750 m³ de gás nitrogênio a 27 °C e uma pressão de $1,50 \times 10^5$ Pa (pressão absoluta). O tanque possui um pistão bem ajustado que pode fazer o volume variar. Qual é o valor da pressão quando o volume diminui para 0,480 m^3 e a temperatura aumenta para 157 °C?

18.10 Um recipiente cilíndrico vazio de 1,50 m de comprimento e 0,90 cm de diâmetro deve ser cheio com oxigênio puro a 22 °C para abastecer uma estação espacial. Para armazenar a máxima quantidade possível de gás, a pressão absoluta do oxigênio deve ser 21,0 atm. A massa molar do oxigênio é 32,0 g/mol. a) Quantos moles de oxigênio cabem nesse recipiente? b) Se alguém for erguer esse recipiente, em quantos quilogramas esse gás aumenta a massa a ser erguida?

18.11 O gás no interior de um balão deve sempre permanecer com uma pressão aproximadamente igual à pressão atmosférica, porque essa é a pressão aplicada sobre o balão pelo ar do ambiente. Você enche o balão com hélio (um gás aproximadamente ideal) até um volume de 0,600 L a uma temperatura de 19 °C. Qual é o volume do balão quando você o resfria até o ponto de ebulição do nitrogênio (77,3 K)?

18.12 **Desvios da equação do gás ideal.** Para o gás dióxido de carbono (CO_2), as constantes na equação de van der Waals são $a = 0,364\ J \cdot m^3/mol^2$ e $b = 4,27 \times 10^{-5}\ m^3/mol$. a) Se um mol de CO_2 a 350 K está confinado em um volume de 400 cm^3, calcule a pressão do gás usando a equação do gás ideal e a equação de van der Waals. b) Qual equação fornece a menor pressão? Por quê? Qual é a diferença percentual entre o resultado da equação do gás ideal e a equação de van der Waals? c) O gás é mantido na mesma temperatura à medida que se expande até um volume de 4000 cm^3. Repita os cálculos da parte (a) e da parte (b). d) Explique como seus cál

culos mostram que a equação de van der Waals é equivalente à equação de gás ideal quando a/V for pequeno

18.13 O volume total dos pulmões de uma típica aluna de física é 6,0 L. Uma aluna de física enche seus pulmões com uma pressão absoluta de ,0 atm. A seguir, retendo a respiração, o volume dos pulmões é reduzido para 5,70 L. Qual é então a pressão do ar em seus pulmões? Suponha que a temperatura do ar permaneça constante

18.14 Um mergulhador observa uma bolha de ar ascendendo do fundo de um lago (onde a pressão absoluta é igual a 3,50 atm) até a superfície (onde a pressão é 1,0 atm). A temperatura no fundo do lago é 4 °C e a temperatura na superfície é 23 °C. a) Qual é a razão entre o volume da bolha quando ela atinge a superfície e o volume da bolha no fundo do lago? b) Será seguro para o mergulhador reter a respiração enquanto ele ascende do fundo do lago até a superfície? Justifique sua resposta

18.15 Um tanque metálico com volume de 3,10 L deve estourar quando a pressão absoluta do ar em seu interior superar 100 atm. a) Se 11,0 moles de um gás ideal forem colocados no tanque a uma temperatura de 23 °C, até que temperatura o tanque pode ser aquecido antes que ele se rompa? Despreze a dilatação térmica do tanque. b) Com base na resposta do item (a), verifique se é razoável desprezar a dilatação térmica do tanque. Explique

18.16 Três moles de um gás ideal estão em uma caixa cúbica e rígida, com lados medindo 0,200 m. a) Qual é a força que o gás exerce sobre cada um dos seis lados da caixa quando a temperatura do gás é 20 °C? b) Qual é a força quando a temperatura do gás sobe para 100 °C?

18.17 Sob as hipóteses do Exemplo 18.4 (Seção 18.1), em que altitude acima do nível do mar a pressão do ar é 90% da pressão ao nível do mar?

18.18 Sob as hipóteses do Exemplo 18.4 (Seção 18.1), compare, em termos percentuais, a diminuição da pressão do ar quando se vai do nível do mar para uma altitude de 100 m com a diminuição da pressão quando se vai do nível do mar para uma altitude de 1000 m. Se a sua resposta *não* for que a segunda pressão é dez vezes a primeira, explique por quê.

18.19 Sob as hipóteses do Exemplo 18.4 (Seção 18.1), compare a densidade do ar ao nível do mar com a densidade a uma altitude de 100 m acima do nível do mar.

18.20 Supondo (de modo irreal) que a temperatura do ar seja uniforme e igual a 0 °C (como no Exemplo 18.4), qual é a densidade do ar a uma altitude de 1,0 km? Forneça a resposta como uma porcentagem em relação à densidade na superfície.

18.21 A uma altitude de 11000 m (uma altura típica para as viagens de aviões a jato), a temperatura do ar é –56,5 °C e a densidade do ar é 0,364 kg/m³. Qual é a pressão da atmosfera nessa altitude? (Note que a temperatura nessa altitude não é a mesma que a da superfície da Terra, de modo que os cálculos indicados no Exemplo 18.4 (Seção 18.1) não se aplicam.)

Seção 18.2 Propriedades moleculares da matéria

18.22 Uma grande molécula orgânica tem uma massa de $1,41 \times 10^{-22}$ kg. Qual é a massa molar desse composto?

18.23 Suponha que você herde 3 moles de ouro do seu tio (um alquimista excêntrico) em uma época na qual esse metal está sendo vendido por 14,75 dólares por grama. Consulte a tabela periódica no Apêndice D e a Tabela 14.1. a) Com a maior aproximação possível, quanto vale esse ouro em dólares? b) Se o seu ouro está na forma de uma pepita esférica, qual é o seu diâmetro?

18.24 Uma bomba de vácuo moderna permite obter facilmente vácuo da ordem de 10^{-13} atm no laboratório. A uma pressão de $9,0 \times 10^{-14}$ atm e a uma temperatura comum de 300 K, quantas moléculas existem em um volume de 1,0 cm^3? b) Quantas moléculas haveria à mesma temperatura, mas a uma pressão de 1,0 atm?

18.25 A Nebulosa da Lagoa (Figura 18.28) é uma nuvem de gás hidrogênio situada a uma distância de 5000 anos-luz da Terra. O diâmetro dessa nuvem é aproximadamente 45 anos-luz, e ela brilha por causa de sua temperatura de 7500 K. (O gás é elevado a essa temperatura pela ação das estrelas que existem no interior da Nebulosa.) A nuvem é também muito fina: existem apenas 80 moléculas por centímetro cúbico. a) Calcule a pressão do gás (em atmosferas) na Nebulosa da Lagoa. Compare com a pressão de laboratório mencionada no Exercício 18.24. b) Os filmes de ficção científica algumas vezes mostram naves espaciais sofrendo turbulências quando voam através de nuvens de gases como a Nebulosa da Lagoa. Uma cena desse tipo poderia acontecer na realidade? Justifique sua resposta.

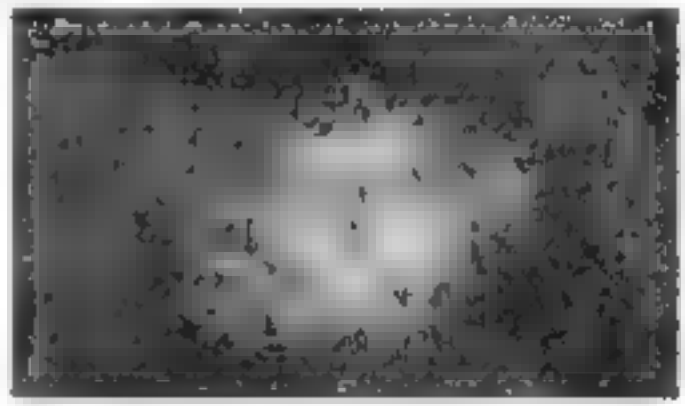


Figura 18.28 Exercício 18.25.

18.26 Em um gás mantido nas CNTP, qual é o comprimento da aresta de um cubo que contém um número de moléculas igual ao número de habitantes da Terra (aproximadamente 6×10^9)?

18.27 Quantos moles existem em 1,0 kg de água? Quantas moléculas? A massa molar da água é igual a 18,0 g/mol.

18.28 **Quão próximas umas das outras estão as moléculas de um gás?** Considere um gás ideal a 27 °C e 1,0 atm de pressão. Imagine que as moléculas sejam, na média, uniformemente espaçadas, cada molécula ocupando o centro de um pequeno cubo. a) Qual é o comprimento da aresta desse cubo, supondo que os cubos adjacentes se toquem, mas não se superponham? b) Como essa distância se compara ao diâmetro de uma molécula típica? c) Como essa separação se compara ao espaçamento dos átomos em sólidos, que costumam estar a 0,3 nm de distância uns dos outros?

18.29 Considere 5,0 mol de água líquida. a) Qual é o volume ocupado por essa quantidade de água? A massa molar da água é 18,0 g/mol. b) Imagine que todas as moléculas estejam, na média, uniformemente espaçadas e que cada molécula ocupe o centro de um pequeno cubo. Qual é o comprimento da aresta do pequeno cubo, sabendo que os cubos se tocam, mas não se superpõem? c) Como esse comprimento se compara com o diâmetro da molécula?

Seção 18.3 Modelo cinético-molecular de um gás ideal

18.30 Um frasco contém uma mistura dos gases neônio (Ne), criptônio (Kr) e radônio (Rn). Compare a) as energias cinéticas desses três tipos de átomos e b) as velocidades quadráticas médias. (*Sugestão:* a tabela periódica no Apêndice D mostra as massas molares (em g/mol) de cada elemento embaixo do símbolo químico de cada um deles.)

18.31 **Difusão gasosa do urânio.** a) Um processo chamado *difusão gasosa* é geralmente empregado para separar os isótopos do urânio, ou seja, átomos de elementos que possuem massas diferentes, tais como o ^{235}U e o ^{238}U. O único composto gasoso do urânio na temperatura ambiente é o hexafluoreto de urânio, UF_6. Imagine como separar moléculas do $^{235}UF_6$ e $^{238}UF_6$ usando difusão gasosa. b) As massas molares do $^{235}UF_6$ e $^{238}UF_6$ são, respectivamente, 0,349 kg/mol e 0,352 kg/mol. Se o hexafluoreto de urânio for um gás ideal, qual será a razão entre a velocidade quadrática média do $^{235}UF_6$ e a do $^{238}UF_6$, supondo uma temperatura uniforme?

18.32 Os conceitos de média e de valor quadrático médio podem ser aplicados a qualquer distribuição. Para uma turma com 150 alunos, foi obtida a seguinte distribuição de notas em uma prova valendo 100 pontos.

Nota	Número de alunos
10	11
20	12
30	24
40	15
50	19
60	10
70	12
80	20
90	17
100	10

a) Calcule o valor médio das notas da turma. b) Calcule o valor quadrático médio das notas da turma.

18.33 Temos duas caixas de mesmo tamanho, *A* e *B*. Cada caixa contém um gás que se comporta como um gás ideal. Inserimos um termômetro em cada uma das caixas e descobrimos que o gás na caixa *A* está a uma temperatura de 50 °C, enquanto o gás na caixa *B* está a 10 °C. Isso é tudo o que sabemos sobre os gases nas caixas. Quais das seguintes afirmativas *precisam* ser verdadeiras? Quais delas *podem* ser verdadeiras? a) A pressão em *A* é maior do que em *B*. b) Há mais moléculas em *A* do que em *B*. c) *A* e *B* não podem conter o mesmo tipo de gás. d) As moléculas em *A* possuem maior energia cinética média por molécula do que as de *B*. e) As moléculas em *A* estão se movendo mais rápido do que as de *B*. Explique o raciocínio por trás de suas respostas.

18.34 **CNTP.** As condições normais de temperatura e pressão (CNTP) são uma temperatura de 0 °C e uma pressão de 1,0 atm. a) Quantos litros um mol de qualquer gás ideal ocupa nas CNTP? b) Para uma cientista em Vênus, uma pressão absoluta de uma atmosfera venusiana é igual a 92 atmosferas terrestres. Obviamente, ela usará a atmosfera venusiana para definir as CNTP. Supondo que ela conserve o mesmo valor para a temperatura, quantos litros um mol de um gás ideal ocuparia em Vênus?

18.35 a) Um deutério, ^2H, é o núcleo de um isótopo do hidrogênio, e consiste em um próton e um nêutron. O plasma de deutérios em um reator de fusão nuclear precisa ser aquecido a cerca de 300 milhões de K. Qual é a velocidade quadrática média dos deutérios? Esse valor é uma fração significativa da velocidade da luz ($c = 3,0 \times 10^8$ m/s)? b) Qual seria a temperatura do plasma se os deutérios tivessem uma velocidade quadrática média igual a 0,10c?

18.36 **Clima em Marte.** A atmosfera de Marte é formada principalmente por CO_2 (massa molar igual a 44,0 g/mol) a uma pressão de 650 Pa, que suporemos constante. Em muitos lugares, a temperatura varia de 0 °C no verão a –100 °C no inverno. Ao longo do ano marciano, quais são os intervalos a) das velocidades quadráticas médias das moléculas, e b) da densidade (em mol/m³) da atmosfera?

18.37 a) A massa molar do oxigênio (O_2) é 32,0 g/mol. Qual é a energia cinética translacional média de uma molécula de oxigênio a uma temperatura de 300 K? b) Qual é o valor médio do quadrado de sua velocidade? c) Qual é sua velocidade quadrática média? d) Qual é o momento linear de uma molécula de oxigênio deslocando-se com essa velocidade? e) Suponha que a molécula de oxigênio deslocando-se com essa velocidade choque-se de um lado para o outro entre as paredes opostas de um recipiente cúbico com aresta de 0,10 m. Qual é a força média exercida pelo gás sobre uma das paredes do recipiente? (Suponha que a velocidade da molécula seja ortogonal aos lados com os quais ela colide.) f) Qual é a força média por unidade de área? g) Quantas moléculas de oxigênio deslocando-se com essa velocidade seriam necessárias para produzir uma pressão média de 1 atm? h) Calcule o número de moléculas de oxigênio que realmente estão contidas em um recipiente desse tamanho a 300 K e com pressão de uma atmosfera. i) A sua resposta do item (h) deve ser maior ou menor do que sua resposta do item (g)? Qual é a origem dessa discrepância?

18.38 Calcule o livre caminho médio das moléculas de ar para uma pressão de $3,50 \times 10^{-11}$ atm e uma temperatura de 300 K. (Essa pressão pode ser obtida facilmente no laboratório; veja o Exercício 18.24.) Como no Exemplo 18.8, considere as moléculas de ar esferas com raio de $2,0 \times 10^{-10}$ m.

18.39 Em que temperatura a velocidade quadrática média das moléculas do nitrogênio é igual à velocidade quadrática média das moléculas do hidrogênio a 20 °C? (*Sugestão:* a tabela periódica do Apêndice D fornece a massa molar (em g/mol) embaixo do símbolo químico do respectivo elemento. A massa molar do H é o dobro da massa molar do átomo de hidrogênio. Para o N_2, o cálculo é semelhante.)

18.40 As partículas de fumaça existentes no ar costumam ter massa da ordem de 10^{-16} kg. O movimento browniano (um movimento rápido e irregular) dessas partículas, que decorre de colisões com moléculas de ar, pode ser observado com um microscópio. a) Calcule a velocidade quadrática média do movimento browniano de uma partícula com massa igual a $3,0 \times 10^{-16}$ kg no ar a uma temperatura de 300 K. b) A velocidade quadrática média seria diferente se a partícula fosse uma molécula do gás hidrogênio com a mesma temperatura? Explique.

Seção 18.4 Calor específico

18.41 a) Qual é o calor necessário para fazer a temperatura de 2,50 moles de um gás ideal diatômico aumentar de 30 K nas vizinhanças da temperatura ambiente se o gás for mantido com um volume constante? b) Qual seria a resposta do item (a) se o gás fosse monoatômico e não diatômico?

18.42 Recipientes totalmente rígidos contêm n moles de gás ideal, sendo um o hidrogênio (H_2) e outro o neônio (Ne). Se são necessários 100 J de calor para aumentar a temperatura do hidrogênio em 2,50 °C, em quantos graus essa mesma quantidade de calor elevará a temperatura do neônio?

18.43 a) Calcule o calor específico a volume constante do gás nitrogênio (N_2) e compare com o calor específico da água líquida. A massa molar do N_2 é 28,0 g/mol. b) Você aquece 1,0 kg de água a volume constante de 1,0 L de 20 °C até 30 °C em uma chaleira. Usando-se a mesma quantidade de calor, quantos quilogramas de ar a 20 °C você poderia aquecer de 20 °C até 30 °C? Que volume (em litros) esse ar ocuparia a 20 °C e a uma pressão de 1,0 atm?

Suponha, de modo simplificado, que o ar seja totalmente constituído por N_2.

18.44 a) Calcule o calor específico a volume constante do vapor d'água, supondo uma molécula triatômica linear com três graus de liberdade de translação e três graus de liberdade de rotação, e que o movimento de vibração não contribua. A massa molar da água é 18,0 g/mol. b) O calor específico real do vapor d'água em pressões baixas é 2000 J/kg · K. Compare esse valor com sua resposta e comente a respeito do papel real desempenhado pelo movimento vibratório.

18.45 a) Use a Equação 18.28 para calcular o calor específico a volume constante do alumínio em unidades J/kg · K. Consulte a tabela periódica no Apêndice D. b) Compare a resposta à parte (a) com o valor fornecido na Tabela 17.3. Tente explicar qualquer discrepância entre esses dois valores.

*Seção 18.5 Velocidades moleculares

*18.46 Para um gás de moléculas de nitrogênio (N_2), qual deve ser a temperatura se 94,7% de todas as moléculas possuem velocidades moleculares menores que a) 1500 m/s, b) 1000 m/s, c) 500 m/s? Use a Tabela 18.2. A massa molar do N_2 é 28,0 g/mol.

*18.47 Deduza a Equação (18.33) a partir da Equação (18.32).

*18.48 Prove que $f(v)$ dada pela Equação (18.33) assume seu valor máximo quando $v = \sqrt{2kT/m}$. Use esse resultado para obter a Equação (18.34).

*18.49 A massa molar do gás diatômico dióxido de carbono (CO_2) é 44,0 g/mol quando a temperatura $T = 300$ K. Calcule a) velocidade mais provável v_{mp}, b) a velocidade média $v_{méd}$ e c) a velocidade quadrática média $v_{q\text{-}méd}$ desse gás.

Seção 18.6 Fases da matéria

18.50 Os cúmulos são nuvens formadas por gotículas de água em altitudes baixas da atmosfera. Os cirros são nuvens constituídas por pequenos cristais de gelo e se formam somente em altitudes elevadas. Calcule a altitude y (em relação ao nível do mar) acima da qual somente os cirros podem ocorrer. Em um dia típico e em altitudes abaixo de 11 km, a variação da temperatura em uma altitude y é dada por $T = T_0 - \alpha y$, onde $T_0 = 15$ °C e $\alpha = 6$ °C / 1000 m.

18.51 A água sólida (gelo) é lentamente aquecida a partir de uma temperatura muito baixa. a) Qual é a pressão mínima P_1 que deve ser aplicada para se observar uma transição de fase de liquefação? Descreva a seqüência das transições de fase que ocorrem se a pressão aplicada P for tal que $P < P_1$. b) Acima de certa pressão máxima P_2, não se observa nenhuma transição com ebulição. Qual é essa pressão? Descreva a seqüência das transições de fase que ocorrem para $P_1 < P < P_2$.

18.52 Um físico coloca uma pedra de gelo a 0 °C em um recipiente com água a 0 °C no interior de uma caixa de vidro e fecha a tampa. A seguir, todo o ar é retirado do interior da caixa. Se o gelo, a água e o recipiente são todos mantidos à temperatura de 0 °C, descreva o estado de equilíbrio final da caixa.

18.53 A atmosfera do planeta Marte é constituída por 95,3% de dióxido de carbono (CO_2) e cerca de 0,03% de vapor d'água. A pressão atmosférica é de apenas 600 Pa, e a temperatura da superfície do planeta varia de −30 °C até −100 °C. As camadas de gelo polares contêm gelo de CO_2 e gelo de água. Poderia existir CO_2 *líquido* sobre a superfície de Marte? Poderia existir água líquida? Justifique sua resposta.

Problemas

18.54 a) Use a Equação (18.1) para estimar a variação de volume de uma esfera de aço sólida com volume de 11 L quando a temperatura e a pressão crescem de 21 °C e $1,013 \times 10^5$ Pa até 42 °C e $2,10 \times 10^8$ Pa. (*Sugestão*: consulte os Capítulos 11 e 17 para calcular os valores de β e k.) b) No Exemplo 18.3, desprezamos a variação de volume de um tanque de aço de 11 L submerso. Essa aproximação foi boa? Explique.

18.55 Um cilindro com 1,0 m de altura e diâmetro interno de 0,120 m armazena propano (massa molar igual a 44,1 g/mol) para ser usado em um churrasco. O cilindro é inicialmente cheio de gás até que a pressão manométrica seja de $1,30 \times 10^6$ Pa e a temperatura seja igual a 22 °C. A temperatura do gás permanece constante à medida que ele é parcialmente retirado do tanque, até que a pressão manométrica final seja igual a $2,50 \times 10^5$ Pa. Calcule a massa do propano que foi consumido.

18.56 Durante a realização de um teste em 1939, antes de ser aceito pela Marinha dos Estados Unidos, o submarino *Squalus* afundou onde a profundidade das águas era 73,0 m. A temperatura na superfície era 27 °C, e no fundo era 7 °C. A densidade da água do mar é 1030 kg/m³. a) Um sino de mergulho foi usado para o resgate dos 33 tripulantes presos no interior do *Squalus*. O sino de mergulho possuía a forma de um cilindro com 2,30 m de altura, aberto em sua extremidade inferior e fechado no topo. Quando o sino de mergulho chegou ao fundo do mar, até que altura a água do mar subiu no interior do sino de mergulho? (*Sugestão*: você pode desprezar a relativamente pequena variação de pressão da água entre o fundo do mar e a superfície da água no interior do sino de mergulho.) b) Qual foi a pressão manométrica do ar comprimido fornecido ao sino de mergulho para expelir completamente a água do seu interior?

18.57 **Atmosfera de Titã.** Titã, o maior satélite de Saturno, possui uma atmosfera densa de nitrogênio. Em sua superfície, a pressão é igual a 1,5 atmosfera terrestre, e a temperatura é 94 K. a) Qual é a temperatura na superfície em graus Celsius? b) Calcule a densidade da superfície na atmosfera de Titã em moléculas por metro cúbico. c) Compare a densidade na atmosfera da superfície de Titã com a densidade da atmosfera terrestre a 22 °C. Qual dos planetas possui uma atmosfera mais densa?

18.58 **Pressão em Vênus.** Na superfície de Vênus, a temperatura média é 460 °C, devido ao efeito estufa (aquecimento global!), a pressão é 92 atmosferas terrestres e a aceleração da gravidade é $0,894 g_{Terra}$. A atmosfera é quase toda formada por CO_2 (massa molar igual a 44,0 g/mol) e a temperatura permanece notavelmente constante. Vamos supor que a temperatura não mude com a altitude. a) Qual é a pressão atmosférica a 1,0 km acima da superfície de Vênus? Expresse a sua resposta em atmosferas venusianas e atmosferas terrestres. b) Qual é a velocidade quadrática média das moléculas na superfície de Vênus e a uma altitude de 1,0 km?

18.59 O volume do pneu de um automóvel é 0,0150 m³ em um dia frio, quando a temperatura do ar no interior do pneu é 5 °C e a pressão atmosférica é 1,02 atm. Nessas condições, verifica-se que a pressão manométrica do pneu é 1,70 atm. Depois de o carro andar por uma estrada durante 30 min, a temperatura do ar nos pneus sobe para 45 °C e o volume passa a ser 0,0159 m³. Qual é a nova pressão manométrica do pneu?

18.60 Um frasco com volume de 1,50 L, equipado com uma válvula, contém o gás etano (C_2H_6) a 300 K e à pressão atmosférica ($1,03 \times 10^5$ Pa). A massa molar do etano é 30,1 g/mol. O sistema é aquecido até uma temperatura de 380 K, mantendo-se a válvula aberta.

A seguir a válvula é fechada, e o frasco é resfriado até atingir a temperatura inicial. a) Qual é a pressão final do etano no frasco? b) Qual é a quantidade de etano, em gramas, que permanece no frasco?

18.61 Um balão cujo volume é 750 m^3 deve ser cheio com hidrogênio na pressão atmosférica ($1,03 \times 10^5$ Pa). a) Sabendo que o hidrogênio é armazenado em cilindros sob pressão manométrica de $1,20 \times 10^7$ Pa e volume de 1,90 m^3, quantos cilindros são necessários? Suponha que a temperatura do hidrogênio permaneça constante. b) Qual é o peso total (além do peso do gás) que o balão pode suportar se o ar circundante e o gás do balão estão à mesma temperatura de 15 °C? A massa molar do hidrogênio (H_2) é 2,02 g/mol. A densidade do ar para uma atmosfera e 15 °C é igual a 1,23 kg/m^3. Veja a definição de força de empuxo no Capítulo 14. c) Qual seria o peso que o balão poderia suportar se fosse cheio com hélio (cuja massa molar é 4,0 g/mol) em vez de hidrogênio, ainda considerando a temperatura de 15 °C?

18.62 Um tanque cilíndrico vertical contém 1,80 mol de um gás ideal a uma pressão de 1,0 atmosfera a 20° C. A parte redonda do tanque tem um raio de 10,0 cm, e o gás está sustentando um pistão que pode se deslocar para cima e para baixo no cilindro sem atrito. a) Qual é a massa desse pistão? b) Qual é a altura da coluna de gás que sustenta o pistão?

18.63 Um tubo está conectado a um grande tanque de água, conforme mostra a Figura 18.29. O topo do tanque é vedado, e existe ar comprimido entre o topo e a superfície da água. Quando a altura da água h é 3,50 m, a pressão absoluta P do ar comprimido é $4,20 \times 10^5$ Pa. Suponha que o ar sobre a água se expanda com temperatura constante, e considere a pressão atmosférica igual a $1,0 \times 10^5$ Pa. a) Com que velocidade a água sai do tubo quando $h = 3,50$ m? b) À medida que a água escoa do tanque, h diminui. Calcule a velocidade de escoamento para $h = 3,0$ m e $h = 2,0$ m. c) Em que altura h o escoamento termina?

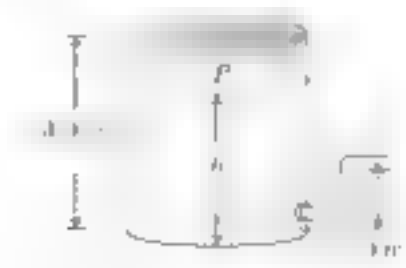


Figura 18.29 Problema 18.63

18.64 Durante uma hora, uma pessoa comum em repouso inala 0,50 L de oxigênio a cada respiração a uma pressão de 1,0 atm e uma temperatura de 20 °C. O gás aspirado possui 21% de oxigênio. a) Quantas moléculas de oxigênio essa pessoa inala a cada respiração? b) Suponha agora que essa pessoa esteja em repouso a uma altitude de 2000 m, mas que a temperatura continue igual a 20 °C. Supondo que as porcentagens e os volumes de oxigênio durante a inalação possuam os mesmos valores que os indicados na parte (a), quantas moléculas de oxigênio essa pessoa inala agora a cada respiração? c) Dado que, para manter suas funções, o corpo anda necessita do mesmo número de moléculas de oxigênio por segundo que as necessárias ao nível do mar, explique por que algumas pessoas têm dificuldade em respirar em tais altitudes.

18.65 **Quantos átomos há no seu corpo?** Estime o número de átomos existentes no corpo de um aluno de física com 50 kg. Note que o corpo humano é quase todo constituído por água, cuja massa molar é 18,0 g/mol, e que cada molécula de água contém três átomos.

18.66 O diâmetro de uma molécula de oxigênio é cerca de $2,0 \times 10^{-10}$ m. Estime qual deveria ser a pressão na qual o volume finito de moléculas produziria desvios mensuráveis do comportamento ideal na temperatura ambiente ($T = 300$ K).

18.67 Dentre dois recipientes idênticos, um contém o gás A e o outro, o gás B. As massas das moléculas desses gases são $m_A = 3,34 \times 10^{-27}$ kg e $m_B = 5,34 \times 10^{-26}$ kg. Ambos os gases estão à mesma pressão e a 10 °C. a) As moléculas de que gás (A ou B) têm maior energia cinética translacional por molécula e maior velocidade quadrática média? Agora você deseja elevar a temperatura de apenas um desses recipientes, de modo que ambos os gases tenham a mesma velocidade quadrática média. b) De qual gás você deve elevar a temperatura? c) Em que temperatura você irá atingir o seu objetivo? d) Uma vez que você tenha atingido seu objetivo, que moléculas (A ou B) têm agora maior energia cinética translacional média por molécula?

18.68 **Colisões de abelhas.** Uma caixa cúbica de 1,25 m de aresta contém 2500 abelhas zangadas, voando aleatoriamente com uma velocidade de 1,10 m/s. Podemos imaginar essas insetos como esferas de 1,50 cm de diâmetro. Em média, a) que distância percorre uma abelha típica entre colisões, b) qual é o tempo médio entre as colisões e c) quantas colisões por segundo sofre uma abelha?

18.69 **Aproximações sucessivas e a equação de van der Waals.** Na equação do gás ideal, o número de moles por volume n/V é simplesmente igual a P/RT. Na equação de van der Waals, obter n/V em termos de pressão P e da temperatura T não é tão simples. a) Mostre que a equação de van der Waals pode ser escrita na forma

$$\frac{n}{V} = \left(\frac{P + an^2/V^2}{RT}\right)\left(1 - \frac{bn}{V}\right)$$

b) Os parâmetros da equação de van der Waals para o sulfeto de hidrogênio gasoso (H_2S) são $a = 0,448$ J · m^3/mol^2 e $b = 4,29 \times 10^{-5}$ m^3/mol. Determine o número de moles por volume de H_2S a 127 °C e a uma pressão absoluta igual a $9,80 \times 10^5$ Pa com o seguinte procedimento: i) calcule uma primeira aproximação usando a equação do gás ideal, $n/V = P/RT$. ii) Substitua essa aproximação de n/V no membro direito da equação da parte (a). O resultado é uma nova e melhor aproximação para n/V. iii) Substitua essa nova aproximação de n/V no membro direito da equação da parte (a). O resultado é uma nova aproximação mais precisa para n/V. iv) Repita a etapa (iii) sucessivamente até atingir o nível de precisão desejado (neste caso, até atingir três algarismos significativos). c) Compare o resultado final obtido na parte (b) com o resultado P/RT usando a equação do gás ideal. Qual dos dois resultados fornece o melhor valor de n/V? Por quê?

18.70 **Gás em Europa.** Um recipiente de 1,20 mol de gás nitrogênio (28,0 g/mol) a 25 °C é deixado no satélite de Júpiter após o final de uma futura missão espacial. A atmosfera de Europa é desprezível, e a aceleração da gravidade em sua superfície é 1,30 m/s². Depois de algum tempo, um pequeno buraco se abre no recipiente, o que permite que moléculas escapem. Qual é a altura máxima (em km) acima da superfície de Europa em que uma molécula de N_2 com velocidade igual à velocidade quadrática média alcançará se ela for lançada para fora do buraco diretamente para cima? Despreze a variação de g devido à altitude.

18.71 Você enche um balão esférico até que ele tenha um diâmetro de 50,0 cm, a pressão absoluta dentro dele seja igual a 1,25 atm e a temperatura seja 22 °C. Considere que todo o gás em N_2 tenha massa molar igual a 28,0 g/mol. a) Encontre a massa de uma única molécula de N_2. b) Quanta energia cinética translacional possui uma molécula comum de N_2? c) Quantas moléculas de N_2 há nesse

balão? d) Qual é a energia cinética translacional *total* de todas as moléculas no balão?

18.72 a) Calcule o aumento da energia potencial gravitacional em uma molécula de nitrogênio (massa molar igual a 28,0 g/mol) para um aumento de altitude de 400 m nas vizinhanças da superfície terrestre. b) Em que temperatura esse aumento é igual à energia cinética média das moléculas de nitrogênio? c) Uma molécula de nitrogênio próxima do nível do mar, onde $T = 15$ °C, poderia ascender até uma altitude de 400 m? É provável que ela faça isso sem colidir com nenhuma outra molécula ao longo da trajetória? Explique.

18.73 O potencial de Lennard-Jones. Uma função energia potencial geralmente usada para descrever a interação entre duas moléculas (Figura 18.8) é o potencial de Lennard-Jones com expoentes 6 e 12,

$$U(r) = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right]$$

onde r é a distância entre os centros das moléculas e U_0 e R_0 são constantes positivas. A força correspondente $F(r)$ é dada pela Equação (13.26). a) Faça gráficos de $U(r)$ e $F(r)$ por r. b) Seja r_1 o valor de r para o qual $U(r) = 0$, e r_2 o valor de r para o qual $F(r) = 0$. Localize os pontos r_1 e r_2 nos seus gráficos. Qual desses valores representa a posição de equilíbrio entre as moléculas? c) Calcule os valores de r_1 e r_2 em termos de R_0 e obtenha a razão r_1/r_2. d) Se a distância entre as moléculas for igual a r_2 (calculada no item (c)), qual será o trabalho realizado para separá-las até uma distância $r \to \infty$?

18.74 a) Calcule a energia cinética translacional aleatória total de 5,0 L de hidrogênio gasoso (massa molar igual a 2,016 g/mol), com uma pressão de $1,01 \times 10^5$ Pa e a uma temperatura de 300 K. (*Sugestão:* use o processo do Problema 18.71 como modelo.) b) Se o tanque que contém o gás é colocado em um avião viajando a uma velocidade de 30,0 m/s, qual é a porcentagem de aumento da energia cinética *total* do gás? c) O fato de que a energia cinética das moléculas do gás é maior quando o gás está no avião significa que a temperatura aumentou? Explique.

18.75 A velocidade de propagação de uma onda sonora no ar a 27 °C é aproximadamente igual a 350 m/s. Mediante comparação, calcule a) v_{rms} das moléculas do nitrogênio; b) o valor quadrático médio de v_x nessa temperatura. A massa molar do nitrogênio (N_2) é igual a 28,0 g/mol.

18.76 **Hidrogênio no Sol.** A superfície do Sol possui temperatura igual a 5800 K, sendo quase toda constituída por átomos de hidrogênio. a) Calcule a velocidade quadrática média de um átomo de hidrogênio a essa temperatura. (A massa de um único átomo de hidrogênio é $1,67 \times 10^{-27}$ kg). b) A velocidade de escape para que uma partícula saia da zona de influência gravitacional do Sol é dada por $(2GM/R)^{1/2}$, onde M é a massa do Sol, R é o seu raio e G é a constante gravitacional (ver o Exemplo 12.5 da Seção 12.3). Use os dados do Apêndice F para calcular essa velocidade de escape. c) Uma quantidade apreciável de hidrogênio pode escapar da superfície do Sol? *Algum* hidrogênio pode escapar? Explique.

18.77 a) Mostre que um projétil de massa m pode "escapar" da superfície de um planeta quando ele for lançado verticalmente com uma energia cinética maior do que mgR_p, onde g é a gravidade na superfície do planeta e R_p é o raio do planeta. Despreze a resistência do ar. (Ver o Problema 18.76.) b) Caso o planeta considerado seja a Terra, em que temperatura a energia cinética translacional média da molécula de nitrogênio (massa molar = 28,0 g/mol) se torna igual à energia cinética necessária para escapar? E a molécula de hidrogênio (massa molar = 2,02 g/mol)? c) Repita o item (b) para a Lua, onde $g = 1,63$ m/s^2 e $R_p = 1740$ km. d) Enquanto a Terra e a Lua possuem temperaturas médias na superfície aproximadamente iguais, a Lua não possui atmosfera. Use os resultados dos itens (b) e (c) para explicar por quê.

18.78 **Atmosferas planetárias.** a) A temperatura nas vizinhanças do topo da camada multicolorida da atmosfera de Júpiter é igual a aproximadamente 140 K. A temperatura no topo da troposfera da Terra, a uma altitude aproximada de 20 km, é cerca de 220 K. Calcule a velocidade quadrática média das moléculas de hidrogênio nesses dois ambientes. Forneça suas respostas em m/s e como uma fração da velocidade de escape do respectivo planeta. (Ver o Problema 18.76.) b) O gás hidrogênio (H_2) é um elemento raro na atmosfera terrestre. Na atmosfera de Júpiter, em contraste, 89% de todas as moléculas são de H_2. Explique por quê, usando seu resultado do item (a). c) Suponha que um astronauta alienígena tenha descoberto uma atmosfera de oxigênio no asteróide Ceres. Qual é a probabilidade disso acontecer? Ceres possui massa igual a $0,0\,\ldots\,4$ vezes a massa da Lua, uma densidade de 2400 kg/m^3 e uma temperatura na superfície de aproximadamente 200 K.

18.79 a) Para qual massa de molécula ou partícula a v_{rms} é igual a 1,0 mm/s a 300 K? b) Se a partícula for um cristal de gelo, quantas moléculas ela contém? A massa molar da água é 18,0 g/mol. c) Calcule o diâmetro da partícula imaginando-a como uma pequena esfera de gelo. Essa partícula seria visível a olho nu?

18.80 Ao descrever o calor específico de um sólido na Seção 18.4, afirmamos que a energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ de um oscilador harmônico é igual à energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$, considerando valores médios calculados sobre um período. Prove esse resultado usando as equações (13.13) e (13.15) para a posição e a velocidade de um oscilador harmônico simples. Para simplificar, suponha que a posição inicial e a velocidade inicial sejam tais que o ângulo de fase ϕ seja igual a zero. (*Sugestão:* use as identidades trigonométricas $\cos^2(\theta) = [1 + \cos(2\theta)]/2$ e $\operatorname{sen}^2(\theta) = [1 - \cos(2\theta)]/2$. Qual é o valor médio de $\cos(2\omega t)$ em um período completo?)

18.81 É possível fazer um sólido cristalino que tenha uma espessura de apenas uma camada de átomos. Esse cristal "bidimensional" pode ser criado depositando-se átomos sobre uma superfície extremamente plana. a) Caso os átomos desse cristal bidimensional pudessem se mover apenas ao longo do plano do cristal, qual deveria ser o calor específico molar nas vizinhanças da temperatura ambiente? Forneça sua resposta como um múltiplo de R e em J/mol · K. b) Em temperaturas muito baixas, o calor específico molar de um cristal bidimensional seria maior do que o resultado obtido na parte (a), menor ou igual a ele? Explique por quê.

18.82 a) Calcule a energia cinética *rotacional* total das moléculas de 1,0 mol de um gás diatômico a 300 K. b) Calcule o momento de inércia de uma molécula de oxigênio (O_2) para a rotação em torno do eixo Oy ou do eixo Oz indicados na Figura 18.18. Considere as moléculas dos pontos com massa (representando os átomos de oxigênio) separados por uma distância igual a $1,21 \times 10^{-10}$ m. A massa molar dos *átomos* de oxigênio é 16,0 g/mol. c) Ache a velocidade angular quadrática média da molécula de oxigênio em torno do eixo Oy ou do eixo Oz indicados na Figura 18.15. Como sua resposta pode ser comparada com a velocidade angular de um motor rápido típico (10000 rev/min)?

18.83 Para cada gás poliatômico incluído na Tabela 18.1, calcule o valor do calor específico molar a volume constante, C_V, supondo que não haja contribuição da energia vibracional. Compare com os valores medidos mostrados na tabela e calcule a fração do calor

específico total devido à vibração para cada um dos três gases. (*Observação*: o CO_2 é linear, mas o SO_2 e o H_2S não são. Note que uma molécula poliatômica linear possui dois graus de liberdade de rotação, enquanto uma molécula não-linear possui três graus de liberdade de rotação.)

•18.84 a) Mostre que $\int_0^\infty f(v)\,dv = 1$, onde $f(v)$ é a distribuição de Maxwell-Boltzmann da Equação (18.32). b) Em termos da definição física de $f(v)$, explique por que a integral da parte (a) *precisa* ter esse valor.

•18.85 Calcule a integral da Equação (18.31), $\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv$, e compare o resultado com $(v^2)_{méd}$ como dada pela Equação (18.16). (*Sugestão*: você pode usar a integral fornecida em tabelas,

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

onde n é um número inteiro positivo e a é uma constante positiva.)

•18.86 Calcule a integral da Equação (18.30), $\int_0^\infty vf(v)\,dv$, e compare o resultado com $(v)_{méd}$ como dada na Equação (18.35). (*Sugestão*: faça a mudança de variáveis $v^2 = x$ e use a integral tabelada

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

onde n é um número inteiro positivo e a é uma constante positiva.)

18.87 a) Explique por que, em um gás com N moléculas, o número de moléculas que possuem velocidades no intervalo *finito* entre v e $v + \Delta v$ é dado por $\Delta N = N\int_v^{v+\Delta v} f(v)\,dv$. b) Se Δv for pequeno, então $f(v)$ é aproximadamente constante ao longo do intervalo e $\Delta N \approx Nf(v)\,\Delta v$. Para o gás oxigênio ($O_2$, massa molar = 32,0 g/mol) a $T = 300$ K, use essa aproximação para calcular o número de moléculas com velocidades no intervalo $\Delta v = 20$ m/s em torno de $v_{méd}$. Expresse sua resposta como um múltiplo de N. c) Repita a parte (b) considerando um intervalo em torno de $7v_{méd}$ com $\Delta v = 20$ m/s. d) Repita as partes (b) e (c) para uma temperatura igual a 600 K. e) Repita as partes (b) e (c) para uma temperatura igual a 150 K. f) O que os seus resultados informam sobre a forma da distribuição em função da temperatura? Suas conclusões estão de acordo com aquilo que é mostrado na Figura 18.26?

18.88 **Meteorologia.** A *pressão de vapor* é a pressão da fase vapor de uma substância que está em equilíbrio com a fase sólida ou líquida da substância. A *umidade relativa* é a pressão parcial do vapor d'água no ar dividida pela pressão de vapor da água na mesma temperatura, expressa como uma porcentagem. Dizemos que o ar está saturado quando a umidade relativa é 100%. a) A pressão de vapor da água a 20 °C é $2{,}34 \times 10^3$ Pa. Se a temperatura do ar for 20 °C e a umidade relativa for 60%, qual será a pressão parcial do vapor d'água na atmosfera (ou seja, a pressão que seria exercida pelo vapor d'água caso ele estivesse sozinho)? b) Nas condições do item (a), qual é a massa da água em 1,0 m^3 de ar? (A massa molar da água é 18,0 g/mol. Suponha que o vapor d'água possa ser considerado um gás ideal.)

18.89 **O ponto de orvalho.** A pressão de vapor da água (ver Problema 18.88) diminui à medida que a temperatura diminui. Caso o teor de vapor d'água no ar seja mantido constante à medida que o ar se resfria, atinge-se uma temperatura chamada de temperatura do *ponto de orvalho*, em que a pressão parcial se torna igual à pressão de vapor, e o vapor fica saturado. Caso o ar seja resfriado ainda mais, o vapor se condensa em líquido até que a nova pressão fique novamente igual à pressão de vapor naquela temperatura. A temperatura em uma sala é 30 °C. Um meteorologista resfria uma lata metálica enchendo-a gradualmente com água fria. Quando a temperatura da lata atinge o valor de 16 °C, pequenas gotas de água se formam em sua superfície externa. Qual é a umidade relativa do ar dessa sala com temperatura de 30 °C? A tabela seguinte fornece uma lista da pressão de vapor da água em diversas temperaturas.

Temperatura (°C)	Pressão de vapor (Pa)
10,0	$1{,}23 \times 10^3$
12,0	$1{,}40 \times 10^3$
14,0	$1{,}60 \times 10^3$
16,0	$1{,}81 \times 10^3$
18,0	$2{,}06 \times 10^3$
20,0	$2{,}34 \times 10^3$
22,0	$2{,}65 \times 10^3$
24,0	$2{,}99 \times 10^3$
26,0	$3{,}36 \times 10^3$
28,0	$3{,}78 \times 10^3$
30,0	$4{,}25 \times 10^3$

18.90 **Altitudes nas quais as nuvens se formam.** Em um dia de primavera no Rio de Janeiro, a temperatura do ar nas vizinhanças do solo é 28 °C. Cúmulos são nuvens que parecem flocos de algodão, formando-se em altitudes nas quais a temperatura do ar é igual à temperatura do ponto de orvalho (ver o Problema 18.89). Se a temperatura do ar diminui com a altitude a uma taxa de 0,6 °C/100 m, em que altura aproximada acima do solo os cúmulos se formam quando a umidade relativa no solo for a) 34%? b) 80%? (*Sugestão*: use a tabela do Problema 18.89.)

Problemas desafiadores

18.91 **Nebulosas escuras e o espaço interestelar.** A área escura na Figura 18.30, aparentemente desprovida de estrelas, denomina-se *nebulosa escura*, uma nuvem de gás frio no espaço interestelar que contém matéria suficiente para bloquear a luz proveniente de estrelas que estão atrás dessa região. Uma nebulosa escura típica possui um diâmetro da ordem de 20 anos-luz e contém cerca de 90 átomos de hidrogênio por centímetro cúbico (hidrogênio monoatômico e não H_2) a uma temperatura aproximadamente igual a 20 K. (Um ano-luz é a distância percorrida pela luz em um ano, sendo igual a $9{,}46 \times 10^{15}$ m.) a) Estime o livre caminho médio de um átomo de hidrogênio em uma nebulosa escura. O raio de um átomo de hidrogênio é da ordem de $5{,}0 \times 10^{-11}$ m. b) Estime a velocidade quadrática média de um átomo de hidrogênio e o tempo livre médio (o tempo médio entre duas colisões sucessivas de um dado átomo). Com base nesse resultado, você acha que as colisões atômicas, tais como aquelas que dão origem à formação da molécula H_2, são muito importantes para a determinação da composição da nebulosa? c) Estime a pressão no interior de uma nebulosa escura. d) Compare a velocidade quadrática média de um átomo de hidrogênio com a velocidade de escape da superfície da nebulosa (supondo que ela seja esférica). Se houvesse vácuo em torno da nebulosa, ela seria estável ou teria uma tendência a se vaporizar? e) A estabilidade de uma nebulosa escura é explicada pela presença de um *meio interestelar* (ISM), um gás rarefeito que permeia o espaço

interestelar no qual uma nebulosa escura está imersa. Mostre que uma nebulosa escura está em equilíbrio com o ISM quando o número de átomos por volume (N/V) e a temperatura (T) da nebulosa escura estão relacionados com os respectivos valores referentes ao ISM através da equação

$$\frac{(N/V)_{\text{nebulosa}}}{(N/V)_{\text{ISM}}} = \frac{T_{\text{ISM}}}{T_{\text{nebulosa}}}$$

f) Nas vizinhanças do Sol, o ISM contém cerca de 1 átomo de hidrogênio por 200 cm³. Estime a temperatura do ISM nas vizinhanças do Sol. Compare o resultado com a temperatura na superfície do Sol, igual a aproximadamente 5800 K. Uma espaçonave viajando através do meio interestelar poderia se queimar? Justifique sua resposta.

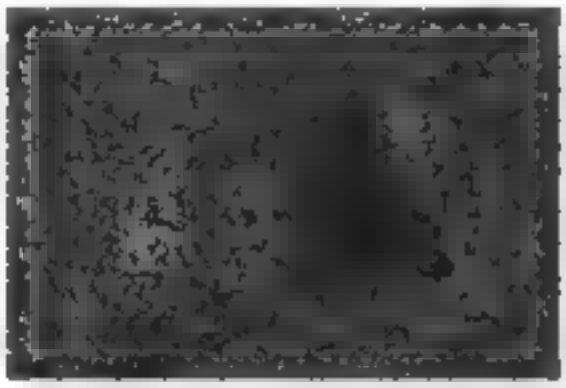


Figura 18.30 Problema desafiador 18.91.

18.92 **Atmosfera terrestre.** Na *troposfera*, a parte superior da atmosfera compreendida entre a superfície terrestre e uma altitude de 11 km, a temperatura não é uniforme, mas diminui com o aumento da altitude. a) Mostre que, se a variação de temperatura for aproximada pela expressão linear

$$T = T_0 - \alpha y$$

onde T_0 é a temperatura na superfície da Terra e T é a temperatura a uma altitude y, a pressão P a uma altitude y é dada por

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{Mg}{R\alpha}\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

onde P_0 é a pressão na superfície terrestre e M é a massa molar do ar. O coeficiente α é chamado de taxa de diminuição da temperatura. Essa taxa varia com as condições atmosféricas, mas um valor médio para ela seria de aproximadamente 0,6 K/100 m. b) Mostre que o resultado anterior se reduz ao obtido no Exemplo 18.4 (Seção 18.1) no limite quando $\alpha \to 0$. c) Supondo $\alpha = 0{,}6$ °C/100 m, calcule P para $y = 8863$ m e compare sua resposta com o resultado do Exemplo 18.4. Considere $T_0 = 288$ K e $P_0 = 1{,}0$ atm.

18.93 **Pontos críticos e equação de van der Waals.** a) Nos diagramas PV, a inclinação $\partial P/\partial V$ ao longo de uma isoterma nunca é positiva. Explique o porquê. b) As regiões em que $\partial P/\partial V = 0$ representam o equilíbrio entre duas fases: o volume pode variar sem que ocorra nenhuma variação de pressão, tal como no caso da ebulição da água na pressão atmosférica. Podemos usar esse dado para determinar a temperatura, a pressão e o volume por mol no ponto crítico, usando uma equação de estado $P = P(V, T, n)$. Se $T > T_c$, então $P(V)$ não apresenta nenhum máximo ao longo de uma isoterma; se, entretanto, $T < T_c$, então $P(V)$ apresenta um máximo. Explique como o que foi dito conduz à seguinte condição para determinar o ponto crítico:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0 \quad \text{no ponto crítico}$$

c) Explicite P da equação de van der Waals (Equação (18.7)). Ou seja, ache a equação $P = P(V, T, n)$. Ache $\partial P/\partial V$ e $\partial^2 P/\partial V^2$. Iguale a zero esses valores para obter duas equações envolvendo V, T e n. d) A solução do sistema de duas equações obtidas no item (c) fornece a temperatura e o volume por mol no ponto crítico, T_c e $(V/n)_c$. Ache essas constantes em termos de a e de b. (*Sugestão*: divida uma equação pela outra para eliminar T.) e) Substitua esses valores na equação de estado para determinar P_c, a pressão do ponto crítico. f) Use os resultados das partes (d) e (e) para achar a razão $RT_c/P_c(V/n)_c$. O resultado não deve conter a nem b e, portanto, deve ter sempre o mesmo valor para todos os gases. g) Calcule a razão $RT_c/P_c(V/n)_c$ para os gases H_2, N_2 e H_2O usando os dados dos pontos críticos fornecidos abaixo.

Gás	T_c (K)	P_c (Pa)	$(V/n)_c$ (m³/mol)
H_2	33,3	$13{,}0 \times 10^5$	$65{,}0 \times 10^{-6}$
N_2	126,2	$33{,}9 \times 10^5$	$90{,}1 \times 10^{-6}$
H_2O	647,4	$221{,}2 \times 10^5$	$56{,}0 \times 10^{-6}$

h) Compare a aproximação obtida no item (f) com base na previsão feita com a equação de van der Waals com os resultados da parte (g). O que você conclui sobre a precisão da equação de van der Waals na descrição do comportamento dos gases nas vizinhanças do ponto crítico?

18.94 *No Exemplo 18.7 (Seção 18.3), vimos que $v_{q,\text{méd}}$ era maior do que $v_{\text{méd}}$. Não é difícil mostrar que isso *sempre* ocorre. (A única exceção acontece quando todas as partículas possuem a mesma velocidade; nesse caso, $v_{q,\text{méd}} = v_{\text{méd}}$.) a) Para duas partículas com velocidades v_1 e v_2, mostre que $v_{q,\text{méd}} \geq v_{\text{méd}}$ independentemente dos valores numéricos de v_1 e v_2. A seguir, mostre que $v_{q,\text{méd}} > v_{\text{méd}}$ quando $v_1 \neq v_2$. b) Suponha que, em uma coleção de N partículas, você saiba que $v_{q,\text{méd}} > v_{\text{méd}}$. Outra partícula com velocidade u é adicionada à coleção de partículas. Se a nova velocidade quadrática média for designada por $v'_{q,\text{méd}}$ e $v'_{\text{méd}}$ designar a nova velocidade média, mostre que

$$v'^2_{q,\text{méd}} = \frac{N v^2_{q,\text{méd}} + u^2}{N+1} \quad \text{e} \quad v'_{\text{méd}} = \frac{N v_{\text{méd}} + u}{N+1}$$

c) Use as expressões da parte (b) para provar que $v'_{q,\text{méd}}$ é sempre maior que $v'_{\text{méd}}$, independentemente do valor numérico de u. d) Explique por que os resultados dos itens (a) e (c) juntos demonstram que $v_{q,\text{méd}}$ é sempre maior que $v_{\text{méd}}$ em qualquer conjunto de partículas, quando elas não possuem todas a mesma velocidade.

A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

19

A primeira lei da termodinâmica explica o funcionamento de uma locomotiva a vapor. A água é aquecida e ferve, e o vapor em expansão realiza o trabalho que impulsiona a locomotiva para a frente. Seria possível o vapor impulsionar a locomotiva realizando trabalho ao *condensar*?

Toda vez que você dirige um carro, liga um condicionador de ar ou usa um eletrodoméstico, você está usufruindo dos benefícios práticos da *termodinâmica*, o estudo das relações envolvendo calor, trabalho mecânico e outros aspectos da energia e da transferência de energia. Por exemplo, no motor de um carro, o calor é gerado pela reação química do oxigênio e da gasolina vaporizada nos cilindros do motor. O gás aquecido pressiona os pistões para dentro dos cilindros, realizando trabalho mecânico que é usado para impulsionar o carro. Essa transformação exemplifica um *processo termodinâmico*.

A primeira lei da termodinâmica, fundamental para entender tais processos, é uma extensão do princípio da conservação da energia. Ela amplia esse princípio para incluir trocas de energia tanto por transferência de calor quanto por realização de trabalho, e introduz o conceito de *energia interna* de um sistema. A conservação da energia desempenha um papel vital em todas as áreas das ciências físicas, e a utilidade da primeira lei da termodinâmica é bastante vasta. Para formular relações envolvendo energia com precisão é necessário introduzir o conceito de *sistema termodinâmico* e definir o *calor* e o *trabalho* como dois modos de transferir energia para o interior ou para o exterior desse sistema.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como representar a transferência de calor e o trabalho realizado em um processo termodinâmico.
- Como calcular o trabalho realizado por um sistema termodinâmico quando seu volume varia.
- O que significa caminho entre estados termodinâmicos.
- Como usar a primeira lei da termodinâmica para relacionar transferência de calor, trabalho realizado e variação da energia interna.
- Como distinguir entre processos adiabáticos, isocóricos, isobáricos e isotérmicos.
- Como sabemos que a energia interna de um gás ideal depende de sua temperatura.
- A diferença entre calores específicos a volume e à pressão constantes, e como usar essas grandezas em cálculos.
- Como analisar processos adiabáticos em um gás ideal.

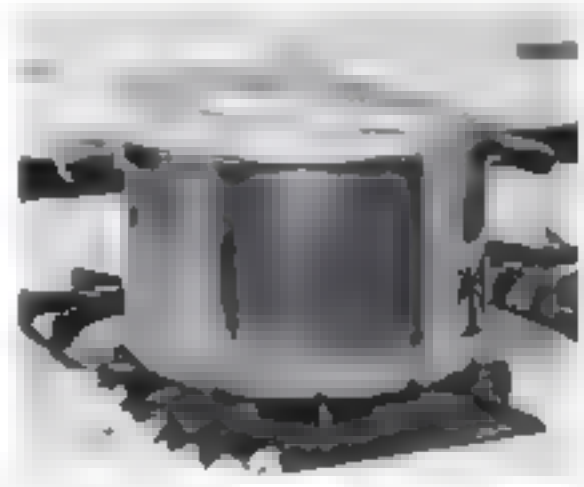


Figura 19.1 A pipoca na panela é um sistema termodinâmico. No processo termodinâmico mostrado aqui, o calor é fornecido ao sistema e a tampa da panela desloca-se em virtude do trabalho realizado pelo sistema sobre [illegible].

19.1 Sistemas termodinâmicos

Já estudamos transferências de energia envolvendo trabalho mecânico (Capítulo 6) e transferência de calor (Capítulos 17 e 18). Agora estamos preparados para combinar e generalizar esses princípios.

Falaremos sempre de uma energia transferida para dentro ou para fora de um *sistema*. O sistema pode ser um dispositivo mecânico, um organismo biológico ou uma dada quantidade de material, tal como o refrigerante em um condicionador de ar ou o vapor que se expande em uma turbina. Um **sistema termodinâmico** é qualquer coleção de objetos que é conveniente encarar como uma unidade, e que tem o potencial de trocar energia com o ambiente. Um exemplo familiar é o de quando se faz pipoca em uma panela com tampa. Quando a panela é colocada sobre a chama do fogão, ocorre transferência de calor por condução para o milho de pipoca; à medida que o milho começa a esquentar e se expandir, realiza um trabalho sobre a tampa da panela, que sofre um deslocamento (Figura 19.1). O *estado* do milho mudou nesse processo, uma vez que o volume, a temperatura e a pressão do milho variaram quando ele começou a estalar. Um processo como esse, no qual ocorrem variações no estado do sistema termodinâmico, denomina-se **processo termodinâmico**.

Na mecânica, usamos normalmente o conceito de *sistema* associado a diagramas de corpo livre e à conservação da energia e momento linear. Para os sistemas *termodinâmicos* e para todos os outros, é essencial definir exatamente logo no início o que pode e o que não pode ser incluído no sistema. Somente depois podemos descrever sem ambiguidade as transferências de energia para o interior ou para o exterior do sistema. Por exemplo, no processo de preparar a pipoca, definimos o sistema incluindo apenas o milho, mas não a panela, a tampa ou o fogão.

A termodinâmica está ligada a muitos problemas práticos além do estouro de pipocas (Figura 19.2). O motor de um automóvel e o motor a jato de um avião usam o calor de combustão dos respectivos combustíveis para impulsionar o veículo. O tecido muscular de um organismo vivo metaboliza a energia química proveniente de alimentos para realizar um trabalho mecânico sobre suas vizinhanças. Um motor a vapor ou uma turbina a vapor usam o calor de combustão do carvão ou de outro combustível para realizar um trabalho mecânico, tal como acionar um gerador elétrico ou impulsionar um trem.

Figura 19.2 (a) O motor de um foguete usa o calor da combustão de seu combustível para realizar trabalho impulsionando o veículo de lançamento. (b) Seres humanos e outros organismos biológicos são sistemas mais complexos do que os que podemos analisar detalhadamente neste livro, mas os mesmos princípios básicos da termodinâmica se aplicam a eles.

Sinais para o calor e o trabalho na termodinâmica

Descrevemos relações de energia em muitos processos termodinâmicos em termos da quantidade de calor Q fornecida *para* o sistema e do trabalho W realizado *pelo* sistema. Os valores de Q e de W podem ser positivos, negativos ou nulos (Figura 19.3). Um valor de Q positivo significa uma transferência de calor *para dentro* do sistema, com um correspondente fluxo de energia para o interior do sistema. Q negativo significa uma transferência de energia *para fora* do sistema. Um valor de W positivo significa um trabalho realizado *pelo* sistema sobre suas vizinhanças, tal como o trabalho realizado por um gás que se expande e, portanto, corresponde a uma transferência de energia *para fora* do sistema. Um valor de W negativo, tal como o trabalho realizado durante a compressão de um gás, significa um trabalho realizado *sobre o gás* pelas suas vizinhanças e, portanto, corresponde a uma transferência de energia *para dentro* do sistema. Usaremos consistentemente essas convenções neste capítulo e no capítulo seguinte.

ATENÇÃO Cuidado com o sinal do trabalho Observe que a convenção de sinais para o trabalho realizado é *oposta* à convenção adotada na mecânica, quando falávamos sempre de um trabalho realizado pela força que atua *sobre* um corpo. Na termodinâmica, geralmente é mais conveniente chamar de W o trabalho realizado *pelo* sistema, de modo que, quando um sistema se expande, a pressão, a variação de volume e o trabalho realizado são grandezas sempre positivas. Preste atenção e use a convenção de sinais do calor e do trabalho consistentemente!

Teste sua compreensão da Seção 19.1 No Exemplo 17.8 (Seção 17.6), qual é o sinal de Q para o café? E para a xícara de alumínio? Se um bloco desliza ao longo de uma superfície horizontal com atrito, qual é o sinal de W para o bloco? ❙

19.2 Trabalho realizado durante variações de volume

Um gás no interior de um cilindro com um pistão móvel é um exemplo simples de sistema termodinâmico. Um motor de combustão interna, um motor a vapor e os compressores

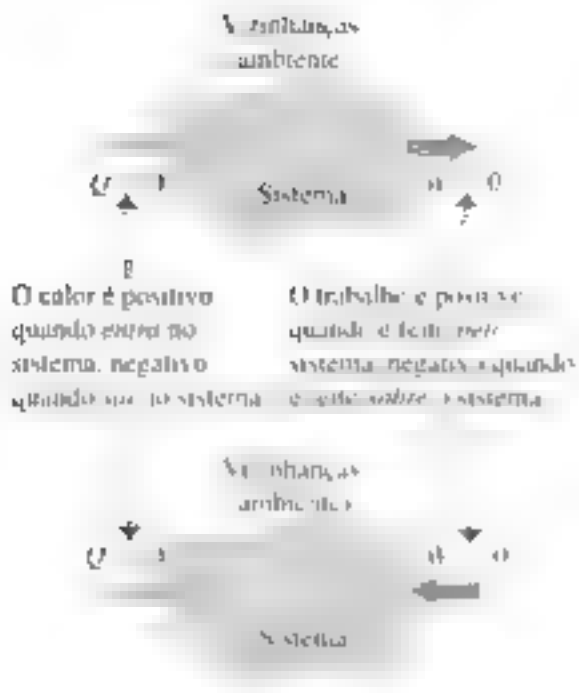


Figura 19.3 Um sistema termodinâmico pode trocar energia sob forma de calor, de trabalho ou de ambos com suas vizinhanças (ambiente). Observe as convenções de sinais para Q e W.

em condicionadores de ar e refrigeradores usam alguma versão desse sistema. Nas próximas seções, usaremos o sistema do gás no interior de um cilindro para estudar diversos processos envolvendo transformações de energia.

Utilizaremos um ponto de vista microscópico, com base na energia cinética e na energia potencial de cada molécula individual do sistema, para desenvolver a intuição sobre as grandezas termodinâmicas. Contudo, é importante entender que os princípios básicos da termodinâmica podem ser estudados de modo inteiramente *macroscópico*, sem fazer referência a nenhum modelo microscópico. Na realidade, o grande poder e o caráter geral da termodinâmica decorrem em parte do fato de que ela *não* depende dos detalhes da estrutura da matéria.

Vamos inicialmente considerar o *trabalho* realizado pelo sistema durante uma variação de volume. Quando um gás se expande, ele força suas fronteiras a se deslocarem para fora. Portanto, um gás que se expande sempre realiza um trabalho positivo. O mesmo resultado se aplica a qualquer material líquido ou sólido que se expande sob pressão, tal como a pipoca mostrada na Figura 19.1.

Podemos entender o trabalho realizado por um gás durante uma variação de volume considerando as moléculas que compõem o gás. Quando uma dessas moléculas colide com uma superfície fixa, ela exerce momentaneamente uma força sobre a superfície, mas não realiza trabalho, porque a superfície não se move. Porém, quando a superfície se move, como no caso de um pistão de um motor a gasolina, a molécula *realiza* um trabalho sobre a superfície durante a colisão. Se o pistão da Figura 19.4a se move para a direita, fazendo o volume total do gás aumentar, as moléculas que colidem com o pistão exercem uma força ao longo de uma certa distância e realizam um trabalho *positivo* sobre o pistão. Se o pistão da Figura 19.4b se move para a esquerda,

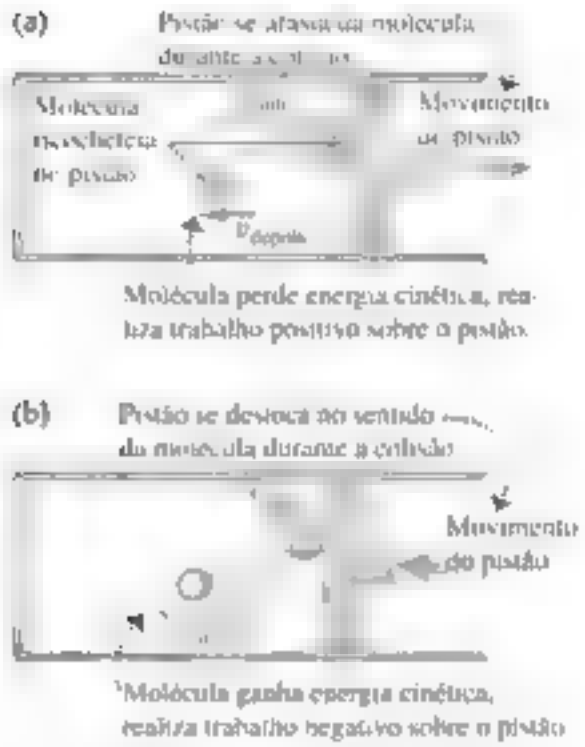


Figura 19.4 (a) Quando uma molécula colide com um pistão, ela (a) realiza trabalho positivo se o pistão estiver se afastando da molécula e (b) realiza trabalho negativo se o pistão estiver se movendo na direção da molécula. Logo, um gás realiza trabalho positivo quando se expande, como em (a), e negativo quando se comprime, como em (b).

então um trabalho positivo é realizado *sobre* as moléculas durante a colisão. Logo, as moléculas do gás realizam um trabalho *negativo* sobre o pistão.

A Figura 19.5 mostra um sólido ou um fluido em um cilindro com um pistão móvel. Suponha que a seção reta do cilindro possua área A e que a pressão exercida pelo sistema sobre a face do pistão seja igual a P. A força total F exercida pelo sistema sobre o pistão é dada por $F = PA$. Quando o pistão se move uma distância infinitesimal dx, o trabalho dW realizado por essa força é

$$dW = F\,dx = PA\,dx$$

Porém,

$$A\,dx = dV$$

onde dV é uma variação infinitesimal do volume do sistema. Logo, o trabalho realizado pelo sistema durante essa variação infinitesimal de volume é

$$dW = P\,dV \tag{19.1}$$

Para uma variação finita de volume desde V_1 até V_2, temos

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV \quad \begin{array}{l}\text{(trabalho realizado em uma}\\ \text{variação de volume)}\end{array} \tag{19.2}$$

Em geral, a pressão do sistema pode variar durante a variação do volume. Esse é o caso, por exemplo, dos cilindros de um motor de automóvel quando os pistões movem-se para a frente e para trás. Para calcular a integral na Equação (19.2), devemos saber como a pressão do sistema varia em função do volume. Podemos representar essa função por um gráfico de P em função de V (um diagrama

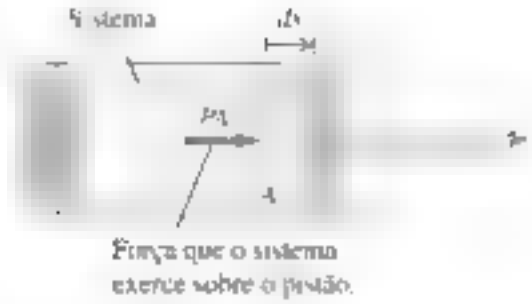


Figura 19.5 O trabalho infinitesimal realizado pelo sistema durante a pequena expansão dx é $dW = PA\,dx$.

PV, descrito no final da Seção 18.1). A Figura 19.6 mostra um exemplo simples. Nessa figura, a Equação (19.2) é representada graficamente pela *área* embaixo da curva de P em função de V entre os limites V_1 e V_2. (Na Seção 6.3 usamos uma interpretação semelhante para representar o trabalho realizado por uma força F como a área embaixo da curva de F em função de x entre os limites x_1 e x_2.)

De acordo com a regra estipulada na Seção 19.1, o trabalho é *positivo* quando o sistema se *expande*. Em uma expansão do estado 1 até o estado 2 na Figura 19.6a, a área embaixo da curva e o trabalho são positivos. Uma *compressão* de 1 até 2 na Figura 19.6b fornece uma área *negativa*; quando um sistema é comprimido, seu volume diminui e ele realiza um trabalho *negativo* sobre as vizinhanças (ver também a Figura 19.4b).

ATENÇÃO **Cuidado com os índices 1 e 2** Ao usar a Equação (19.2), lembre-se sempre de que V_1 é o volume *inicial*, e V_2 o volume *final*. É por isso que as legendas 1 e 2 estão invertidas na Figura 19.6b em comparação com a Figura 19.6a, mesmo que ambos os processos ocorram entre os mesmos dois estados termodinâmicos.

Se a pressão P permanece constante enquanto o volume varia entre os limites V_1 e V_2 (Figura 19.6c), o trabalho realizado pelo sistema é

$$W = P(V_2 - V_1)$$

(trabalho realizado em uma variação de volume sob pressão constante) (19.3)

Em qualquer processo no qual o volume permanece *constante*, o sistema não realiza trabalho porque não existe nenhum deslocamento.

Exemplo 19.1

EXPANSÃO ISOTÉRMICA DE UM GÁS IDEAL Um gás ideal sofre uma *expansão isotérmica* (temperatura constante) para uma temperatura T enquanto o volume varia entre os limites V_1 e V_2. Qual é o trabalho realizado pelo gás?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR a lei do gás ideal diz que, se a temperatura de um gás ideal permanece constante, a grandeza $PV = nRT$ também permanece constante. Se o volume V varia, a pressão P deve variar também. Logo, este problema refere-se ao trabalho realizado por um gás que varia de volume com a variação de pressão.

PREPARAR embora seja tentador, *não podemos* usar a Equação (19.3) para calcular o trabalho realizado, porque a temperatura e não a pressão, é que é constante. Em vez disso, precisamos usar a Equação (19.2). Para calcular a integral dessa equação, precisamos saber a pressão em função do volume; para isso, usamos a lei do gás ideal, Equação (18.3).

EXECUTAR conforme a Equação (19.2),

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

De acordo com a Equação (18.3), a pressão P de n moles de um gás ideal que ocupa um volume V a uma temperatura T é

$$P = \frac{nRT}{V}$$

onde R é a constante dos gases. Substituindo essa relação na integral e passando para fora da integral as constantes n, R e T e integrando, obtemos

$$W = nRT\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{(gás ideal, processo isotérmico)}$$

Além disso, T é constante,

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad \text{ou} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

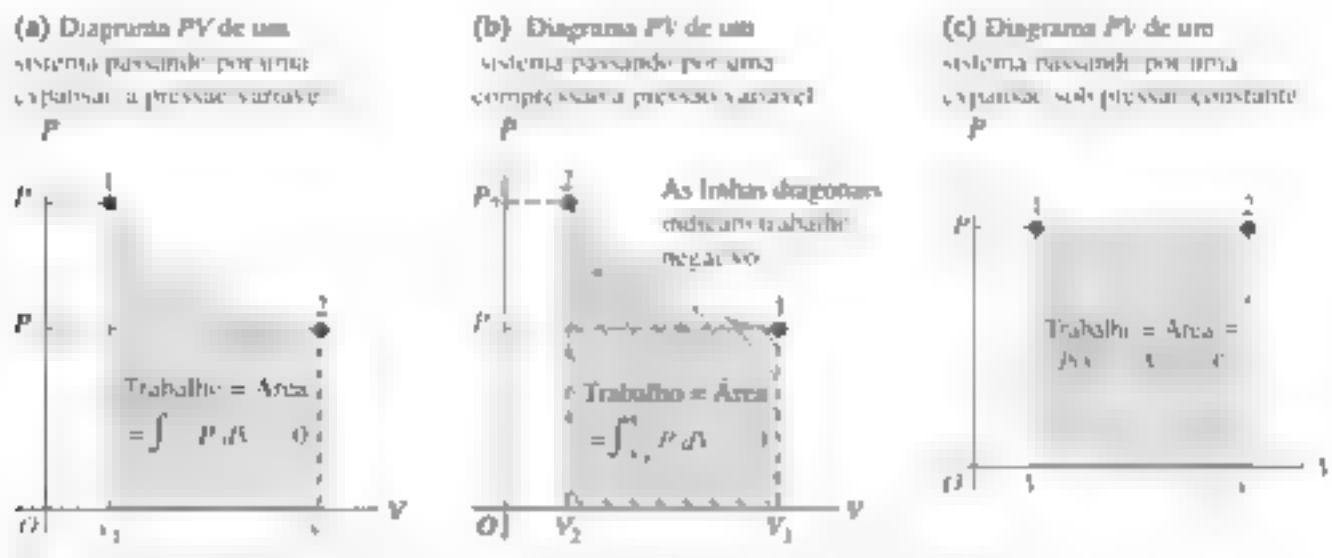

(a) Diagrama PV de um sistema passando por uma expansão a pressão variável
(b) Diagrama PV de um sistema passando por uma compressão a pressão variável
As linhas diagonais indicam trabalho negativo
(c) Diagrama PV de um sistema passando por uma expansão sob pressão constante
Trabalho = Área
Trabalho = Área
Trabalho = Área =

Figura 19.6 O trabalho realizado é dado pela área embaixo da curva em um diagrama PV.

logo, o trabalho realizado em um processo isotérmico pode ser expresso como

$$W = nRT \ln \frac{P_1}{P_2} \quad \text{(gás ideal, processo isotérmico)}$$

AVALIAR confirmamos nosso resultado notando que, em uma expansão, $V_2 > V_1$ e a razão V_2/V_1 é maior do que 1. O logaritmo de um número maior do que 1 é positivo, então $W > 0$, como deveria ser. Como uma verificação adicional, olhe para a nossa segunda expressão para W: em uma expansão isotérmica, o volume aumenta e a pressão diminui, logo $P_2 < P_1$, e a razão $P_1/P_2 > 1$ e $W = nRT \ln (P_1/P_2)$ é novamente positivo.

Esses resultados se aplicam também a uma *compressão* isotérmica de um gás em que $V_2 < V_1$ e $P_2 > P_1$.

Teste sua compreensão da Seção 19.2 Uma quantidade de gás ideal passa por uma expansão que aumenta seu volume de V_1 a $V_2 = 2V_1$. A pressão final do gás é P_2. O gás realiza mais trabalho sobre seu meio ambiente se a expansão ocorre a uma *pressão* constante ou a uma *temperatura* constante? (i) pressão constante; (ii) temperatura constante; (iii) a mesma quantidade de trabalho é realizada em ambos os casos; (iv) não há informações suficientes para decidir. ❚

19.3 Caminhos entre estados termodinâmicos

Vimos que, quando um processo termodinâmico envolve uma variação de volume, o sistema realiza trabalho sobre as vizinhanças (com um sinal que pode ser positivo ou negativo). No processo também pode ocorrer transferência de calor quando existe uma diferença de temperatura entre o sistema e as vizinhanças. Vamos agora examinar como o trabalho realizado e o calor trocado com o sistema durante um processo termodinâmico dependem dos detalhes da realização do referido processo.

Trabalho realizado em um processo termodinâmico

Quando um sistema termodinâmico varia de um estado inicial até um estado final, ele passa por uma série de estados intermediários. Chamamos essa série de estados de **caminho**. Existe sempre uma infinidade de estados intermediários possíveis. Quando todos eles forem estados de equilíbrio, o caminho pode ser representado com um diagrama PV (Figura 19.7a). O ponto 1 representa um estado inicial com pressão inicial P_1 e volume V_1, e o ponto 2 representa um estado final com pressão final P_2 e volume V_2. Para passar do estado 1 para o estado 2, poderíamos manter a pressão constante em P_1 enquanto o sistema se expande até o volume V_2 (ponto 3 na Figura 19.7b), e a seguir reduzir a pressão até P_2 (provavelmente fazendo a temperatura diminuir) mantendo o volume constante e igual a V_2 (ponto 2 no diagrama). O trabalho realizado pelo sistema durante esse processo é a área embaixo da linha $1 \rightarrow 3$; nenhum trabalho é realizado durante o processo a volume constante $3 \rightarrow 2$. Ou o sistema poderia seguir o caminho $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ (Figura 19.7c); nesse caso, o trabalho realizado é a área embaixo da linha $4 \rightarrow 2$, visto que nenhum trabalho é realizado durante o processo a volume constante $1 \rightarrow 4$. A linha contínua ligando o ponto 1 com o ponto 2 fornece outra possibilidade (Figura 19.7d), e o trabalho realizado nesse caminho é diferente dos trabalhos realizados nos caminhos anteriores.

Concluímos que *o trabalho realizado pelo sistema depende não somente dos estados inicial e final, mas também dos estados intermediários, ou seja, depende do caminho.* Além do mais, o sistema pode sofrer diversas transformações, seguindo um ciclo fechado, tal como no caminho $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Nesse caso, o estado final é idêntico ao estado inicial, porém, o trabalho total realizado nesse caminho fechado *não* é igual a zero. (Na realidade, esse trabalho realizado é dado pela área embaixo da curva fechada; você é capaz de demonstrar isso? Ver o Exercício 19.7.) Verifica-se que não faz sentido o físico falar em trabalho *contido* em um sistema. Em um estado particular, um sistema pode ter valores definidos para as coordenadas de estado P, V e T, porém, não se pode dizer que ele tem um valor definido para o trabalho W.

Calor fornecido em um processo termodinâmico

Analogamente ao caso do trabalho, o *calor* fornecido a um sistema termodinâmico quando ele passa de um estado a outro depende do caminho seguido para ir do estado inicial ao estado final. Vejamos um exemplo. Suponha que você deseje alterar o volume de um gás ideal de 2,0 L para 5,0 L, mantendo a temperatura $T = 300$ K constante. A Figura 19.8 mostra dois modos diferentes de se realizar essa alteração de volume. Na Figura 19.8a, o gás está contido em um cilindro com pistão, e tem um volume inicial igual a 2,0 L. Deixamos o gás se expandir lentamente, recebendo calor do aquecedor elétrico para manter a temperatura $T = 300$ K constante. Depois de deixá-lo expandir-se dessa forma lenta, controlada e isotérmica, o gás atinge seu volume final de 5,0 L, ele absorve uma quantidade definida de calor nesse processo.

A Figura 19.8b mostra um processo diferente que conduz ao mesmo estado final. O recipiente é circundado por paredes isolantes e dividido em compartimentos por uma divisória frágil que pode ser quebrada. O volume do compartimento inferior é 2,0 L, e o do compartimento superior é 3,0 L. No compartimento inferior colocamos a mesma quantidade do mesmo gás da Figura 19.8a, novamente com a temperatura $T = 300$ K. O estado inicial é o mesmo do caso anterior. Agora rompemos a divisória e o gás sofre uma expansão rápida e sem controle, mas nenhum calor é transferido através das paredes. O volume final é 5,0 L, o mesmo que o indicado na Figura 19.8a. O trabalho realizado pelo gás nessa expansão é igual a zero porque ele não empurra nenhuma fronteira móvel. Essa expansão sem controle denomina-se **expansão livre**; vamos discuti-la com mais detalhes na Seção 19.6.

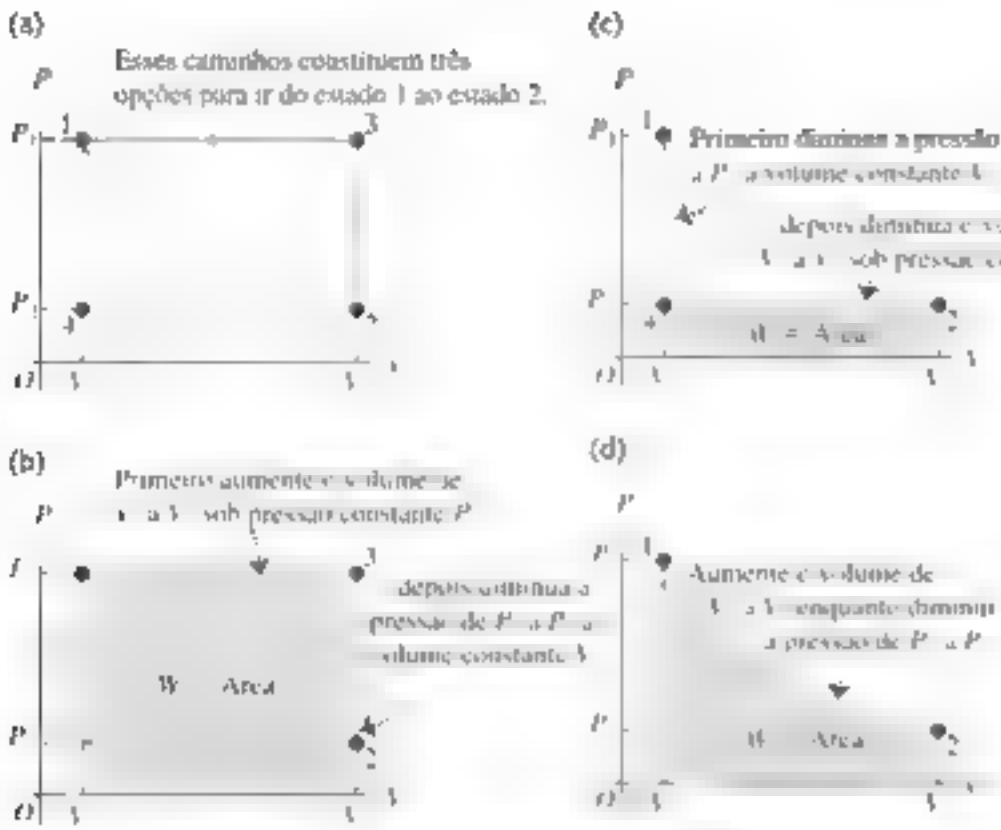

(a)
Estes caminhos constituem três opções para ir do estado 1 ao estado 2.
(b)
(c)
Primeiro diminua a pressão de P_1
(d)
Aumente o volume de
depois diminua a pressão de P_1 a P_2
volume constante V_2
W = Área

Figura 19.7 [illegible] estados depende do caminho escolhido.

As experiências mostram que, quando um gás ideal sofre uma expansão livre, não ocorre nenhuma variação de temperatura. Portanto, o estado final do gás é o mesmo que o indicado na Figura 19.8a. Os estados intermediários (pressões e volumes) durante a transição do estado 1 para o estado 2 são inteiramente diferentes nos dois casos; as figuras 19.8a e 19.8b mostram *dois caminhos diferentes* conectando os *mesmos estados* 1 e 2. No caminho apresentado na Figura 19.8b, *nenhum* calor é transferido para o interior do sistema, e o sistema não realiza trabalho. Analogamente ao caso do trabalho, o *calor depende não somente dos estados inicial e final, mas também do caminho.*

Devido a essa dependência do caminho, não devemos falar em calor 'contido' em um sistema. Para entender isso, vamos atribuir um valor arbitrário ao 'calor contido no sistema' em dado estado de referência. Então, o 'calor contido no sistema' em outro estado deveria ser igual ao valor considerado no estado de referência acrescido do calor fornecido ao sistema quando ele passa para o segundo estado. Isso levaria a uma ambigüidade, pois acabamos de mostrar que o calor transferido depende do *caminho*.

Somos forçados a concluir que a idéia de um 'calor contido no sistema' *não* é consistente; esse conceito não tem utilidade.

Embora não tenha sentido falar em 'trabalho contido em um corpo' ou 'calor contido em um corpo', *faz* sentido falar de uma *energia interna* contida em um corpo. Esse importante conceito será examinado na próxima seção.

Teste sua compreensão da Seção 19.3 O sistema descrito na Figura 19.7a passa por quatro processos termodinâmicos diferentes. Cada processo é representado em um diagrama *PV* como uma linha reta partindo do estado inicial e indo até o estado final.

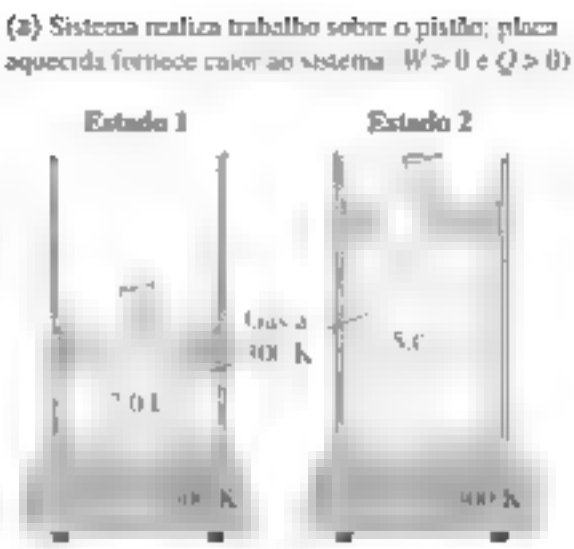

(a) Sistema realiza trabalho sobre o pistão; placa aquecida fornece calor ao sistema. $W > 0$ e $Q > 0$.
Estado 1
Estado 2
Gás a 300 K
5,0 L
300 K
(b) Sistema não realiza trabalho; nenhum calor entra ou sai do sistema. $W = 0$ e $Q = 0$.
Estado 1
Estado 2
Isolante
Vácuo
2,0 L
5,0 L
Gás a 300 K
Divisória frágil

Figura 19.8 (a) Expansão lenta e controlada de um gás desde um estado inicial 1 até um estado final 2 à mesma temperatura, mas a uma pressão menor. (b) Expansão rápida e sem controle do mesmo gás, começando no mesmo estado 1 e terminando no mesmo estado 2.

(Esses processos são diferentes daqueles mostrados nos diagramas *PV* da Figura 19.7.) Coloque os processos em ordem da quantidade de trabalho realizado pelo sistema, do mais positivo ao mais negativo. (i) $1 \rightarrow 2$; (ii) $2 \rightarrow 1$; (iii) $3 \rightarrow 4$; (iv) $4 \rightarrow 3$. ∎

19.4 Energia interna e primeira lei da termodinâmica

A **energia interna** é um dos conceitos mais importantes da termodinâmica. Na Seção 7.3, quando discutimos as variações de energia de um corpo deslizando com atrito, afirmamos que o aquecimento fazia aumentar sua energia interna e que o resfriamento do corpo fazia diminuir sua energia interna. Porém, o que *é* energia interna? Podemos encará-la de diversos modos; vamos começar discutindo uma idéia da mecânica. A matéria é constituída de átomos e moléculas, que são partículas que possuem energia cinética e energia potencial. Uma *tentativa* de definir a **energia interna** é simplesmente dizer que ela é a soma das energias cinéticas de todas as suas partículas constituintes acrescida da soma de todas as energias potenciais decorrentes das interações entre as partículas do sistema.

ATENÇÃO É interna? Note que a energia interna *não* inclui a energia potencial decorrente das interações entre o sistema e suas vizinhanças. Se o sistema for um copo com água, quando o colocarmos no alto de uma prateleira sua energia potencial gravitacional devida à interação com a Terra aumentará. Porém, isso não acarreta nenhuma mudança na energia potencial decorrente das interações entre as moléculas de água, de modo que a energia interna da água não varia.

Usaremos o símbolo U para a energia interna. (Usamos esse mesmo símbolo na mecânica para representar a energia potencial. Lembre-se de que na termodinâmica esse símbolo tem um significado diferente.) Durante a mudança de estado de um sistema, a energia interna pode variar de um valor inicial U_1 até um valor final U_2. A variação da energia interna é simbolizada por $\Delta U = U_2 - U_1$.

Sabemos que a troca de calor é uma transferência de energia. Quando fornecemos um calor Q a um sistema e ele não realiza nenhum trabalho durante o processo, a energia interna aumenta de um valor igual a Q, isto é, $\Delta U = Q$. Quando um sistema realiza um trabalho W de expansão contra suas vizinhanças e nenhum calor é fornecido ao sistema nesse processo, a energia deixa o sistema e sua energia interna diminui. Ou seja, quando W é positivo, ΔU é negativo, e vice-versa. Logo, $\Delta U = -W$. Quando ocorre uma transferência de calor *juntamente* com uma realização de trabalho, a variação *total* da energia interna é dada por

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q - W \quad \text{(primeira lei da termodinâmica)} \tag{19.4}$$

Podemos reagrupar a equação anterior na forma

$$Q = \Delta U + W \tag{19.5}$$

A equação (19.5) mostra que, em geral, quando um calor Q é fornecido a um sistema, uma parte da energia adicionada permanece dentro do sistema, fazendo sua energia interna variar de ΔU; a parte restante deixa o sistema novamente quando este realiza um trabalho W de expansão contra suas vizinhanças. Uma vez que W e Q são grandezas positivas, negativas ou nulas, a variação de energia interna ΔU pode ser positiva, negativa ou nula em processos diferentes (Figura 19.9).

A **primeira lei da termodinâmica** é descrita pela Equação (19.4) ou pela Equação (19.5). Ela é uma generalização do princípio da conservação da energia para incluir a transferência de energia sob forma de calor, assim como a realização de trabalho mecânico. Como você verá em capítulos posteriores, esse princípio pode ser estendido a cada vez mais classes de fenômenos identificando-se novas formas de energia e de transferência de energia. Em todas as novas situações nas quais se pensou que a energia total não se conservava, foi possível identificar outra forma de energia e mostrar que, ao incluir-se essa nova forma, a energia total *é* conservada. Existe energia associada a um campo elétrico, a um campo magnético e, de acordo com a teoria da relatividade, até mesmo à própria massa.

Entendendo a primeira lei da termodinâmica

No início desta discussão, tentamos definir a energia interna descrevendo-a em termos de energias cinéticas e de energias potenciais. Contudo, isso introduz algumas dificuldades. Na verdade, o *cálculo* da energia interna usando esse método seria complicado e impraticável. Além disso, essa definição não é *operacional*, porque ela não descreve como obter a energia interna a partir de grandezas físicas que podemos medir diretamente.

Sendo assim, é conveniente encarar a energia interna de outra maneira. Para começar, definiremos a *variação* da energia interna ΔU durante qualquer mudança de um sistema como a grandeza dada pela Equação (19.4), $\Delta U = Q - W$. Esta *é* uma definição operacional, porque podemos obter a energia interna a partir de grandezas físicas que podemos medir diretamente, Q e W. Esse procedimento não serve para determinar o valor próprio de U, apenas para calcular uma variação de energia interna ΔU. Isso não é um impedimento, porque podemos *definir* um valor específico da energia interna para um dado estado de referência e, a seguir, usar a Equação (19.4) para definir a energia interna em qualquer outro estado. Esse procedimento é análogo ao descrito no Capítulo 7, no qual definimos a energia potencial de um sistema mecânico como igual a zero em certo ponto.

Contudo, essa nova definição traz outra dificuldade. Se definirmos ΔU pela Equação (19.4), quando o sistema sofresse uma variação do estado 1 até o estado 2 seguindo dois caminhos diferentes, como poderíamos saber se ΔU é o mesmo para os dois caminhos? Já vimos que Q e W em

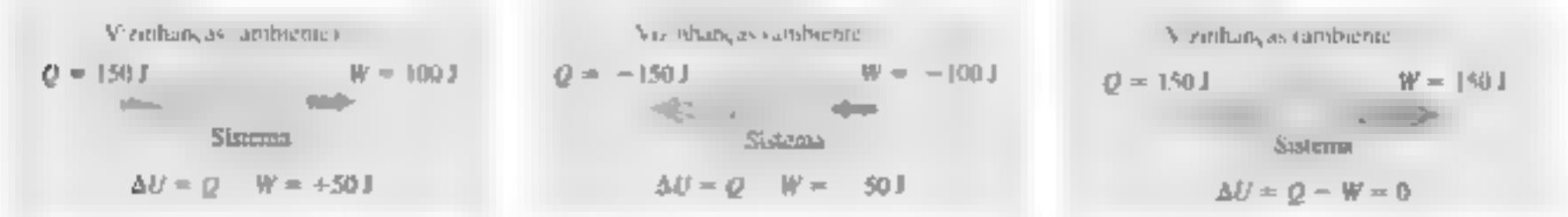

(a) O calor fornecido ao sistema é maior do que o trabalho realizado: a energia interna do sistema aumenta
Vizinhanças (ambiente)
Q = 150 J
W = 100 J
Sistema
ΔU = Q W = +50 J
(b) O calor transferido para fora do sistema é maior do que o trabalho realizado: a energia interna do sistema diminui
Vizinhanças (ambiente)
Q = −150 J
W = −100 J
Sistema
ΔU = Q W = 50 J
(c) O calor fornecido ao sistema é igual ao trabalho realizado: a energia interna do sistema permanece
Vizinhanças (ambiente)
Q = 150 J
W = 150 J
Sistema
ΔU = Q − W = 0

Figura 19.9 Em um processo termodinâmico a energia interna U de um sistema pode (a) aumentar ($\Delta U > 0$), (b) diminuir ($\Delta U < 0$) ou (c) permanecer constante ($\Delta U = 0$).

geral *não* são os mesmos para caminhos diferentes. Se ΔU, que é igual a $Q - W$, também dependesse do caminho, então o valor de ΔU seria ambíguo. Nesse caso, o conceito de energia interna de um sistema levaria ao mesmo conceito errado de calor de um sistema, conforme discutimos no final da Seção 19.3.

A única maneira de responder a essa pergunta é por meio da *experiência*. Para diversos materiais, medimos Q e W em várias mudanças de estado e ao longo de diversos caminhos para verificar se ΔU depende ou não do caminho. O resultado de tais investigações é claro e sem ambiguidades: embora Q e W dependam do caminho, $\Delta U = Q - W$ *é independente do caminho. A variação da energia interna de um sistema durante qualquer processo termodinâmico depende somente do estado inicial e do estado final do sistema, e não do caminho que conduz um estado ao outro.*

Sendo assim, é a experiência que justifica a nossa crença de que um sistema termodinâmico em dado estado possui um único valor de energia interna, que depende somente desse estado. Um enunciado equivalente consiste em dizer que a energia interna U de um sistema é uma função das coordenadas de estado P, V e T (basta dizer que é função de duas dessas variáveis, visto que elas estão relacionadas pela equação de estado).

A afirmativa de que a primeira lei da termodinâmica, dada pela Equação (19.4) ou pela Equação (19.5), representa a conservação da energia em um sistema termodinâmico é correta. Porém, um aspecto *adicional* da primeira lei da termodinâmica é a conclusão de que a energia interna depende somente do estado do sistema (Figura 19.10). Nas mudanças de estado de um sistema, a variação da energia interna não depende do caminho.

Todas essas questões podem parecer um pouco abstratas se você encarar a energia interna como a energia mecânica microscópica. Não existe nada de errado com esse ponto de vista, e o usaremos em diversas ocasiões durante nossas discussões. Contudo, objetivando uma definição *operacional* precisa, assim como o calor, a energia interna deve ser definida de modo independente dos detalhes microscópicos da estrutura do material.

Processos cíclicos e sistemas isolados

Vale a pena mencionarmos dois casos especiais da primeira lei da termodinâmica. Uma sucessão de etapas que, finalmente, fazem o sistema retornar ao seu estado inicial, denomina-se processo *cíclico*. Em tal processo, o estado inicial é idêntico ao estado final, e a variação *total* da energia interna deve ser igual a zero. Logo,

$$U_2 = U_1 \quad \text{e} \quad Q = W$$

Se um trabalho total W for realizado pelo sistema durante esse processo, uma igual quantidade de energia deve ser transferida para o interior do sistema sob forma de calor Q. Porém, nem Q, nem W são necessariamente iguais a zero (Figura 19.11).

Outro caso especial da primeira lei ocorre em um sistema *isolado*, aquele que não troca nem calor nem trabalho com suas vizinhanças. Em qualquer processo termodinâmico que ocorre em um sistema isolado,

$$W = Q = 0$$

e, portanto,

$$U_2 - U_1 = \Delta U = 0$$

Figura 19.10 A energia interna de uma xícara de café depende apenas do seu estado termodinâmico — quais são as quantidades de água e de pó de café existentes no sistema, e qual é sua temperatura. Ela não depende da história do modo como ele foi preparado — ou seja, da sequência termodinâmica que conduziu o sistema até o estado em que ele se encontra.

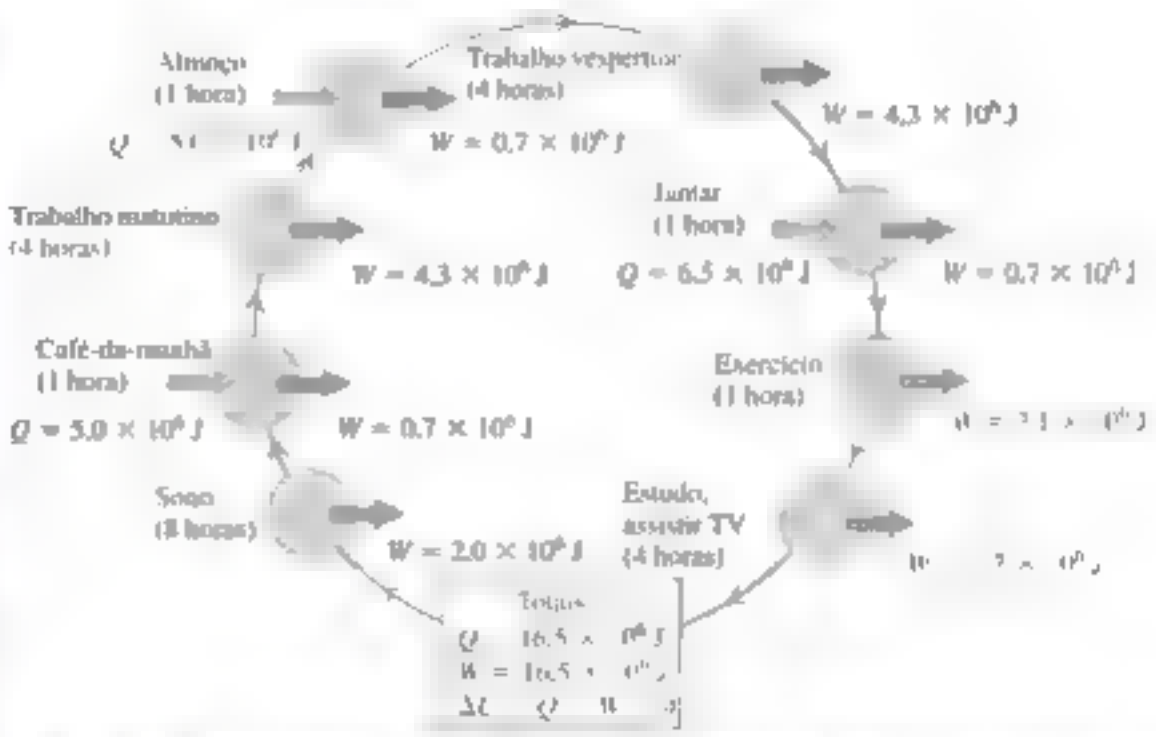


Figura 19.11 [illegible] sistema termodinâmico [illegible] um processo termodinâmico [illegible] independentemente dos detalhes [illegible] Caso você retorne [illegible] a variação total da energia interna é igual a zero.

Em outras palavras, *a energia interna de um sistema isolado permanece constante.*

PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* a primeira lei da termodinâmica é a afirmação da lei da conservação da energia em sua forma mais geral. Você pode aplicá-la a um sistema, com transferência de calor para dentro ou para fora e/ou com trabalho realizado por um sistema ou sobre ele.

PREPARAR *o problema por meio dos seguintes passos:*

1. Defina cuidadosamente qual é o sistema termodinâmico.
2. A primeira lei da termodinâmica trata de sistemas que passam por processos termodinâmicos. Alguns problemas envolvem processos com mais de uma etapa, então, não deixe de identificar os estados inicial e final de cada etapa.
3. Identifique as grandezas conhecidas e as incógnitas.
4. Veja se você tem equações suficientes. A primeira lei, $\Delta U = Q - W$, só pode ser aplicada uma vez a cada etapa em um processo termodinâmico, portanto, muitas vezes você precisará de outras equações. Dentre elas, destacam-se a Equação (19.2) para o trabalho realizado em uma variação de volume e a equação do estado do material que compõe o sistema termodinâmico (para um gás ideal, $PV = nRT$).

EXECUTAR *o problema da seguinte forma:*

1. Como de costume, é essencial conferir a compatibilidade das unidades. Quando P é dado em pascals e V em m^3, então W é expresso em joules. Caso sejam fornecidas outras unidades, você pode desejar converter as unidades de P em Pa e as de V em m^3. Quando o calor específico for dado em calorias, geralmente o procedimento mais simples é convertê-las em joules. Tome cuidado especialmente com moles. Quando você usa a expressão $n = m_{tot}/M$ para converter massa total em número de moles, lembre-se de que, quando m_{tot} é dada em quilogramas, M deve ser dada em *quilogramas* por mol. A unidade usual de M é *gramas* por mol. Preste atenção!
2. A variação da energia interna ΔU em qualquer processo termodinâmico ou em uma série de processos não depende do caminho, tanto para um gás ideal quanto para qualquer outro sistema. Essa questão é extremamente importante para a resolução dos problemas deste capítulo e do próximo. Algumas vezes você dispõe de dados iniciais e finais suficientes para calcular ΔU no caminho considerado. Uma vez que ΔU é sempre o mesmo para qualquer caminho entre os mesmos dois estados, você poderá relacionar as diversas grandezas energéticas relativas a outros caminhos.
3. Quando um processo termodinâmico consiste em uma série de etapas distintas, em geral é útil fazer um diagrama mostrando Q, W e ΔU em cada etapa. Use uma linha para cada etapa e coloque os valores de Q, W e ΔU em colunas. A seguir, você pode aplicar a primeira lei da termodinâmica a cada linha; além disso, você pode somar cada coluna e aplicar a primeira lei da termodinâmica às somas. Você saberia dizer por quê?

AVALIAR *a sua resposta:* verifique se os seus resultados fazem sentido. Em particular, assegure-se de que todas as suas respostas tenham o sinal algébrico adequado. Lembre-se de que Q positivo significa que o calor flui *para dentro* do sistema, e Q negativo significa que o calor flui *para fora* do sistema. W positivo significa que foi realizado trabalho *pelo* sistema sobre seu meio ambiente, enquanto W negativo significa que o trabalho foi realizado *sobre* o sistema pelo meio ambiente.

[illegible]

TRANSFORMANDO SUA SOBREMESA EM TRABALHO Você deseja comer um *sundae* com calda quente (coberto com creme) com um valor alimentício de 900 calorias e a seguir subir correndo vários lances de escada para transformar em energia a sobremesa ingerida. Até que altura você terá de subir? Suponha que sua massa seja 60 kg.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: comer um *sundae* com calda quente corresponde a uma transferência de calor para dentro do seu corpo, e subir escadas correndo implica a realização de trabalho. Podemos relacionar essas grandezas usando a primeira lei da termodinâmica.

PREPARAR: o sistema é formado pelo seu corpo. O problema informa que 900 calorias alimentares de calor são transferidas para dentro do seu corpo. O objetivo de subir correndo as escadas é garantir que o estado final do sistema seja o mesmo que o estado inicial (nem mais gordo, nem mais magro), então não há variação resultante na energia interna: $\Delta U = 0$. O trabalho que você precisa realizar para elevar a sua massa m a uma altura h é $W = mgh$, nossa incógnita é h.

EXECUTAR: usando a primeira lei da termodinâmica, $\Delta U = 0 = Q - W$, logo, $W = Q$. O trabalho que você realiza subindo correndo as escadas precisa ser igual ao calor fornecido pelo *sundae*. Como $W = mgh$, a altura a que você precisa subir é $h = W/mg$. Antes de substituir os valores na equação, converta as unidades: uma caloria alimentar é igual a 1 kcal = 1000 cal = 4190 J (com três algarismos significativos). Portanto,

$$Q = 900 \text{ kcal}\,(4190 \text{ J}/1 \text{ kcal}) = 3{,}77 \times 10^6 \text{ J}$$

E então,

$$h = \frac{Q}{mg} = \frac{3{,}77 \times 10^6 \text{ J}}{(60{,}0 \text{ kg})\,(9{,}80 \text{ m/s}^2)}$$

[illegible]

AVALIAR: boa sorte! Na solução deste exemplo imaginamos uma eficiência de 100% na conversão da energia proveniente do alimento em trabalho mecânico; essa aproximação não é realista. Em consequência, a verdadeira distância que você teria de subir é um pouco menor do que o resultado obtido. Discutiremos a questão da eficiência no próximo capítulo.

[illegible]

UM PROCESSO CÍCLICO A Figura 19.12 mostra um diagrama PV de um processo *cíclico*, em que o estado inicial é idêntico ao estado final. O processo tem início no ponto a do plano PV e percorre o ciclo no sentido anti-horário até o ponto b, a seguir retornando para o ponto a. O trabalho realizado é $W = -500$ J. a) Por que o trabalho realizado é negativo? b) Calcule a variação da energia interna e o calor trocado durante esse processo.

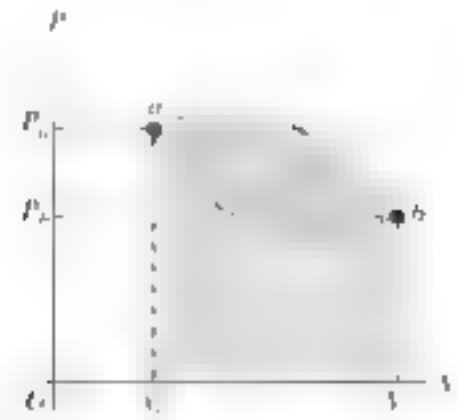


Figura 19.12 O trabalho total realizado pelo sistema no processo *abca* é igual a -500 J. Qual seria o trabalho caso o processo termodinâmico fosse realizado no sentido horário neste diagrama *PV*?

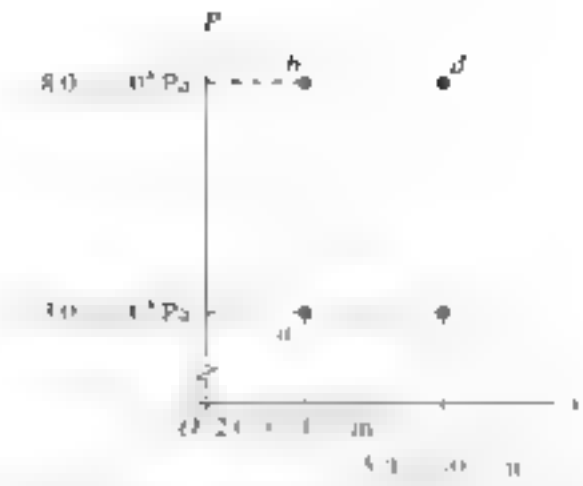


Figura 19.13 Um diagrama *PV* mostrando os diversos processos termo-

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. este problema nos pede para relacionar a variação na energia interna, o calor fornecido e o trabalho realizado no processo termodinâmico. Logo, podemos aplicar a primeira lei da termodinâmica.

PREPARAR. o processo termodinâmico apresenta duas etapas, a → b pela curva inferior na Figura 19.12 e b → a pela curva superior. Note, contudo, que as perguntas em (a) e (b) se referem ao processo cíclico *inteiro* $a \rightarrow b \rightarrow a$ (contornando a malha na Figura 19.12).

EXECUTAR. a) O trabalho realizado é igual à área embaixo da curva, considerando a área positiva quando o volume aumenta e negativa quando o volume diminui. A área sob a curva inferior de *a* até *b* é positiva, porém, ela é menor do que o módulo da área negativa sob a curva superior de *b* até *a*. Portanto, a área total (a área indicada com hachuras no interior da curva fechada) é negativa e o trabalho realizado é negativo. Em outras palavras, o trabalho realizado *sobre* o sistema é 900 J maior do que o trabalho realizado *pelo* sistema.

b) Neste e em qualquer outro processo cíclico (no qual o estado inicial é idêntico ao estado final), $\Delta U = 0$, logo, $Q = W = -500$ J. Ou seja, 900 J de calor são transferidos *para fora* do sistema.

AVALIAR. este exemplo ilustra um princípio geral sobre os diagramas *PV* de processos cíclicos: o trabalho total é positivo se o processo percorre o ciclo no sentido horário, e negativo se o processo percorre o ciclo no sentido anti-horário (como na Figura 19.12).

Exemplo 19.5

COMPARANDO PROCESSOS TERMODINÂMICOS. O diagrama *PV* da Figura 19.13 mostra uma série de processos termodinâmicos. No processo *ab*, 150 J de calor são fornecidos ao sistema, e no processo *bd*, 600 J de calor são fornecidos ao sistema. Calcule a) a variação da energia interna no processo *ab*; b) a variação da energia interna no processo *abd*; c) a variação da energia interna no processo *acd*.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. em cada processo, usamos $\Delta U = Q - W$ para calcular a grandeza pedida.

PREPARAR. sabemos que $Q_{ab} = +150$ J e $Q_{bd} = +600$ J (ambos os valores são positivos, porque o calor é *fornecido* ao sistema). Nossas incógnitas são (a) ΔU_{ab}, (b) ΔU_{abd} e (c) Q_{acd}.

EXECUTAR. a) Não ocorre nenhuma variação de volume durante o processo *ab*; logo, $W_{ab} = 0$ e $\Delta U_{ab} = Q_{ab} = 150$ J.

b) O processo *bd* ocorre sob pressão constante; logo, o trabalho realizado pelo sistema nesse processo de expansão é

$$\begin{aligned} W_{bd} &= P(V_2 - V_1) \\ &= (8.0 \times 10^4 \text{ Pa})(5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= 240 \text{ J} \end{aligned}$$

O trabalho total para o processo *abd* é

$$W_{abd} = W_{ab} + W_{bd} = 0 + 240 \text{ J} = 240 \text{ J}$$

e o calor total é

$$Q_{abd} = Q_{ab} + Q_{bd} = 150 \text{ J} + 600 \text{ J} = 750 \text{ J}$$

Aplicando a Equação (19.4) ao processo *abd*, encontramos

$$\Delta U_{abd} = Q_{abd} - W_{abd} = 750 \text{ J} - 240 \text{ J} = 510 \text{ J}$$

c) Como ΔU não depende do caminho, a variação da energia interna no processo *acd* é a mesma do processo *abd*; ou seja,

$$\Delta U_{acd} = \Delta U_{abd} = 510 \text{ J}$$

O trabalho total para o processo *acd* é

$$\begin{aligned} W_{acd} &= W_{ac} + W_{cd} = P(V_2 - V_1) + 0 \\ &= (3.0 \times 10^4 \text{ Pa})(5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= 90 \text{ J} \end{aligned}$$

Aplicando agora a Equação (19.5) ao processo *acd*,

$$Q_{acd} = \Delta U_{acd} + W_{acd} = 510 \text{ J} + 90 \text{ J} = 600 \text{ J}$$

A seguir apresentamos os resultados em uma tabela.

Etapa	Q	W	$\Delta U = Q - W$	Etapa	Q	W	$\Delta U = Q - W$
ab	150 J	0 J	150 J	*ac*	?	90 J	?
bd	600 J	240 J	360 J	*cd*	?	0 J	?
abd	750 J	240 J	510 J	*acd*	600 J	90 J	510 J

AVALIAR. observe que, embora ΔU seja a mesma (510 J) tanto no processo *acd* quanto no processo *abd*, W (240 J contra 90 J) e Q (750 J contra 600 J) apresentam valores diferentes nos dois processos.

Note que não temos informações suficientes para obter Q ou ΔU para os processos *ac* e *cd*. Ainda assim, fomos capazes de analisar o processo composto *acd* comparando-o com o processo *abd*, que apresenta os mesmos estados inicial e final, e sobre os quais temos informações mais completas.

Exemplo 19.3

TERMODINÂMICA DA EBULIÇÃO DA ÁGUA Um grama de água ($1\ cm^3$) se transforma em $1671\ cm^3$ quando ocorre o processo de ebulição a uma pressão constante de 1 atm ($1{,}013 \times 10^5$ Pa). O calor de vaporização para essa pressão é $L_v = 2{,}256 \times 10^6$ J/kg. Calcule a) o trabalho realizado pela água quando ela se transforma em vapor; b) o aumento da sua energia interna.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR a novidade deste problema é que o calor fornecido faz com que o sistema (água) mude de fase (de líquido a vapor). Não obstante, podemos aplicar a primeira lei da termodinâmica, que é verdadeira para os processos termodinâmicos de todos os tipos.

PREPARAR a água é fervida a uma pressão constante; portanto, podemos usar a Equação (19.3) para calcular o trabalho realizado pela água. Calcularemos o calor Q fornecido à água a partir da massa e do calor de vaporização, e encontraremos a variação da energia interna usando $\Delta U = Q - W$.

EXECUTAR: a) conforme a Equação (19.3), o trabalho realizado pela água em vaporização é

$$\begin{aligned} W &= P(V_2 - V_1) \\ &= (1{,}013 \times 10^5\ \text{Pa})(1671 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 - 1 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) \\ &= 169\ \text{J} \end{aligned}$$

b) Pela Equação (17.20), o calor fornecido para a água se vaporizar é

$$Q = mL_v = (10^{-3}\ \text{kg})(2.256 \times 10^6\ \text{J/kg}) = 2256\ \text{J}$$

Pela primeira lei da termodinâmica, Equação (19.4), a variação da energia interna é

$$\Delta U = Q - W = 2256\ \text{J} - 169\ \text{J} = 2087\ \text{J}$$

AVALIAR para vaporizar um grama de água, devemos adicionar 2256 J de calor. A maior parte desse calor (2087 J) permanece retida no sistema, fazendo aumentar sua energia interna. A energia restante de 169 J deixa novamente o sistema ao realizar um trabalho sobre as vizinhanças quando o líquido se expande produzindo o vapor. O aumento da energia interna é associado principalmente às forças intermoleculares que mantêm as moléculas ligadas no estado líquido. Essas forças são de atração, de modo que as energias potenciais associadas aumentam depois que um trabalho foi realizado para separar as moléculas, formando-se o estado vapor. É como aumentar a energia potencial gravitacional usando um elevador para subir a uma maior distância do centro da Terra.

Mudanças de estado infinitesimais

Nos exemplos precedentes, o estado inicial e o estado final do sistema diferiam por uma quantidade finita. Mais adiante, trataremos de variações de estado infinitesimais, em que uma pequena quantidade de calor dQ é fornecida ao sistema, um pequeno trabalho dW é realizado pelo sistema e sua energia interna sofre variação de uma pequena quantidade dU. Para tal processo, podemos enunciar a primeira lei da termodinâmica na forma

$$dU = dQ - dW \quad \text{(primeira lei da termodinâmica, processo infinitesimal)} \tag{19.6}$$

Para os sistemas que discutiremos, o trabalho dW é dado por $dW = P\,dV$, de modo que podemos enunciar a primeira lei da termodinâmica na forma

$$dU = dQ - P\,dV \tag{19.7}$$

Teste sua compreensão da Seção 19.4 Coloque os seguintes processos termodinâmicos relativos à variação de energia interna em ordem, do mais positivo ao mais negativo. (i) Enquanto você realiza 250 J de trabalho sobre um sistema, ele transfere 250 J de calor para o meio ambiente; (ii) enquanto você realiza 250 J de trabalho sobre um sistema, ele absorve 250 J de calor do meio ambiente; (iii) enquanto um sistema realiza 250 J de trabalho sobre você, ele transfere 250 J de calor para o meio ambiente; (iv) enquanto um sistema realiza 250 J de trabalho sobre você, ele absorve 250 J de calor do meio ambiente. ■

19.5 Tipos de processos termodinâmicos

Nesta seção, descreveremos quatro tipos específicos de processos termodinâmicos muito freqüentes em situações práticas. Podemos dizer resumidamente que essas transformações são o processo *adiabático*, que "não envolve troca de calor"; o processo *isocórico*, que "mantém o volume constante"; o processo *isobárico*, que "mantém a pressão constante"; e o processo *isotérmico*, que "mantém a temperatura constante". Em alguns desses processos podemos usar uma forma simplificada da primeira lei da termodinâmica.

Processo adiabático

Um **processo adiabático** é aquele no qual não ocorre transferência de calor nem para dentro, nem para fora do sistema: $Q = 0$. Podemos impedir a transferência de calor fechando o sistema com um material isolante ou realizando o processo tão rapidamente que não haja tempo suficiente para ocorrer um fluxo de calor apreciável. Pela primeira lei da termodinâmica, verificamos que, em qualquer processo adiabático,

$$U_2 - U_1 = \Delta U = -W \quad \text{(processo adiabático)} \tag{19.8}$$

Quando um sistema se expande adiabaticamente, W é positivo (o sistema realiza trabalho sobre as vizinhanças); logo, ΔU é negativa e a energia interna diminui. Quando um sistema é *comprimido* adiabaticamente, W é negativo (um trabalho é realizado sobre o sistema pelas vizinhanças); logo, U aumenta. Em muitos sistemas (mas não todos), um aumento de energia interna é acompanhado de um aumento de temperatura, e uma diminuição na energia interna é acompanhada de uma queda na temperatura (Figura 19.14).

Figura 19.14 Quando a rolha estoura em uma garrafa de champanhe, os gases pressurizados dentro da garrafa se expandem para o ar externo com tanta rapidez que não há tempo para haver troca de calor com o meio ambiente. Logo, a expansão é adiabática. À medida que os gases em expansão realizam trabalho sobre o meio ambiente, sua energia interna e temperatura caem. A temperatura reduzida faz com que o vapor d'água condense e forme uma [illegible]

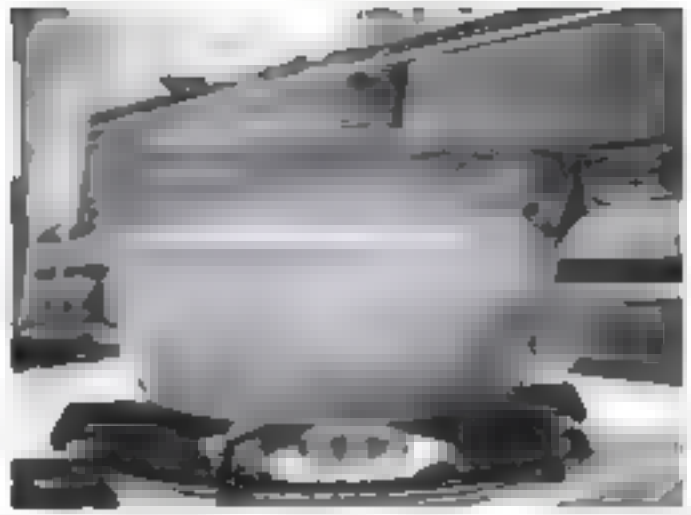


Figura 19.15 Grande parte da arte de cozinhar envolve processos isobáricos. É por isso que a pressão do ar permanece [illegible] acima de uma panela ou [illegible]

A fase de compressão em um motor de combustão interna é aproximadamente um processo adiabático. A temperatura da mistura de ar e combustível sobe à medida que ela é comprimida no cilindro. A expansão do combustível queimado durante a fase da produção de trabalho é também aproximadamente um processo adiabático, com uma diminuição da temperatura. Na Seção 19.8 estudaremos os processos adiabáticos em um gás ideal.

Processo isocórico

Um **processo isocórico** é um processo a *volume constante*. Quando o volume de um sistema termodinâmico permanece constante, ele não realiza trabalho sobre as vizinhanças. Logo, $W = 0$ e

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q \quad \text{(processo isocórico)} \qquad (19.9)$$

Em um processo isocórico, toda energia adicionada sob forma de calor permanece no interior do sistema, contribuindo para o aumento da energia interna. O aquecimento de certo gás em um recipiente cujo volume é mantido constante é exemplo de processo isocórico. (Note que existem alguns tipos de trabalho que não envolvem variação de volume. Por exemplo, podemos realizar trabalho sobre um fluido agitando-o. Em alguns livros, o termo 'isocórico' é usado para designar um processo em que nenhum tipo de trabalho foi realizado.)

Processo isobárico

Um **processo isobárico** é um processo à *pressão constante*. Em geral, nenhuma das três grandezas ΔU, Q e W é igual a zero em um processo isobárico, entretanto o cálculo do trabalho W é fácil. Pela Equação (19.3),

$$W = P(V_2 - V_1) \quad \text{(processo isobárico)} \qquad (19.10)$$

No Exemplo 19.5, analisamos um processo isobárico, a ebulição da água à pressão constante.

Processo isotérmico

Um **processo isotérmico** é um processo à *temperatura constante*. Para um processo ser isotérmico, é necessário que a transferência de calor para dentro ou para fora do sistema seja suficientemente lenta, possibilitando que o sistema permaneça em equilíbrio térmico. Em geral, nenhuma das três grandezas ΔU, Q e W é igual a zero em um processo isotérmico.

Em alguns casos especiais, a energia interna do sistema depende *apenas* da sua temperatura, e não do volume ou da pressão. O sistema mais conhecido que goza dessa propriedade especial é um gás ideal, conforme discutiremos na próxima seção. Em tais sistemas, quando a temperatura é constante, a energia interna também é constante; $\Delta U = 0$ e $Q = W$. Ou seja, qualquer energia que entra no sistema sob forma de calor Q sai novamente dele em virtude do trabalho W realizado por ele. No Exemplo 19.1, envolvendo um gás ideal, exemplificamos um processo isotérmico no qual U também permanece constante. Em muitos sistemas que não podem ser considerados gases ideais, a energia interna depende do volume e da pressão; logo, U pode variar mesmo quando T permanece constante.

A Figura 19.16 apresenta um diagrama PV de quatro processos diferentes para uma quantidade constante de um gás ideal. O caminho referente ao processo adiabático (de *a* até 1) é uma **curva adiabática**. A reta vertical (volume constante) é uma **isócora**, a reta horizontal (pressão constante) é uma **isóbara**, e a curva com temperatura constante é uma **isoterma**.

Teste sua compreensão da Seção 19.5 Qual dos processos na Figura 19.7 é isocórico? Qual é isobárico? É possível saber se algum dos processos é isotérmico ou adiabático? ■

19.6 Energia interna de um gás ideal

Vamos agora mostrar que a energia interna U de um gás ideal depende somente da sua temperatura, e não do volume ou da pressão. Vamos considerar novamente a expansão livre de um gás ideal descrita na Seção 19.3. Um

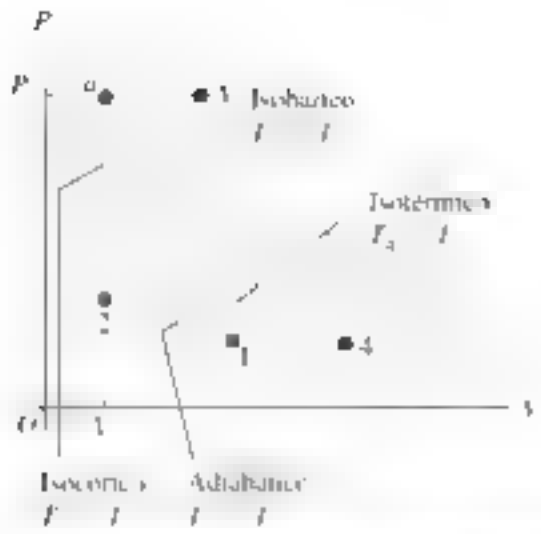


Figura 19.16 [illegible]
A temperatura aumenta somente no caso da expansão isobárica.

recipiente é circundado por paredes isolantes e separado em compartimentos por uma divisória (Figura 19.17). Um compartimento contém certa quantidade de gás ideal; no outro compartimento, produz-se vácuo.

Quando a divisória é quebrada ou removida ocorre uma expansão livre do gás ideal para preencher os dois compartimentos. O trabalho realizado pelo gás nessa expansão é igual a zero, porque ele não empurra nenhuma fronteira móvel, e também não existe nenhuma transferência de calor pelas paredes isolantes. Logo, Q e W são iguais a zero, e a energia interna U é constante. Isso é verdade para qualquer tipo de gás, e não somente para um gás ideal.

Será que a *temperatura* varia durante uma expansão livre? Suponha que ela *varie*, enquanto a energia interna permanece constante. Nesse caso, concluiríamos que a energia interna seria uma função da temperatura e do volume, ou então uma função da temperatura e da pressão, mas certamente não dependeria somente da temperatura. Porém, supondo que a temperatura seja constante durante uma expansão livre na qual provamos que U é constante mesmo com a variação simultânea de P e de V, podemos concluir que U depende somente de T, e não de V ou de P.

Muitas experiências mostraram que, quando um gás com densidade pequena sofre uma expansão livre, sua temperatura *não varia*. Tal gás é essencialmente um gás ideal. Concluímos que:

A energia interna de um gás ideal depende somente da sua temperatura, não depende do volume nem da pressão.

Essa propriedade, combinada com a equação de estado do gás ideal, faz parte do modelo do gás ideal. Certifique-se de que você compreendeu que a energia interna U de um gás ideal depende somente de T, pois usaremos frequentemente esse fato.

No caso de um gás não ideal, embora a energia interna permaneça constante, ocorre alguma variação da temperatura

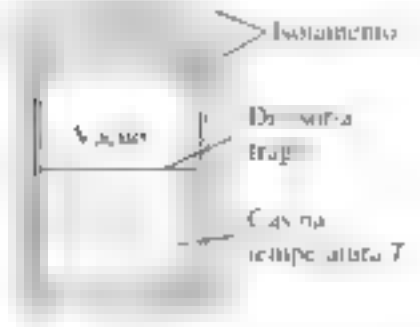


Figura 19.17 A divisória é quebrada (ou removida) para permitir a expansão livre do gás ideal para o compartimento onde existe vácuo.

durante uma expansão livre. Isso mostra que a energia interna não depende *somente* da temperatura, mas também da pressão. Do ponto de vista microscópico, segundo o qual a energia interna U é encarada como a soma da energia cinética com a energia potencial das partículas do sistema, isso não será surpresa. Em gases não ideais, em geral existem forças de atração entre as moléculas, e quando a distância entre elas aumenta, a energia potencial associada também aumenta. Como a energia interna permanece constante, as energias cinéticas das moléculas devem diminuir. A temperatura é diretamente relacionada à *energia cinética*, e nesse tipo de gás a temperatura deve *diminuir* durante uma expansão livre.

Teste sua compreensão da Seção 19.6 É provável que a energia interna de um sólido seja independente de seu volume como no caso de um gás ideal? Explique o seu raciocínio. (*Sugestão*: ver Figura 18.20.) ■

19.7 Calor específico de um gás ideal

Definimos o calor específico e o calor específico molar na Seção 17.5. Comentamos também, no final daquela seção, que o calor específico de uma substância depende do processo de fornecimento de calor para a substância. Geralmente é mais fácil medir o calor específico de um gás mantendo-o em um recipiente com volume constante. O calor específico correspondente denomina-se **calor específico molar a volume constante**, designado por C_V. As medidas dos calores específicos de sólidos e de líquidos geralmente são feitas mantendo-se a pressão atmosférica constante, e o calor específico correspondente denomina-se **calor específico molar à pressão constante**, designado por C_P. Quando nem P nem V permanecem constantes, existe uma infinidade de calores específicos possíveis.

Vamos considerar C_P e C_V em um gás ideal. Para medir C_V, fazemos aumentar a temperatura de um gás ideal mantendo-o em um recipiente a volume constante, desprezando a dilatação térmica do recipiente (Figura 19.18a). Para medir C_P, fazemos o gás expandir apenas o suficiente para manter a pressão constante enquanto sua temperatura aumenta (Figura 19.18b).

Por que esses dois calores específicos deveriam ser diferentes? A resposta é dada pela primeira lei da termodinâmica. Quando a temperatura aumenta em um processo iso-

córico, o sistema não realiza trabalho, e a variação da energia interna ΔU é igual ao calor fornecido Q. Contudo, quando a temperatura aumenta em um processo isobárico, o volume *deve* aumentar; caso contrário, a pressão (dada pela equação do gás ideal, $P = nRT/V$) não permaneceria constante. Quando o sistema se expande, ele realiza um trabalho W. De acordo com a primeira lei da termodinamica, temos

$$Q = \Delta U + W \tag{19.11}$$

Para um dado aumento de temperatura, a variação da energia interna ΔU de um gás ideal apresenta sempre o mesmo valor, independentemente do processo (lembre-se de que a energia interna de um gás ideal depende somente da sua temperatura, não depende do volume nem da pressão). Então, a Equação (19.11) mostra que o calor que entra no sistema em um processo isobárico deve ser *maior* do que o calor que entra no sistema em um processo isocórico, porque é necessário fornecer uma energia adicional para compensar o trabalho realizado durante a expansão. Portanto, em um gás ideal, C_p é maior do que C_v. O diagrama PV na Figura 19.19 ilustra essa relação. Para o ar, C_p é 40% maior do que C_v.

Em um número muito pequeno de substâncias (uma das quais a água entre 0 °C e 4 °C), o volume *diminui* quando a temperatura aumenta. Nesse caso, W é negativo, o calor que entra no sistema é *menor* do que no caso do processo isocórico e C_p é *menor* do que C_v.

Podemos deduzir uma relação simples entre C_p e C_v para o caso de um gás ideal. Vamos inicialmente considerar um processo *isocórico*. Colocamos n moles de um gás ideal em um recipiente com volume constante. Mantemos o sistema em contato térmico com um corpo mais quente; um calor infinitesimal dQ flui para o interior do gás e sua temperatura aumenta de um valor infinitesimal dT. Pela definição de calor específico molar a volume constante, C_v, temos

$$dQ = nC_v\,dT \tag{19.12}$$

A pressão cresce nesse processo, mas o gás não realiza nenhum trabalho ($dW = 0$), porque o volume permanece constante. A forma diferencial da primeira lei, Equação (19.6), é $dQ = dU + dW$. Como $dW = 0$, $dQ = dU$, e a Equação (19.12) também pode ser escrita na forma

$$dU = nC_v\,dT \tag{19.13}$$

Considere agora um processo *isobárico* com a mesma variação de temperatura dT. Colocamos o mesmo gás em um recipiente cilíndrico com um pistão que se move apenas o suficiente para manter a pressão constante, como mostra a Figura 19.18b. Novamente mantemos o sistema em contato térmico com um corpo mais quente. À medida que o calor flui para dentro do sistema, ele se expande à pressão constante e realiza trabalho. Pela definição de calor específico molar à pressão constante, C_p, o calor dQ que entra no gás é

$$dQ = nC_p\,dT \tag{19.14}$$

O trabalho dW realizado pelo gás no processo isobárico é

$$dW = P\,dV$$

Podemos também expressar dW em termos da variação de temperatura dT, usando a equação de estado do gás ideal, $PV = nRT$. Como a pressão P é constante, a variação de volume V é proporcional à variação de T:

$$dW = P\,dV = nR\,dT \tag{19.15}$$

Substituimos agora as equações (19.14) e (19.15) na primeira lei, $dQ = dU + dW$. Obtemos

$$nC_p\,dT = dU + nR\,dT \tag{19.16}$$

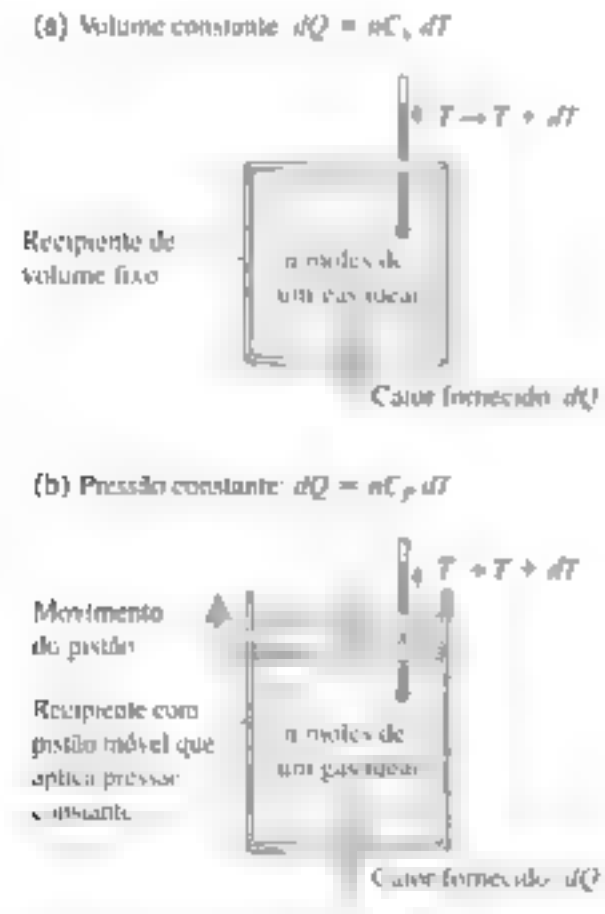

(a) Volume constante $dQ = nC_v\,dT$
$T \to T + dT$
Recipiente de volume fixo
n moles de um gás ideal
Calor fornecido dQ
(b) Pressão constante: $dQ = nC_p\,dT$
$T \to T + dT$
Movimento do pistão
Recipiente com pistão móvel que aplica pressão constante
n moles de um gás ideal
Calor fornecido dQ

Figura 19.18 Medindo o calor específico molar de um gás ideal (a) a volume constante e (b) à pressão constante.

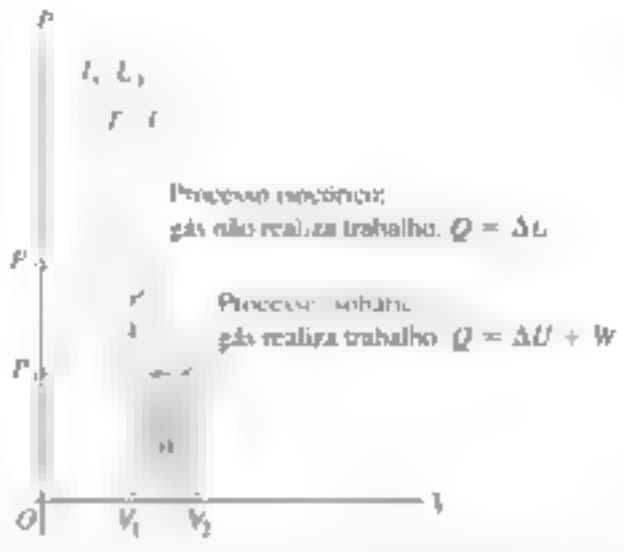


Figura 19.19 Aumento da temperatura de um gás ideal de T_1 até T_2 em um processo isobárico ou em um processo isocórico. Em um gás ideal, U depende somente de T; logo, ΔU possui o mesmo valor em ambos os processos. Entretanto, no processo isobárico Q é maior, porque além de ΔU devemos somar o trabalho realizado W. Logo, $C_p > C_v$.

Agora chegamos ao ponto crucial da dedução. A variação da energia interna dU no processo isobárico é novamente dada pela Equação (19.13), $dU = nC_V\,dT$, *embora agora o volume não seja constante*. Como explicar isso? Lembre-se da discussão na Seção 19.6, uma das principais características de um gás ideal é que sua energia interna depende *somente* da temperatura. Portanto, a *variação* da energia interna em qualquer tipo de processo depende somente da variação da temperatura. Se a Equação (19.13) for válida para um gás ideal em um dado processo, ela será válida para um gás ideal em *qualquer* outro tipo de processo com o mesmo dT. Portanto, podemos substituir dU na Equação (19.16) por $nC_V\,dT$:

$$nC_P\,dT = nC_V\,dT + nR\,dT$$

Dividindo ambos os membros pelo fator comum $n\,dT$, obtemos

$$C_P = C_V + R \qquad \text{(calores específicos molares de um gás ideal)} \tag{19.17}$$

Como havíamos previsto, o calor específico molar à pressão constante de um gás ideal é *maior* do que o calor específico molar a volume constante; a diferença é dada pela constante dos gases R. (É claro que R deve ser expressa usando-se as mesmas unidades de C_P e de C_V, tal como J/mol · K.)

Usamos o modelo do gás ideal para deduzir a Equação (19.17), porém, verifica-se que ela é obedecida com pequeno erro percentual por muitos gases reais a pressões moderadas. Na Tabela 19.1 fornecemos alguns valores medidos de C_P e de C_V para diversos gases reais em baixas pressões; em quase todos esses gases, a diferença entre os valores indicados é aproximadamente $R = 8{,}315$ J/mol · K.

A tabela também mostra que os calores específicos molares de um gás estão relacionados à sua estrutura molecular, conforme discutimos na Seção 18.4. De fato, as duas primeiras colunas da Tabela 19.1 são as mesmas da Tabela 18.1.

A razão entre os calores específicos

A última coluna da Tabela 19.1 indica os valores sem dimensões da **razão entre os calores específicos**, C_P/C_V, representada por γ (letra grega gama):

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \qquad \text{(razão entre os calores específicos)} \tag{19.18}$$

(Essa relação também é chamada de "razão das capacidades caloríficas".) Nos gases, C_P é sempre maior do que C_V, e γ é sempre maior do que um. Essa grandeza desempenha um papel importante no processo *adiabático* de um gás ideal, que será estudado na próxima seção.

Podemos usar nossa discussão sobre o modelo cinético-teórico do calor específico molar de um gás ideal (Seção 18.4) para fazer previsões sobre os valores de γ. Como exemplo, em um gás monoatômico, $C_V = \frac{3}{2}R$. Pela Equação (19.17),

$$C_P = C_V + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

logo,

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} = 1{,}67$$

Conforme indicado na Tabela 19.1, esse resultado concorda com os valores de γ obtidos nas medidas dos calores específicos molares. Em quase todos os gases diatômicos nas vizinhanças da temperatura ambiente, $C_V = \frac{5}{2}R$ e, portanto, $C_P = C_V + R = \frac{7}{2}R$.

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1{,}40$$

que também concorda com os valores medidos.

Um último lembrete: em um gás ideal, a variação da energia interna em *qualquer tipo* de processo é dada por $\Delta U = nC_V\,\Delta T$, *independentemente de o volume ser ou não constante*. Essa relação, que será usada no próximo exemplo, vale para outras substâncias (gases não ideais) *somente* em processos isocóricos.

Exemplo 19.3

RESFRIANDO O SEU QUARTO Um quarto típico contém cerca de 2500 moles de ar. Calcule a variação da energia interna para essa quantidade de ar quando ele é resfriado de 23,9 °C até 12,6 °C mantendo-se uma pressão constante igual a 1,0 atm. Considere o ar um gás ideal com $\gamma = 1{,}40$.

Tabela 19.1 Calores específicos molares de gases a baixas pressões

Tipo de Gás	Gás	C_V (J/mol · K)	C_P (J/mol · K)	$C_P - C_V$ (J/mol · K)	$\gamma = C_P/C_V$
Monoatômico	He	12,47	20,78	8,31	1,67
	Ar	12,47	20,78	8,31	1,67
Diatômico	H_2	20,42	28,74	8,32	1,41
	N_2	20,76	29,07	8,31	1,40
	O_2	20,85	29,17	8,31	1,40
	CO	20,85	29,16	8,31	1,40
Poliatômico	CO_2	28,46	36,94	8,48	1,30
	SO_2	31,39	40,37	8,98	1,29
	H_2S	25,95	34,60	8,65	1,33

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR Nossa incógnita é a variação da energia interna de um gás ideal em um processo isobárico. O problema envolve o número de moles e a variação da temperatura.

PREPARAR Talvez o seu primeiro impulso seja achar C_p e depois calcular Q usando $Q = nC_p\,\Delta T$; encontrar a variação de volume e o trabalho realizado pelo gás usando $W = p\,\Delta V$ e, finalmente, usar a primeira lei para encontrar ΔU. Isso seria absolutamente correto, mas há um jeito muito mais fácil de resolver o problema. Em um gás ideal, a variação de energia interna é $\Delta U = nC_v\,\Delta T$ em *todos* os processos, *independentemente de o volume ser constante ou não*. Assim, tudo o que você tem a fazer é encontrar C_v e usar essa expressão para encontrar ΔU.

EXECUTAR Temos o valor de γ para o ar, então podemos usar as equações (19.17) e (19.18) para encontrar C_v:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$$

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{8{,}314\ \text{J/mol} \cdot \text{K}}{1{,}400 - 1} = 20{,}79\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta U &= nC_v\,\Delta T \\ &= (2\,500\ \text{mol})(20{,}79\ \text{J/mol} \cdot \text{K})(31{,}6\ ^\circ\text{C} - 23{,}9\ ^\circ\text{C}) \\ &= 6{,}39 \times 10^5\ \text{J}\end{aligned}$$

AVALIAR Um condicionador de ar precisa extrair essa grande quantidade de energia interna do ar de seu quarto e transferi-la para o ar do lado de fora da casa. No Capítulo 20, discutiremos como isso é feito.

Teste sua compreensão da Seção 19.7 Você deseja resfriar um cilindro de armazenamento contendo 10 moles de gás comprimido de 30° C a 20° C. Com que tipo de gás isso será mais fácil? (i) Um gás monoatômico; (ii) um gás diatômico; (iii) um gás poliatômico; (iv) seria igualmente fácil com todos esses gases. ∎

19.8 Processo adiabático de um gás ideal

Um processo adiabático, definido na Seção 19.5, é aquele em que não ocorre nenhuma transferência de calor entre o sistema e suas vizinhanças. Uma transferência de calor igual a zero é uma idealização, mas um processo é aproximadamente adiabático quando ocorre em um sistema muito bem isolado, ou quando ele é realizado tão rapidamente que não existe tempo suficiente para que ocorra um fluxo de calor apreciável.

Em um processo adiabático, $Q = 0$. Logo, pela primeira lei, $\Delta U = -W$. Um processo adiabático de um gás ideal é apresentado no diagrama PV da Figura 19.20. À medida que o gás se expande de um volume V_a até um volume V_b, ele realiza trabalho, de modo que sua energia interna diminui e sua temperatura cai. Se o ponto a, representando o estado inicial, está sobre uma isoterma a uma temperatura $T + dT$, então o ponto b, representando o estado final, estará sobre uma isoterma com uma temperatura mais baixa T. Em um gás ideal, a curva (adiabática) que representa esse processo é sempre mais *inclinada* do que uma isoterma que passa pelo mesmo ponto. Para uma *compressão* adiabática do ponto V_b até o ponto V_a, o processo se inverte, e a temperatura do gás aumenta.

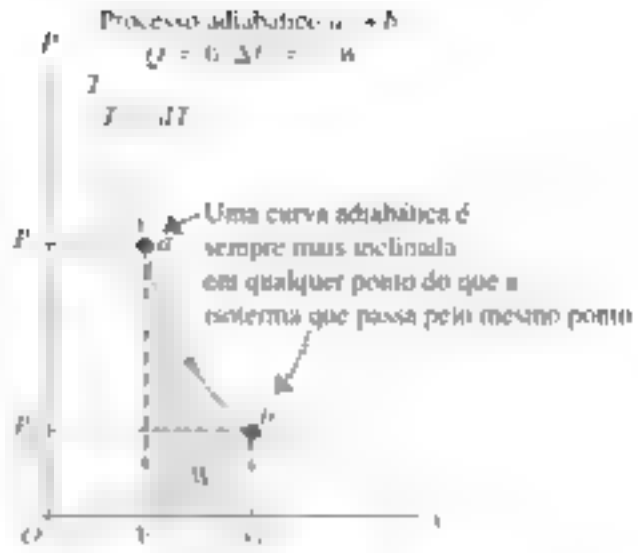


Figura 19.20 Diagrama PV de um processo adiabático de um gás ideal. À medida que o gás se expande de um volume V_a até um volume V_b, sua temperatura cai de $T + dT$ até T, por causa da diminuição da energia interna provocada pelo trabalho W realizado (indicado pela área sombreada) durante a expansão do gás ($\Delta U = -W < 0$). No caso de um gás ideal, a curva adiabática é sempre mais inclinada do que uma isoterma que passa pelo mesmo ponto do diagrama PV. (Um processo adiabático também é mostrado na Figura 19.16.)

O ar nos tubos de saída de compressores usados nos postos de gasolina, nos equipamentos para pintura com jatos de tinta, ou nos tanques de gás usados em mergulhos, sai sempre mais quente do que o ar que entra no compressor, porque a compressão é rápida e aproximadamente adiabática. Um *resfriamento* adiabático ocorre quando você abre uma garrafa de sua bebida carbonatada preferida. O gás sob pressão acima da superfície da bebida se expande rapidamente em um processo quase adiabático; a temperatura do gás diminui tanto que o vapor d'água se condensa, formando uma nuvem em miniatura (ver Figura 19.14).

ATENÇÃO **Aquecer e resfriar sem calor** Lembre-se que, quando você menciona um "resfriamento adiabático" ou um "aquecimento adiabático", você está querendo dizer, na realidade, que ocorre uma "diminuição de temperatura" ou um "aumento de temperatura" respectivamente. Em um processo adiabático não existe absolutamente *nenhuma* troca de calor, e a variação da temperatura ocorre por causa do trabalho realizado pelo sistema ou sobre o sistema.

Gás ideal adiabático: relacionando V, T e P

Podemos deduzir uma relação entre as variações de temperatura e de volume em um processo adiabático infinitesimal de um gás ideal. A Equação (19.13) fornece a

variação da energia interna dU para *qualquer* processo de um gás ideal, adiabático ou não; logo, $dU = nC_V dT$. Além disso, o trabalho realizado pelo gás é dado por $dW = P\,dV$. Então, como $dU = -dW$, temos

$$nC_V dT = -P\,dV \tag{19.19}$$

Para obter uma relação contendo somente a temperatura T e o volume V, eliminamos P usando a equação do gás ideal na forma $P = nRT/V$. Substituindo na Equação (19.19) e reagrupando, encontramos

$$nC_V dT = -\frac{nRT}{V}\,dV$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = 0$$

O coeficiente R/C_V pode ser expresso em termos de $\gamma = C_p/C_V$. Obtemos

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} - 1 = \gamma - 1$$

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0 \tag{19.20}$$

Como em um gás γ é sempre maior do que um, $(\gamma - 1)$ é sempre positivo. Isso significa que, na Equação (19.20), dV e dT têm sempre sinais opostos. Na *expansão* adiabática de um gás ideal ($dV > 0$) sempre ocorre uma *diminuição* de temperatura ($dT < 0$), e na *compressão* adiabática de um gás ideal ($dV < 0$) sempre ocorre um *aumento* de temperatura ($dT > 0$), isso confirma nossa previsão anterior.

Para uma variação finita da temperatura e do volume, podemos integrar a Equação (19.20) e obtemos

$$\ln T + (\gamma - 1)\ln V = \text{constante}$$

$$\ln T + \ln V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

$$\ln(TV^{\gamma-1}) = \text{constante}$$

e, finalmente

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \tag{19.21}$$

Portanto, para um estado inicial (T_1, V_1) e um estado final (T_2, V_2),

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \text{ (processo adiabático, gás ideal)} \tag{19.22}$$

Como usamos a equação do gás ideal na dedução das equações (19.21) e (19.22), o valor de T só pode ser expresso na temperatura *absoluta* (em Kelvin).

Podemos também converter a Equação (19.21) em outra relação entre a pressão e o volume eliminando T, mediante a equação do gás ideal na forma $T = PV/nR$. Substituindo essa expressão na Equação (19.21), encontramos

$$\frac{PV}{nR}V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

ou, como n e R são constantes,

$$PV^{\gamma} = \text{constante} \tag{19.23}$$

Para um estado inicial (P_1, V_1) e um estado final (P_2, V_2), a Equação (19.23) fornece

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \text{ (processo adiabático, gás ideal)} \tag{19.24}$$

Podemos também calcular o *trabalho* realizado por um gás ideal durante um processo adiabático. Sabemos que em *qualquer* processo adiabático $Q = 0$ e $W = -\Delta U$. Em um gás ideal, $\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$. Se conhecemos o número de moles n, a temperatura inicial T_1 e a temperatura final T_2, teremos simplesmente

$$W = nC_V(T_1 - T_2) \text{ (processo adiabático, gás ideal)} \tag{19.25}$$

Podemos usar também a relação $PV = nRT$ na equação anterior para obter

$$W = \frac{C_V}{R}(P_1V_1 - P_2V_2) = \frac{1}{\gamma - 1}(P_1V_1 - P_2V_2)$$

(processo adiabático, gás ideal) (19.26)

(Usamos o resultado $C_V = R/(\gamma - 1)$ do Exemplo 19.6.) Se o processo adiabático é uma expansão, a temperatura diminui, T_1 é maior do que T_2, P_1V_1 é maior do que P_2V_2, e o trabalho realizado é *positivo*, como era de se esperar. Se o processo adiabático é uma compressão, o trabalho é negativo.

Na análise precedente do processo adiabático, usamos a equação de estado do gás ideal, que vale somente para estados de *equilíbrio*. Estritamente falando, nossos resultados são válidos quando o processo é realizado de modo suficientemente rápido para que não ocorra um fluxo de calor apreciável entre o sistema e as vizinhanças (de modo que $Q = 0$ e o processo seja adiabático), embora ele também seja suficientemente lento para que não ocorra uma ruptura do equilíbrio térmico e do equilíbrio mecânico. Mesmo quando essas condições não são estritamente obedecidas, as equações (19.22), (19.24) e (19.26) fornecem resultados aproximadamente úteis.

Exemplo 19.7

COMPRESSÃO ADIABÁTICA EM UM MOTOR *DIESEL*. A razão de compressão de um motor *diesel* é 15 para 1, isso significa que o ar é comprimido no interior do cilindro até um volume igual a $\frac{1}{15}$ do seu volume inicial (Figura 19.21). Sabendo que a pressão inicial é $1{,}01 \times 10^5$ Pa e que a temperatura inicial é 27 °C (300 K), calcule a temperatura final e a pressão final depois da compressão. O ar é basicamente uma mistura dos gases diatômicos oxigênio e hidrogênio; considere o ar um gás ideal com $\gamma = 1{,}40$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como este problema envolve a compressão adiabática de um gás ideal, podemos usar as ideias desta seção.

PREPARAR: temos a pressão inicial, $P_1 = 1{,}01 \times 10^5$ Pa, a temperatura inicial, $T_1 = 300$ K, e o problema informa que a razão

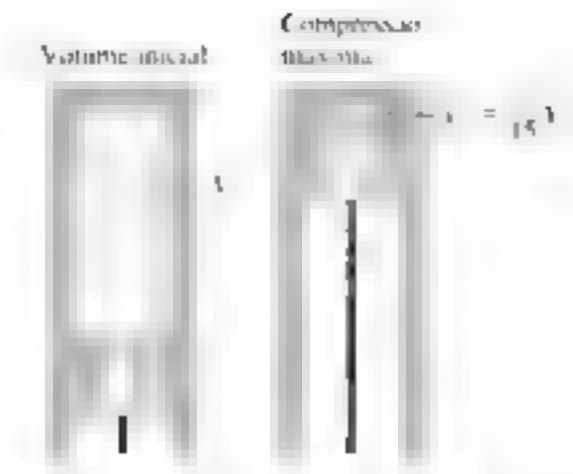


Figura 19.21 Compressão adiabática da ar no cilindro de um motor diesel

entre os volumes inicial e final é $V_1/V_2 = 15$. Podemos achar a temperatura final T_2 usando a Equação (19.22), e a pressão final P_2 usando a Equação (19.24).

EXECUTAR pela Equação (19.22), obtemos

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = (300\ \text{K})(15)^{0.40} = 886\ \text{K} = 613\ ^\circ\text{C}$$

Usando a Equação (19.24),

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = (1.01 \times 10^5\ \text{Pa})(15)^{1.40}$$

$$= 44.8 \times 10^5\ \text{Pa} = 44\ \text{atm}$$

AVALIAR: se a compressão fosse isotérmica, a pressão final seria igual a 15 atm, mas como a temperatura também aumenta durante um processo adiabático, a pressão final é muito maior. Quando o combustível é injetado no cilindro perto do final do processo de compressão, o combustível explode espontaneamente sem a necessidade da centelha produzida por uma vela de ignição.

Exemplo 19.8

TRABALHO REALIZADO EM UM PROCESSO ADIABÁTICO

No Exemplo 19.7, qual é o trabalho realizado pelo gás durante a compressão, sabendo que o volume inicial do cilindro é 1,0 L = 1,0 × 10^{-3} m^3? Considere o C_V do ar igual a 20,8 J/mol · K e $\gamma = 1,40$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: nossa incógnita é o trabalho realizado *pelo* gás durante a compressão adiabática. O problema fornece o volume inicial do gás, e sabemos (do Exemplo 19.7) os valores inicial e final da temperatura e da pressão.

PREPARAR: usamos a Equação (19.25) para calcular o trabalho realizado. O número de moles *n* não é fornecido, mas podemos calculá-lo a partir das informações dadas usando a equação do gás ideal, $PV = nRT$.

EXECUTAR: o número de moles é

$$n = \frac{P_1V_1}{RT_1} = \frac{(1.01 \times 10^5\ \text{Pa})(1,0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{(8,314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}$$

$$= 0,0405\ \text{mol}$$

e a Equação (19.25) fornece

$$W = nC_V(T_2 - T_1)$$

$$= (0,0405\ \text{mol})(20,8\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K} - 886\ \text{K})$$

$$= -494\ \text{J}$$

AVALIAR: podemos conferir o resultado usando a Equação (19.26), a expressão alternativa para o trabalho realizado por um gás ideal em um processo adiabático:

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}(P_2V_2 - P_1V_1)$$

$$= \frac{1}{1,40 - 1}\left[(1.01 \times 10^5\ \text{Pa})(1,0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) - (44,8 \times 10^5\ \text{Pa})\left(\frac{1,0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3}{15}\right)\right]$$

$$= -494\ \text{J}$$

O trabalho realizado é negativo porque o gás é comprimido.

Teste sua compreensão da Seção 19.8 Você tem quatro amostras de gás ideal, cada uma delas contendo o mesmo número de moles de gás na mesma temperatura, volume e pressão iniciais. Você comprime cada amostra à metade de seu volume inicial. Coloque as quatro amostras em ordem do maior ao menor valor da pressão final. (i) Um gás monoatômico comprimido isotermicamente; (ii) um gás monoatômico comprimido adiabaticamente; (iii) um gás diatômico comprimido isotermicamente; (iv) um gás diatômico comprimido adiabaticamente. ∎

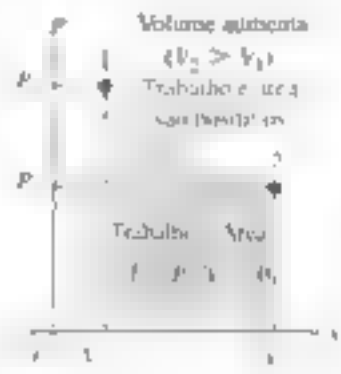
Resumo

Calor e trabalho em processos termodinâmicos: Um sistema termodinâmico pode trocar energia com suas vizinhanças mediante transferência de calor, ou pelo trabalho mecânico realizado. Quando um sistema com pressão *P* se expande de um volume V_1 até um volume V_2, ele realiza um trabalho *W* dado pela integral de *P* em relação ao volume. Se a pressão permanece constante, o trabalho realizado é igual a *P* vezes a variação de volume. Um valor negativo de *W* significa que o trabalho é realizado sobre o sistema. (Ver Exemplo 19.1.)

Em qualquer processo termodinâmico, o calor fornecido para o sistema e o trabalho realizado pelo sistema, além de dependerem do estado inicial e do estado final, dependem também do caminho (o conjunto de estados intermediários através dos quais o sistema evolui).

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV \qquad (19.2)$$

$$W = P(V_2 - V_1) \quad \text{(somente para pressão constante)} \qquad (19.3)$$



A primeira lei da termodinâmica: A primeira lei da termodinâmica afirma que, quando se fornece um calor Q ao sistema enquanto ele realiza um trabalho W, a energia interna U varia de uma quantidade igual a $Q - W$. Essa lei pode ser expressa de modo a ser aplicada em um processo infinitesimal. (Ver Exemplos 19.2, 19.3 e 19.5.)

A energia interna de qualquer sistema termodinâmico depende somente do seu estado. A variação da energia interna em qualquer processo termodinâmico depende somente do estado inicial e do estado final, e não do caminho. A energia interna de um sistema isolado permanece constante. (Ver Exemplo 19.4.)

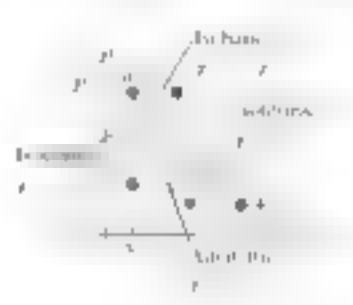
$$\Delta U = Q - W \tag{19.4}$$

$$dU = dQ - dW \quad \text{(processo infinitesimal)} \tag{19.6}$$

$$\Delta U = Q - W = +50\ \text{J}$$

Tipos importantes de processos termodinâmicos

- Processo adiabático: o calor não flui nem para dentro nem para fora do sistema; $Q = 0$.
- Processo isocórico: volume constante, $W = 0$.
- Processo isobárico: pressão constante: $W = P(V_2 - V_1)$.
- Processo isotérmico: temperatura constante.



Termodinâmica de gases ideais. A energia interna de um gás ideal depende somente da temperatura, e não do volume ou da pressão. Em outras substâncias a energia interna geralmente depende da temperatura e da pressão.

Os calores específicos molares C_p e C_v de um gás ideal diferem por R, a constante dos gases ideais. A razão entre os calores específicos, C_p/C_v, é adimensional e designada por γ. (Ver Exemplo 19.6.)

$$C_p = C_v + R \tag{19.17}$$

$$\gamma \quad C \quad C \tag{19.18}$$

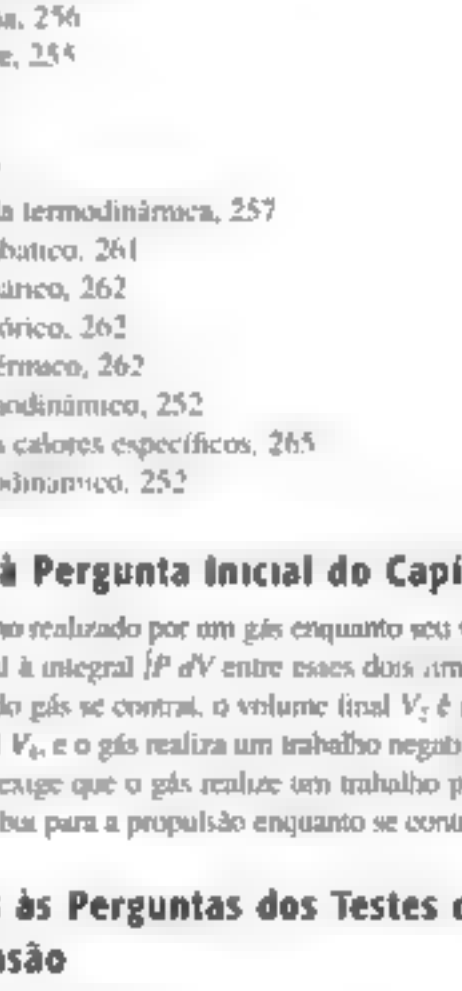
Processos adiabáticos em gases ideais. Em um processo adiabático de um gás ideal, as grandezas $TV^{\gamma-1}$ e PV^{γ} são constantes.

O trabalho realizado por um gás ideal durante uma expansão adiabática pode ser expresso em função dos valores inicial e final da temperatura, ou em função dos valores inicial e final da pressão e do volume. (Ver Exemplos 19.7 e 19.8.)

$$W \quad nC \ (T_1 \quad T_2) \tag{19.25}$$

$$C \quad R \ (P_1 \quad P_2)$$

$$= \quad P_1 \quad P_2) \tag{19.26}$$



Principais termos

calor específico molar à pressão constante 263
calor específico molar a volume constante 263
caminho, 255
curva adiabática, 262
energia interna, 256
expansão livre, 255
isobára, 262
isócora, 262
isoterma, 262
primeira lei da termodinâmica, 257
processo adiabático, 261
processo isobárico, 262
processo isocórico, 262
processo isotérmico, 262
processo termodinâmico, 252
razão entre os calores específicos, 265
sistema termodinâmico, 252

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

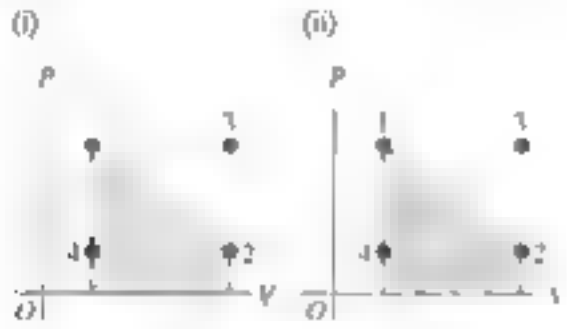
Não. O trabalho realizado por um gás enquanto seu volume varia de V_1 a V_2 é igual à integral $\int P\,dV$ entre esses dois limites do volume. Se o volume do gás se contrai, o volume final V_2 é menor do que o volume inicial V_1, e o gás realiza um trabalho negativo. Impulsionar a locomotiva exige que o gás realize um trabalho positivo, então o gás não contribui para a propulsão enquanto se contrai.

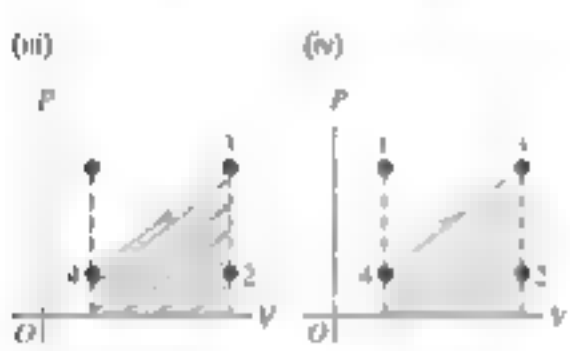
Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

19.1 **Respostas: negativo, positivo, positivo.** O calor flui para fora do café, logo, $Q_{café} < 0$; o calor flui para dentro da xícara de alumínio, logo $Q_{alumínio} > 0$. Em mecânica, diríamos que trabalho negativo é realizado *sobre* o bloco, já que a superfície exerce uma força sobre o bloco que se opõe ao movimento do bloco. Mas, em termodinâmica, usamos a convenção oposta e dizemos que $W > 0$, o que significa que trabalho positivo é feito *pelo* bloco sobre a superfície.

19.2 **Resposta: (ii).** O trabalho realizado em uma expansão é representado pela área sob a curva da pressão P pelo volume V. Em uma expansão isotérmica, a pressão diminui enquanto o volume aumenta, logo o diagrama PV se parece com a Figura 19.6a, e o trabalho realizado é igual à área sombreada sob a curva do ponto 1 ao ponto 2. Se, entretanto, a expansão for sob pressão constante, a curva de P por V seria igual à linha horizontal tracejada da pressão P_1 na Figura 19.6a. A área sob essa curva tracejada é menor do que a área sob a curva em linha cheia em uma expansão isotérmica, portanto, menos trabalho é realizado na expansão isobárica do que na expansão isotérmica.

19.3 **Resposta: (i) e (iv) (empate), (ii) e (iii) (empate).** A figura mostra os diagramas PV de cada um dos quatro processos. A área trapezoidal sob a curva e, portanto, o valor absoluto do trabalho, é o mesmo nos quatro casos. Nos casos (i) e (iv) o volume aumenta, então o sistema realiza trabalho positivo à medida que se expande contra o meio ambiente. Nos casos (ii) e (iii), o volume diminui, então o sistema realiza trabalho negativo (mostrado pelas áreas tracejadas na diagonal) à medida que o meio ambiente se expande para dentro dele.





19.4 **Resposta: (ii), (i) e (iv) (empate), (iii).** Na expressão $\Delta U = Q - W$, Q é o calor *fornecido* ao sistema, e W é o trabalho *realizado pelo* sistema. Se calor é transferido do sistema para o seu meio ambiente, Q é negativo; se o trabalho é realizado sobre o sistema, W é negativo. Assim, temos (i) $Q = -250$ J, $W = -250$ J, $\Delta U = -250$ J $-(-250\text{ J}) = 0$; (ii) $Q = 250$ J, $W = -250$ J, $\Delta U = 250\text{ J} - (-250\text{ J}) = 500$ J; (iii) $Q = -250$ J, $W = 250$ J, $\Delta U = -250\text{ J} - 250\text{ J} = -500$ J; e (iv) $Q = 250$ J, $W = 250$ J, $\Delta U = 250\text{ J} - 250\text{ J} = 0$.

19.5 **Respostas: 1 → 4 e 3 → 2 são isocóricas; 1 → 3 e 4 → 2 são isobáricas; não.** Em um diagrama PV como os da Figura 19.7, os processos isocóricos são representados por retas verticais (volume constante) e os processos isobáricos são representados por retas horizontais (pressão constante). O processo 1 → 2 na Figura 19.7 é mostrado como uma linha curva, que lembra superficialmente os processos adiabático e isotérmico de um gás ideal da Figura 19.16. Sem mais informações, não temos como saber se o processo 1 → 2 é isotérmico, adiabático ou nenhum dos dois.

19.6 **Resposta: não.** Usando o modelo de um sólido na Figura 18.20, vemos que a energia interna de um sólido depende *realmente* de seu volume. Comprimir o sólido significa comprimir as 'molas' entre os átomos, aumentando assim a sua energia potencial armazenada e, conseqüentemente, a energia interna do sólido.

19.7 **Resposta: (i).** Para um dado número de moles n e uma dada variação de temperatura ΔT, a quantidade de calor que deve ser transferida a partir de um volume fixo de ar é $Q = nC_V\Delta T$. Assim, a quantidade de calor necessária é a menor para o gás com o menor valor de C_V. Conforme a Tabela 19.1, o valor de C_V é menor para os gases monoatômicos.

19.8 **Resposta: (ii), (iv), (i) e (iii) (empate).** As amostras (i) e (ii) são comprimidas isotermicamente, portanto PV = constante. O volume de cada amostra diminui à metade de seu valor inicial, portanto, a pressão final é o dobro da pressão inicial. Em contraste, as amostras (iii) e (iv) são comprimidas adiabaticamente, então a pressão aumenta de um fator de 2^γ. A amostra (ii) é um gás monoatômico em que $\gamma = \frac{5}{3}$, logo a sua pressão final é $2^{\frac{5}{3}} = 3{,}17$ vezes maior do que a pressão inicial. A amostra (iv) é um gás diatômico em que $\gamma = \frac{7}{5}$, então sua pressão final é maior do que a pressão inicial por um fator de $2^{\frac{7}{5}} = 2{,}64$.

Questões para discussão

Q19.1 Nos seguintes processos, o trabalho feito pelo sistema (definido como um gás em expansão ou em contração) sobre o ambiente é positivo ou negativo? (a) expansão da mistura ar-gasolina queimada no cilindro do motor de um automóvel, (b) abertura de uma garrafa de champanhe, (c) encher um tanque de mergulho com ar comprimido, (d) enrugamento parcial de uma garrafa de água vazia e fechada quando você viaja de carro descendo das montanhas para o nível do mar.

Q19.2 Não é correto dizer que um corpo contém uma certa quantidade de calor, embora ocorra transferência de calor de um corpo para outro. Como pode um corpo fornecer algo que ele inicialmente não possuía?

Q19.3 Em que situação você precisa realizar mais trabalho: inflar um balão ao nível do mar ou inflar o mesmo balão até o mesmo volume no pico do monte McKinley? Explique em termos da variação de pressão e volume.

Q19.4 Caso você conheça a energia interna inicial, a energia interna final e a variação da energia interna associada, você pode saber se a variação da energia interna foi devida ao trabalho realizado ou ao calor transferido? Explique.

Q19.5 Discuta a aplicação da primeira lei da termodinâmica para uma montanhista que ingere alimentos, que se aquece e transpira muito durante uma escalada, e que realiza muito trabalho mecânico para subir até o topo da montanha. O que dizer sobre a descida? A montanhista também se aquece durante a descida. A fonte de energia na descida é a mesma da subida?

Q19.6 Quando o gelo se funde a 0 °C, seu volume diminui. A variação da sua energia interna é igual ao calor fornecido ao gelo, maior ou menor do que ele? Como você sabe disso?

Q19.7 Você segura um balão inflável sobre uma saída de ar quente em sua casa e observa-o expandir-se lentamente. A seguir você o retira dali e o deixa esfriar à temperatura ambiente. Durante a expansão, o que foi maior: o calor fornecido ao balão ou o trabalho realizado pelo ar dentro dele? Explique. (Suponha que o ar seja um gás ideal.) Uma vez que o balão tenha retornado à temperatura ambiente, como o calor total recebido ou perdido pelo ar dentro dele se compara ao trabalho total realizado sobre o ar circundante, ou pelo ar circundante?

Q19.8 Você faz biscoitos de chocolate no forno e os coloca, ainda quentes, em um recipiente com uma tampa não muito apertada.

Que tipo de processo acontece com o ar dentro do recipiente à medida que os biscoitos se resfriam gradualmente até a temperatura ambiente (isotérmico, isocórico, adiabático, isobárico ou alguma combinação desses processos)? Justifique sua resposta.

Q19.9 Imagine um gás constituído inteiramente por elétrons com cargas negativas. Cargas de mesmo sinal se repelem, de modo que os elétrons exerceriam forças de repulsão entre si. Em uma expansão livre desse gás, a temperatura aumenta, diminui ou permanece constante? Por quê?

Q19.10 Existem algumas poucas substâncias que se contraem quando a temperatura aumenta, tal como a água entre 0 °C e 4 °C. Nesses materiais, você espera que C_p seja maior ou menor do que C_V? Explique por quê.

Q19.11 Quando você sopra em sua mão com a boca completamente aberta, você sente o ar quente. Porém, quando você deixa a boca parcialmente fechada formando um orifício em forma de "o" e sopra sobre a mão, você sente o ar frio. Por quê?

Q19.12 Em balões de ar quente, o ar no envelope do balão é aquecido por um maçarico de propano colocado junto à boca do balão. O ar quente dentro do envelope permanece à pressão atmosférica devido à abertura da boca, e o volume do envelope é praticamente constante. Assim, quando o piloto acende o maçarico para aquecer o ar, o volume do envelope e a pressão dentro dele são constantes, mas a temperatura sobe. A lei do gás ideal parece prever isso. O que está acontecendo?

Q19.13 Em um dia quente, um grande tanque cilíndrico contendo gás comprimido (propano ou butano) foi usado para fornecer combustível para diversos fogões a gás grandes para um almoço ao ar livre. Logo após o fornecimento, formou-se gelo na parte externa do tanque. Por quê?

Q19.14 Quando você usa uma bomba de ar manual para encher os pneus da sua bicicleta, a bomba logo esquenta. Por quê? O que ocorre com a temperatura do ar na bomba quando você o comprime? Por que isso ocorre? Quando você suspende o punho da bomba para fazer o ar externo entrar nela, o que ocorre com a temperatura do ar que entra? Novamente, por que isso ocorre?

Q 9.15 No carburador de um avião ou de um automóvel, o ar flui através de uma abertura relativamente pequena, a seguir se expande. Em um clima frio, com nevoeiro, algumas vezes se forma gelo nessas aberturas, embora a temperatura externa do ar seja maior do que a temperatura de solidificação. Por quê?

Q19.16 Em um dia de sol, grandes "bolhas" de ar se formam no solo aquecido pelo sol, expandem-se gradualmente e, finalmente, se soltam e sobem pela atmosfera. Pássaros que voam a grandes altitudes e pilotos de aeroplanos utilizam essas correntes quentes ascendentes para ganhar altitude. Explique por que essa expansão é, em essência, um processo adiabático.

Q19.17 Os ventos que sopram na ilha havaiana de Kauai são provenientes do nordeste. Os ventos se resfriam à medida que sobem ao longo da inclinação do monte Waialeale (1523 m de altitude), produzindo chuva em virtude da condensação do vapor d'água. As chuvas nas proximidades do cume são muito mais intensas do que na base da montanha. De fato, o monte Waialeale é o local da Terra com a maior quantidade de chuvas, com a média de 11,7 m de chuva durante o ano. Porém, o que causa o resfriamento dos ventos?

Q19.18 Usando as mesmas considerações da Questão 19.17, explique por que a ilha de Niihau, a alguns quilômetros a sudoeste de Kauai, é quase um deserto e as fazendas necessitam de um sistema de irrigação.

Q19.19 Em um processo isocórico, $dU = nC_V\,dT$. Mas em um processo isobárico, *não* é verdade que $dU = nC_p\,dT$. Explique por quê.

Q19.20 Quando um gás é comprimido adiabaticamente no ar circundante, sua temperatura aumenta mesmo que não exista nenhum fluxo de calor para o interior do sistema. De onde provém a energia que faz aumentar sua temperatura?

Q19.21 Quando um gás se expande adiabaticamente, ele realiza trabalho sobre suas vizinhanças. Porém, como não existe nenhum fluxo de calor para o sistema, de onde provém a energia para realizar o trabalho?

Q19.22 O gás usado para separar os dois isótopos do urânio ^{235}U e ^{238}U tem a fórmula UF_6. Se você fornecer calor a taxas iguais a um mol do gás UF_6 e a um mol do gás H_2, em qual deles você espera que a temperatura aumente mais rápido? Explique.

Exercícios

Seção 19.2 Trabalho realizado durante variações de volume
Seção 19.3 Caminhos entre estados termodinâmicos

19.1 Dois moles de um gás ideal são aquecidos sob pressão constante de $T = 27$ °C até 107 °C. a) Desenhe um diagrama PV para esse processo. b) Calcule o trabalho realizado pelo gás.

19.2 Seis moles de um gás ideal estão em um cilindro com um pistão móvel em uma de suas extremidades. A temperatura inicial do gás é 27,0 °C e a pressão é constante. Como parte do projeto da máquina, calcule a temperatura final do gás depois que ele houver realizado $1,75 \times 10^4$ J de trabalho.

19.3 Dois moles de um gás ideal são comprimidos em um cilindro a uma temperatura constante de 85,0 °C até que a pressão original tenha triplicado. a) Desenhe um diagrama PV para esse processo. b) Calcule o trabalho realizado pelo gás.

19.4 Um cilindro metálico com paredes rígidas contém 2,50 mol de gás oxigênio. O gás é resfriado até que sua pressão diminua 30% em relação a seu valor original. Despreze a contração térmica do cilindro. a) Desenhe um diagrama PV para esse processo. b) Calcule o trabalho realizado pelo gás.

19.5 Enquanto 0,305 mol de um gás ideal passam por uma compressão isotérmica a 22 °C, 518 J de trabalho é realizado sobre ele pelo meio ambiente. a) Se a pressão final é 1,76 atm, qual é a pressão inicial? (b) Desenhe um diagrama PV do processo.

19.6 Um gás passa por dois processos. No primeiro, o volume permanece constante a 0,200 m^3 e a pressão cresce de $2,0 \times 10^5$ Pa até $5,0 \times 10^5$ Pa. O segundo processo é uma compressão até o volume 0,120 m^3 sob pressão constante de $5,0 \times 10^5$ Pa. a) Desenhe um diagrama PV mostrando esses dois processos. b) Calcule o trabalho total realizado pelo gás nos dois processos.

19.7 **Trabalho realizado em um processo cíclico.** a) Na Figura 19.7a, considere a malha $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Esse processo é cíclico porque o estado final coincide com o estado inicial. Calcule o trabalho total realizado pelo sistema nesse processo cíclico e mostre que ele é igual à área no interior da curva fechada. b) Como se relaciona o trabalho realizado no item (a) com o trabalho realizado quando o ciclo for percorrido em sentido inverso, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$? Explique.

Seção 19.4 Energia interna e primeira lei da termodinâmica

19.8 Você fecha o bico de uma bomba de pneu de bicicleta e aperta o êmbolo rapidamente, de modo que o ar lá dentro seja comprimido à metade do volume original. Suponha que o ar se comporte como um gás ideal. Se você faz isso tão lentamente que a temperatura do

ar dentro da bomba nunca varie: a) O trabalho realizado pelo ar na bomba é positivo ou negativo? b) A transferência de calor para o ar é positiva ou negativa? c) O que você pode dizer sobre os *módulos* relativos da transferência de calor e do trabalho? Explique.

19.9 Um gás no interior de um cilindro se expande de um volume igual a 0,110 m^3 até um volume igual a 0,320 m^3. O calor flui para dentro do sistema com uma taxa suficiente para manter a pressão constante e igual a $1,80 \times 10^5$ Pa durante a expansão. O calor total fornecido ao sistema é igual a $1,15 \times 10^5$ J. a) Calcule o trabalho realizado pelo gás. b) Calcule a variação da energia interna do gás. c) O resultado depende ou não do gás ser ideal? Justifique sua resposta.

19.10 Cinco moles de um gás ideal monoatômico com uma temperatura inicial de 127 °C se expandem e, nesse processo, absorvem 1200 J de calor e realizam 2100 J de trabalho. Qual é a temperatura final do gás?

19.11 Você chuta uma bola de futebol, comprimindo-a, de repente, até $\frac{3}{4}$ de seu volume original. Nesse processo, você realiza 410 J de trabalho sobre o ar (considerado um gás ideal) dentro da bola. a) Qual é a variação da energia interna do ar dentro da bola devido à compressão? b) A temperatura do ar dentro da bola aumenta ou diminui devido à compressão? Explique.

19.12 Um gás no interior de um cilindro é mantido sob pressão constante de $2,30 \times 10^5$ Pa, sendo resfriado e comprimido de 1,70 m^3 até um volume de 1,20 m^3. A energia interna do gás diminui de $1,40 \times 10^5$ J. a) Calcule o trabalho realizado pelo gás. b) Calcule o valor absoluto do calor $|Q|$ trocado com as vizinhanças e determine o sentido do fluxo do calor. c) O resultado depende ou não de o gás ser ideal? Justifique sua resposta.

19.13 **Sonhou: café-da-manhã dos campeões!** Um sonho típico contém 2,0 g de proteína, 17,0 g de carboidratos e 7,0 g de gordura. Os valores médios de energia alimentícia dessas substâncias são 4,0 kcal/g para a proteína e os carboidratos e 9,0 kcal/g para a gordura. a) Durante um exercício pesado, uma pessoa média gasta energia a uma taxa de 510 kcal/h. Durante quanto tempo você fará exercício com o "trabalho obtido" por um sonho? b) Caso a energia contida em um sonho pudesse de algum modo ser convertida em energia cinética do seu corpo como um todo, qual seria sua velocidade máxima depois de comer um sonho? Considere sua massa igual a 60 kg e expresse a resposta em m/s e km/h.

19.14 Um líquido é agitado vigorosamente em um recipiente bem isolado e, portanto, sua temperatura aumenta. Considere o líquido o sistema. a) Ocorre transferência de calor? Como você pode garantir? b) Existe trabalho realizado? Como você pode garantir? Por que é importante que a agitação seja vigorosa? c) Qual é o sinal de ΔU? Como você pode garantir?

19.15 Um gás ideal evolui do estado *a* para o estado *b* no diagrama *PV* mostrado na Figura 19.22. Durante esse processo, 400 J de calor são fornecidos, e a pressão dobra. a) Quanto trabalho é realizado pelo gás, ou sobre ele? Explique. b) Compare a temperatura do gás em *a* com a sua temperatura em *b*. Seja específico. c) Compare a energia interna do gás em *a* com a energia interna em *b*. Novamente, seja específico, e explique.

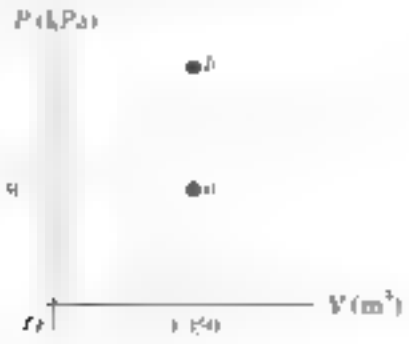


Figura 19.22 Exercício 19.15

19.16 Um sistema evolui do estado *a* até o estado *b* ao longo dos três caminhos mostrados na Figura 19.23. a) Ao longo de qual caminho o trabalho realizado é maior? Em qual caminho é menor? b) Sabendo que $U_b > U_a$, ao longo de qual caminho o valor absoluto do calor Q trocado com as vizinhanças é maior? Nesse caminho, o calor é liberado ou absorvido pelo sistema?

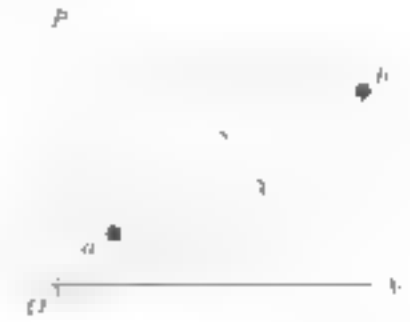


Figura 19.23 Exercício 19.16

19.17 Um sistema termodinâmico realiza o processo cíclico indicado na Figura 19.24. O ciclo é constituído por duas curvas fechadas, a malha I e a malha II. a) Durante um ciclo completo, o sistema realiza trabalho positivo ou negativo? b) O sistema realiza trabalho positivo ou negativo para cada malha separada I e II? c) Durante um ciclo completo, o sistema absorve ou liberta calor? d) Em cada malha separada I e II, o sistema absorve ou liberta calor?

Figura 19.24 Exercício 19.17

19.18 Um estudante realiza uma experiência de combustão queimando uma mistura de combustível e oxigênio em um recipiente metálico, a volume constante, mergulhado em um banho com água. Durante a experiência, verifica que a temperatura da água aumenta. Considere a mistura de combustível e oxigênio o sistema. a) Ocorre transferência de calor? Como você pode garantir? b) Existe trabalho realizado? Como você pode garantir? Por que é importante que a agitação seja irregular? c) Qual é o sinal de ΔU? Como você pode garantir?

19.19 **Ebulição da água sob pressão elevada.** Quando a água entra em ebulição sob pressão de 2,0 atm, o calor de vaporização é $2,20 \times 10^6$ J/kg, e o ponto de ebulição é 120 °C. A essa pressão, 1,0 kg de água possui volume igual a $1,0 \times 10^{-3}$ m^3, e 1,0 kg de vapor d'água possui volume igual a 0,824 m^3. a) Calcule o trabalho realizado quando se forma 1,0 kg de vapor d'água nessa temperatura. b) Calcule a variação da energia interna da água.

Seção 19.5 Tipos de processos termodinâmicos
Seção 19.6 Energia interna de um gás ideal
Seção 19.7 Calor específico de um gás ideal

19.20 Durante a compressão isotérmica de um gás ideal é necessário remover 335 J de calor do gás para manter sua temperatura constante. Qual é o trabalho realizado pelo gás nesse processo?

19.21 Um cilindro contém 0,250 mol do gás dióxido de carbono (CO_2) à temperatura de 27 °C. O cilindro possui um pistão sem atrito, que mantém sobre o gás uma pressão constante igual a 1,0 atm. O gás é aquecido e sua temperatura aumenta para 127 °C. Suponha que o CO_2 possa ser considerado um gás ideal. a) Desenhe um diagrama *PV* para esse processo. b) Qual é o trabalho realizado pelo gás nesse processo? c) Sobre o que esse trabalho é realizado? d) Qual é a variação da energia interna do gás? e) Qual é o calor fornecido ao gás? f) Qual seria o trabalho realizado se a pressão fosse igual a 0,50 atm?

19.22 Um cilindro contém 0,0100 mol de hélio a uma temperatura $T = 27$ °C. a) Qual é o calor necessário para aumentar a temperatura para 67 °C enquanto o volume permanece constante? Faça um desenho do diagrama *PV* para esse processo. b) Se, em vez de manter o volume constante, a pressão do hélio fosse mantida constante, qual seria o calor necessário para aumentar a temperatura de 27 °C para 67 °C? Faça um desenho do diagrama *PV* para esse processo. c) Qual é o fator responsável pela diferença obtida nos itens (a) e (b)? Em qual dos dois casos o calor necessário é maior? O que ocorre com o calor adicional? d) Caso o sistema fosse um gás ideal, qual seria a variação da energia interna da parte (a)? E da parte (b)? Como você compara as duas respostas? Por quê?

19.23 Em uma experiência para simular as condições no interior de um motor de automóvel, 645 J de calor são transferidos para 0,185 mol de ar contido no interior de um cilindro com volume igual a 40,0 cm^3. Inicialmente, o nitrogênio está a uma pressão de $3,0 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 780 K. a) Se o volume do cilindro é mantido constante, qual é a temperatura final do ar? Suponha que o ar seja constituído essencialmente de nitrogênio e use os dados da Tabela 19.1, mesmo que a pressão não seja baixa. Faça um desenho do diagrama *PV* para esse processo. b) Calcule a temperatura final do ar supondo que o volume do cilindro possa aumentar enquanto a pressão permanece constante. Faça um desenho do diagrama *PV* para esse processo.

19.24 Um gás ideal se expande enquanto a pressão é mantida constante. Durante esse processo, há transferência de calor para dentro do gás ou para fora do gás? Justifique sua resposta.

19.25 O calor Q flui para dentro de um gás monoatômico ideal, e o volume aumenta enquanto a pressão é mantida constante. Que fração da energia calorífica é usada para realizar o trabalho de expansão do gás?

19.26 Quando uma quantidade de gás monoatômico ideal se expande a uma pressão constante de $4,0 \times 10^4$ Pa, o volume do gás aumenta de $2,0 \times 10^{-3}$ m^3 para $8,0 \times 10^{-3}$ m^3. Qual é a variação da energia interna do gás?

19.27 Um cilindro com um pistão móvel contém 3,0 mols de gás N_2 (suponha que o N_2 se comporte como um gás ideal). a) O N_2 é aquecido a volume constante até que 1557 J de calor tenham sido fornecidos. Calcule a variação da temperatura. b) Suponha que a mesma quantidade de calor seja fornecida ao N_2 mas que, desta vez, o gás possa expandir-se ao mesmo tempo em que se mantém a pressão constante. Calcule a variação de temperatura. c) Em qual dos casos, (a) ou (b), a energia interna final do N_2 é maior? Como você pode garantir? O que contribui para a diferença entre os dois casos?

19.28 Três moles de um gás monoatômico ideal se expandem a uma pressão constante de 2,50 atm; o volume do gás varia de $3,20 \times 10^{-2}$ m^3 a $4,50 \times 10^{-2}$ m^3. a) Calcule as temperaturas inicial e final do gás. b) Calcule a quantidade de trabalho que o gás realiza ao se expandir. c) Calcule a quantidade de calor fornecida ao gás. d) Calcule a variação da energia interna do gás.

19.29 A temperatura de 0,150 mol de um gás ideal é mantida constante em 77 °C enquanto seu volume é reduzido para 25% do volume inicial. A pressão inicial do gás é 1,25 atm. a) Calcule o trabalho realizado pelo gás. b) Qual é a variação da sua energia interna? c) O gás troca calor com suas vizinhanças? Se sim, qual é o valor absoluto desse calor? O gás absorve ou libera calor?

19.30 O gás propano (C_3H_8) se comporta como um gás ideal com $\gamma = 1,127$. Determine o calor específico molar a volume constante e o calor específico molar à pressão constante.

19.31 Um cientista adiciona 970 J de calor a 1,75 mol de um gás ideal para aquecê-lo de 10 °C a 25 °C sob pressão constante. O gás realiza +223 J de trabalho durante a expansão. a) Calcule a variação de energia interna do gás. b) Calcule γ para o gás.

Seção 19.8 Processo adiabático de um gás ideal

19.32 Em um processo adiabático de um gás ideal, a pressão diminui. Nesse processo, a energia interna do gás aumenta ou diminui? Explique seu raciocínio.

19.33 Um gás ideal monoatômico com uma pressão inicial de $1,50 \times 10^5$ Pa e um volume inicial de 0,0800 m^3, sofre uma compressão adiabática até um volume igual a 0,0400 m^3. a) Qual é a pressão final? b) Qual é o trabalho realizado pelo gás nesse processo? c) Qual é a razão entre a temperatura final e a temperatura inicial do gás? O gás é aquecido ou resfriado nesse processo de compressão?

19.34 O motor do carro esportivo Ferrari F355 F1 injeta o ar a 20 °C e 1,0 atm e comprime-o adiabaticamente até atingir 0,0900 do seu volume inicial. O ar pode ser considerado um gás ideal com $\gamma = 1,40$. a) Desenhe um diagrama *PV* para esse processo. b) Calcule a temperatura e a pressão no estado final.

19.35 Dois mols de monóxido de carbono (CO) estão a uma pressão inicial de 1,2 atm e a um volume inicial de 30 L. O gás é então comprimido adiabaticamente a ¼ desse volume. Suponha que o gás possa ser considerado ideal. Qual é a variação da energia interna do gás? A energia interna aumenta ou diminui? A temperatura do gás aumenta ou diminui durante esse processo? Explique.

19.36 Um jogador de basquete faz a bola bater no chão, comprimindo-a a 80,0% de seu volume original. O ar (suponha que o ar seja essencialmente um gás) dentro da bola está originalmente à temperatura de 20 °C e a uma pressão de 2,0 atm. O diâmetro da bola é 23,9 cm. a) A que temperatura chega o ar na bola em sua compressão máxima? b) De quanto é a variação da energia interna do ar entre o estado original da bola e sua compressão máxima?

19.37 Durante uma expansão adiabática, a temperatura de 0,450 mol de argônio (Ar) cai de 50 °C para 10 °C. O argônio pode ser tratado como um gás ideal. a) Desenhe um diagrama *PV* para esse processo. b) Calcule o trabalho realizado pelo gás. c) Qual é a variação da energia interna do gás?

19.38 Um cilindro contém 0,100 mol de um gás ideal monoatômico. No estado inicial, o gás está sob pressão de $1,0 \times 10^5$ Pa e ocupa um volume igual a $2,50 \times 10^{-3}$ m^3. a) Calcule a temperatura inicial do gás em kelvins. b) O gás sofre uma expansão, atingindo o dobro de seu volume inicial. Ache a temperatura final do gás (em kelvins) e a pressão do gás sabendo que a expansão é i) isotérmica; ii) isobárica; iii) adiabática.

19.39 Em um dia quente de verão, uma grande massa de ar (pressão atmosférica igual a $1,01 \times 10^5$ Pa) é aquecida pelo solo até uma temperatura de 26 °C e então começa a subir através do ar mais frio circundante. (Esse processo pode ser considerado aproximadamente adiabático; você sabe explicar por quê?) Calcule a temperatura da massa de ar quando houver subido a um nível em que a pressão

atmosférica é apenas $(0{,}850) \times 10^5$ Pa. Suponha que o ar seja um gás ideal, com $\gamma = 1{,}40$. (Essa taxa de resfriamento do ar seco em ascensão, que corresponde a cerca de 10 °C a cada 100 m de altitude, chama-se *gradiente adiabático seco*.)

Problemas

19.40 A Figura 19.25 mostra o diagrama *PV* de uma expansão isotérmica de 1,50 mol de um gás ideal, a uma temperatura de 15 °C. a) Qual é a variação da energia interna do gás? Explique. b) Calcule o trabalho realizado pelo gás ou sobre o gás, e o calor absorvido (ou liberado) pelo gás durante a expansão.

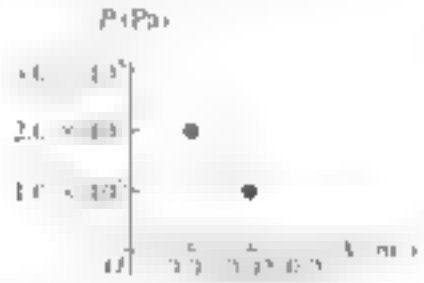


Figura 19.25 Problema 19.40

19.41 Uma quantidade de ar vai do estado *a* até o estado *b* ao longo de uma linha reta no diagrama *PV* (Figura 19.26). a) Nesse processo, a temperatura do gás aumenta, diminui ou permanece constante? Explique. b) Se $V_a = 0{,}0700\ m^3$, $V_b = 0{,}1100\ m^3$, $P_a = 1{,}0 \times 10^5$ e $P_b = 1{,}40 \times 10^5$ Pa, qual é o trabalho *W* realizado pelo gás nesse processo? Suponha que o gás possa ser tratado como um gás ideal.

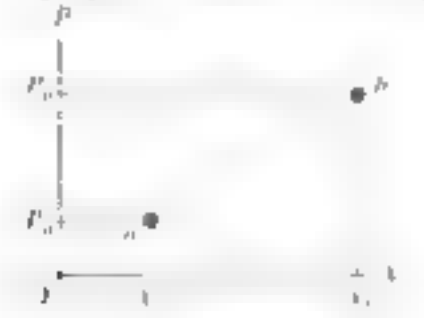


Figura 19.26 Problema 19.41

19.42 Meio mol de um gás ideal vai do estado *a* ao estado *c*, como mostra a Figura 19.27. a) Calcule a temperatura final do gás. b) Calcule o trabalho realizado sobre o gás ou pelo gás enquanto passa do estado *a* ao estado *c*. c) O calor deixa o sistema ou entra no sistema durante esse processo? Que quantidade de calor? Explique.

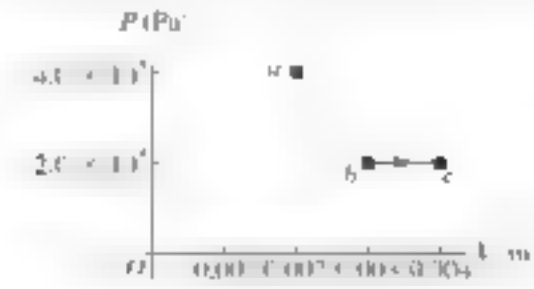


Figura 19.27 Problema 19.42

19.43 Quando um sistema vai do estado *a* até o estado *b* (Figura 19.28) pelo caminho *acb*, um calor igual a 90,0 J flui para o interior do sistema, e um trabalho de 60,0 J é realizado pelo sistema. a) Qual é o calor que flui para o interior do sistema pelo caminho *adb*, sabendo que o trabalho realizado pelo sistema é igual a 15,0 J? b) Quando o sistema retorna de *b* para *a* pelo caminho encurvado, o valor absoluto do trabalho realizado pelo sistema é igual a 35,0 J. O sistema absorve ou libera calor? Qual é a quantidade desse calor? c) Sabendo que $U_a = 0$ e $U_d = 8{,}0$ J, calcule os calores absorvidos nos processos *ad* e *db*.

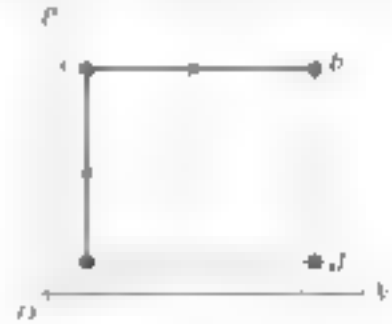


Figura 19.28 Problema 19.43

19.44 Um sistema termodinâmico vai do estado *a* até o estado *c* mostrado na Figura 19.29 pelo caminho *abc* ou pelo caminho *adc*. Pelo caminho *abc*, o trabalho *W* realizado pelo sistema é igual a 450 J. Pelo caminho *adc*, *W* é igual a 120 J. As energias internas de cada um dos quatro estados mostrados na Figura são $U_a = 150$ J, $U_b = 240$ J, $U_c = 680$ J e $U_d = 330$ J. Determine o calor trocado em cada um dos quatro processos *ab*, *bc*, *ad* e *dc*, e verifique, em todos, se o sistema absorve ou libera calor.

Figura 19.29 Problema 19.44

19.45 Um volume de ar (considerado um gás ideal) é primeiro resfriado sem variação de volume e depois expandido sem variação de pressão, como mostra o caminho *abc* na Figura 19.30. a) Compare a temperatura final do gás com a sua temperatura inicial. b) Quanto calor o ar troca com seu meio ambiente durante o processo *abc*? O ar absorve calor ou libera calor durante esse processo? Explique. c) Se, em vez disso, o ar se expandisse do estado *a* ao estado *c* pelo caminho mostrado em linha reta, quanto calor ele trocaria com seu meio ambiente?

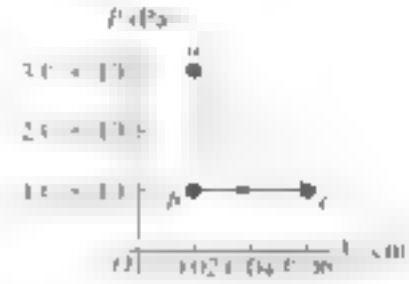


Figura 19.30 Problema 19.45

19.46 Três moles de gás argônio (considerado um gás ideal) originalmente a uma pressão de $1{,}50 \times 10^4$ Pa e a um volume de 0,0280 m^3 são aquecidos e expandidos sob pressão constante até um volume de 0,0435 m^3, depois aquecidos a volume constante até que a pressão atinja $3{,}50 \times 10^4$ Pa, a seguir resfriados e comprimidos à pressão constante até que o volume volte a ser 0,0280 m^3 e, finalmente, resfriados a volume constante até que a pressão volte ao valor original de $1{,}50 \times 10^4$. a) Desenhe o diagrama *PV* desse ciclo. b) Calcule o trabalho total realizado pelo gás ou sobre o gás durante o ciclo. c) Calcule o calor total trocado com o meio ambiente. O gás ganha ou perde calor, no final das contas?

19.47 Dois mols de um gás monatômico ideal passam pelo ciclo *abc*. No ciclo completo, 800 J de calor fluem a partir do gás. O processo *ab* ocorre à pressão constante, e o processo *bc*, a volume constante. Os estados *a* e *b* apresentam temperaturas $T_a = 200$ K e $T_b = 300$ K. a) Desenhe o diagrama *PV* do ciclo. b) Qual é o trabalho *W* do processo *ca*?

19.48 Três mols de um gás ideal passam pelo ciclo *abc* mostrado na Figura 19.31. O C_p desse gás é 29.1 J/mol · K. O processo *ac* ocorre sob pressão constante, o processo *bc* a volume constante e o processo *ab* é adiabático. As temperaturas do gás nos estados *a*, *c* e *b* são $T_a = 300$ K, $T_c = 492$ K e $T_b = 600$ K. Calcule o trabalho total *W* do ciclo.

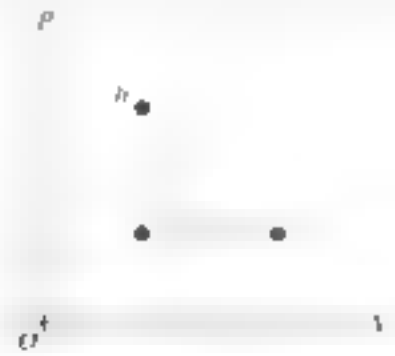


Figura 19.31 Problema 19.48.

19.49 Começando com 2,50 mols de gás N_2 (suposto ideal) em um cilindro a 1,0 atm e a 20 °C, um químico aquece o gás primeiro a volume constante, fornecendo $1,52 \times 10^3$ J de calor, depois continua aquecendo e permite que o gás se expanda sob pressão constante até o dobro do volume original. a) Calcule a temperatura final do gás. b) Calcule a quantidade de trabalho realizado pelo gás. c) Calcule a quantidade de calor fornecido ao gás enquanto ele se expandia. d) Calcule a variação de energia interna do gás em todo o processo.

19.50 O gás nitrogênio no interior de um recipiente que pode se expandir é resfriado de 50 °C até 10 °C, mantendo-se a pressão constante e igual a $3,0 \times 10^5$ Pa. O calor total libertado pelo gás é igual a $2,50 \times 10^4$ J. Suponha que o gás possa ser tratado como um gás ideal. a) Calcule o número de moles do gás. b) Calcule a variação da energia interna do gás. c) Calcule o trabalho realizado pelo gás. d) Qual seria o calor libertado pelo gás para a mesma variação da temperatura caso o volume permanecesse constante?

19.51 Em certo processo, o calor libertado pelo sistema é $2,15 \times 10^3$ J e, ao mesmo tempo, o sistema se contrai sob a ação de uma pressão externa constante igual a $9,50 \times 10^5$ Pa. A energia interna é a mesma no estado inicial e no estado final. Calcule a variação de volume do sistema. (O sistema *não* é um gás ideal.)

19.52 Um cilindro com um pistão móvel sem atrito, como o mostrado na Figura 19.5, contém uma quantidade de gás hélio. Inicialmente o gás está a uma pressão igual a $1,0 \times 10^5$ Pa, possui uma temperatura de 300 K e ocupa um volume de 1,50 L. A seguir, o gás passa por dois processos. No primeiro, o gás é aquecido e o pistão se move para manter a temperatura constante e igual a 300 K. Esse processo continua até que a pressão atinja o valor $2,50 \times 10^5$ Pa. No segundo processo, o gás é comprimido sob pressão constante até retornar ao seu volume inicial de 1,50 L. Suponha que o gás possa ser tratado como um gás ideal. a) Em um diagrama *PV*, mostre os dois processos. b) Calcule o volume do gás no final do primeiro processo; calcule a temperatura e a pressão no final do segundo processo. c) Calcule o trabalho total realizado pelo gás nos dois processos. d) O que você faria para o gás voltar à pressão e temperatura originais?

19.53 **Um processo termodinâmico em um líquido.** Uma engenheira química está examinando as propriedades do metanol (CH_3OH) no estado líquido. Ela usa um cilindro de aço com área da seção reta igual a 0,0200 m^2 e contendo $1,30 \times 10^{-3}$ m^3 de metanol. O cilindro possui um pistão bem ajustado que suporta uma carga de $3,0 \times 10^4$ N. A temperatura do sistema aumenta de 20 °C para 50 °C. Para o metanol, o coeficiente de dilatação volumétrica é $1,20 \times 10^{-3}$ K^{-1}, a densidade é igual a 791 kg/m^3 e o calor específico à pressão constante $c_p = 2,51 \times 10^3$ J/kg · K. Despreze a dilatação volumétrica do cilindro de aço. Calcule a) o aumento de volume do metanol; b) o trabalho mecânico realizado pelo metanol contra a força de $3,0 \times 10^4$ N; c) o calor fornecido ao metanol; d) a variação da energia interna do metanol. e) Com base em seus resultados, verifique se existe alguma diferença substancial entre o calor específico c_p (à pressão constante) e o calor específico c_v (a volume constante) do metanol nessas circunstâncias.

19.54 **Um processo termodinâmico em um sólido.** Um cubo de cobre com aresta igual a 2,0 cm é suspenso por um fio. (As propriedades físicas do cobre são fornecidas nas tabelas 14.1, 17.2 e 17.3.) O cubo é aquecido com um bico de gás de 20 °C até 90 °C. O ar nas vizinhanças do cubo está na pressão atmosférica ($1,01 \times 10^5$ Pa). Calcule a) o aumento de volume do cubo; b) o trabalho mecânico realizado pelo cubo contra a pressão do ar circundante; c) o calor fornecido ao cubo; d) a variação da energia interna do cubo. e) Com base em seus resultados, verifique se existe alguma diferença substancial entre o calor específico c_p (à pressão constante) e o calor específico c_v (a volume constante) do cobre nessas circunstâncias.

19.55 **Um processo termodinâmico em um inseto.** Para sua defesa, o escaravelho africano *Stenaptinus insignis* pode emitir um jato de substâncias químicas disparado pela extremidade móvel do seu abdômen (Figura 19.32). O corpo do escaravelho possui reservatórios com duas substâncias diferentes; quando ele é perturbado, essas substâncias são combinadas em uma câmara de reação, produzindo um composto que é aquecido de 20 °C até 100 °C pelo calor da reação. A pressão elevada produzida permite que o composto seja lançado para fora com velocidades da ordem de 19 m/s (68 km/h), assustando seus predadores. (O escaravelho mostrado nesta figura tem cerca de 2 cm de comprimento.) Calcule o calor da reação das substâncias (em J/kg). Suponha que os calores específicos das substâncias e do líquido borrifado sejam iguais ao calor específico da água, $4,19 \times 10^3$ J/kg · K, e que a temperatura inicial das substâncias seja 20 °C.

Figura 19.32 Problema 19.55.

19.56 **Pesquisas em altitudes elevadas.** Um grande balão de pesquisa contendo $2,0 \times 10^3$ m^3 de gás hélio a 1,0 atm e a uma temperatura de 15 °C sobe rapidamente a partir do nível do solo a uma altitude em que a pressão atmosférica é apenas 0,900 atm (Figura 19.33). Suponha que o hélio se comporte como um gás ideal e que a subida do balão seja tão rápida que não permita trocas de calor significativas com o ar circundante. a) Calcule o volume do gás na altitude mais elevada. b) Calcule a temperatura do gás na altitude mais elevada. c) Qual é a variação da energia interna do hélio à medida que o balão sobe para a altitude mais elevada?

Figura 19.33 Problema 19.56

19.57 **Chinook.** Durante certas estações, ventos fortes chamados de *chinooks* sopram do oeste e atingem o leste das Montanhas Rochosas, descendo as montanhas até Denver e áreas adjacentes. Embora as montanhas sejam frias, o vento em Denver é muito quente; depois de alguns minutos da chegada dos ventos *chinooks*, a temperatura pode aumentar de até 20 °C (a palavra *chinook* deriva de uma homônima tribo de índios americanos e significa 'comedor de neve'). Ventos semelhantes ocorrem nos Alpes (chamados de *foehn*) e no sul da Califórnia (chamados de *Santa Anas*). a) Explique por que a temperatura do vento *chinook* aumenta à medida que ele desce a montanha. Por que é importante que a velocidade do vento seja grande? b) Suponha que um vento forte esteja se dirigindo para Denver (altitude igual a 1650 m) proveniente de Grays Peak (a 80 km a oeste de Denver, a uma altitude igual a 4350 m) onde a pressão do ar é de $5,60 \times 10^4$ Pa e a temperatura é igual a −15 °C. Em Denver, antes da chegada do vento, a pressão do ar é de $8,12 \times 10^4$ Pa, e a temperatura é 2 °C. Qual deve ser a elevação da temperatura em Denver quando o *chinook* chegar?

19.58 Um certo gás ideal possui calor específico molar a volume constante C_V. Uma amostra desse gás inicialmente ocupa um volume V_0 a uma pressão P_0 e uma temperatura absoluta T_0. O gás se expande isobaricamente até um volume $2V_0$, a seguir sofre uma expansão adiabática até um volume final igual a $4V_0$. a) Desenhe um diagrama *PV* dessa sequência de processos. b) Calcule o trabalho total realizado pelo gás nessa sequência de processos. c) Calcule a temperatura final do gás. d) Calcule o valor absoluto do calor Q trocado com as vizinhanças nessa sequência de processos e determine o sentido do fluxo do calor.

19.59 Uma bomba de ar é composta por um cilindro de 0,250 m de comprimento com um pistão móvel. A bomba é usada para comprimir o ar (a uma pressão absoluta igual a $1,01 \times 10^5$ Pa) no interior de um tanque muito grande que está a uma pressão manométrica de $4,20 \times 10^5$ Pa. (Para o ar, $C_V = 20,8$ J/kg · K.) a) O pistão começa a compressão na extremidade superior aberta do cilindro. Qual é a distância entre este ponto e o ponto do cilindro no qual o ar começa a fluir para o interior do tanque? Suponha que a compressão seja adiabática. b) Se o ar entra na bomba com uma temperatura de 27 °C, qual é a temperatura do ar comprimido? c) Qual é o trabalho realizado pela bomba para fazer 20,0 mols de ar entrar no tanque?

19.60 **Motor com turbocompressor e inter-resfriador.** A potência do motor de um automóvel é diretamente proporcional à massa de ar empurrada para dentro dos cilindros do motor para produzir uma reação química com a gasolina. Muitos carros possuem um *turbocompressor* que produz a compressão do ar antes de ele entrar no motor, fornecendo maior quantidade de massa por unidade de volume. Essa compressão rápida, essencialmente adiabática, também aquece o ar. Para aumentar ainda mais a compressão, o ar passa através de um *inter-resfriador* onde troca calor com suas vizinhanças à pressão constante. O ar é a seguir injetado nos cilindros. Em um mecanismo típico, o ar é conduzido ao turbocompressor sob pressão atmosférica ($1,01 \times 10^5$ Pa), com densidade $\rho = 1,23$ kg/m³ e temperatura igual a 15 °C. Ele é comprimido adiabaticamente até $1,45 \times 10^5$ Pa. No inter-resfriador, ele é resfriado até sua temperatura original de 15 °C a uma pressão constante de $1,45 \times 10^5$ Pa. a) Desenhe um diagrama *PV* para essa sequência de processos. b) Se o volume de um dos cilindros for igual a 575 cm³, qual será a massa de ar proveniente do inter-resfriador que encherá um cilindro à pressão de $1,45 \times 10^5$ Pa? Em comparação com a potência de um motor que recebe ar a uma pressão de $1,01 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 15 °C, qual é a porcentagem de aumento de potência obtida usando-se um turbocompressor e um inter-resfriador? c) Caso o inter-resfriador não seja usado, qual deverá ser a massa de ar proveniente do turbocompressor que encherá um cilindro à pressão de $1,45 \times 10^5$ Pa? Em comparação com a potência de um motor que recebe ar a uma pressão de $1,01 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 15,0 °C, qual é a porcentagem de aumento de potência obtida usando-se apenas o turbocompressor?

19.61 Um gás ideal monoatômico se expande lentamente até ocupar um volume igual ao dobro do volume inicial, realizando um trabalho de 300 J nesse processo. Calcule o calor fornecido ao gás e a variação da energia interna do gás, sabendo que o processo é a) isotérmico, b) adiabático, c) isobárico.

19.62 Um cilindro com um pistão contém 0,250 mol de oxigênio a uma pressão de $2,40 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 355 K. Suponha que o oxigênio possa ser tratado como um gás ideal. O gás inicialmente se expande isobaricamente até ocupar um volume igual ao dobro do volume inicial. A seguir ele é comprimido isotermicamente de volta ao seu volume inicial e, finalmente, é resfriado isocoricamente até atingir sua pressão inicial. a) Desenhe um diagrama *PV* para essa sequência de processos. b) Calcule a temperatura durante a compressão isotérmica. c) Calcule a pressão máxima. d) Calcule o trabalho total realizado pelo pistão sobre o gás nessa sequência de processos.

19.63 Use as condições e os processos mencionados no Problema 19.62 para calcular a) o trabalho realizado pelo gás, o calor fornecido ao gás e a variação da energia interna durante a expansão inicial; b) o trabalho realizado pelo gás, o calor fornecido ao gás e a variação da energia interna durante o resfriamento final; c) a variação da energia interna durante a compressão isotérmica.

19.64 Um cilindro com um pistão contém 0,150 mol de nitrogênio a uma pressão de $1,80 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 300 K. Suponha que o nitrogênio possa ser tratado como um gás ideal. O gás inicialmente é comprimido isobaricamente até ocupar a metade do seu volume inicial. A seguir, expande-se adiabaticamente de volta a seu volume inicial e, finalmente, é aquecido isocoricamente até atingir sua pressão inicial. a) Desenhe um diagrama *PV* para essa sequência de processos. b) Calcule a temperatura no início e no fim da expansão adiabática. c) Calcule a pressão mínima.

19.65 Use as condições e os processos mencionados no Problema 19.64 para calcular a) o trabalho realizado pelo gás, o calor fornecido ao gás e a variação da energia interna durante a compressão inicial; b) o trabalho realizado pelo gás, o calor fornecido ao gás e a variação da energia interna durante a expansão adiabática; c) o trabalho realizado pelo gás, o calor fornecido ao gás e a variação da energia interna durante o aquecimento final.

19.66 **Comparação entre processos termodinâmicos.** Em um cilindro, 1,20 mol de gás ideal monoatômico inicialmente a uma pressão de $3,60 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 300 K se expande até o triplo do seu volume inicial. Calcule o trabalho realizado pelo gás quando a expansão é a) isotérmica; b) adiabática; c) isobárica. d) Usando um diagrama PV, ilustre cada um desses processos. Em qual deles o trabalho realizado pelo gás possui o maior valor absoluto? É o menor valor absoluto? e) Em qual desses processos o calor trocado possui o maior valor absoluto? E o menor valor absoluto? f) Em qual desses processos a variação da energia interna possui o maior valor absoluto? E o menor valor absoluto?

19.67 Em um cilindro vedado com um pistão, você comprime rapidamente 3,0 L de gás N_2 inicialmente a 1,0 atm de pressão e a 0 °C até a metade de seu volume original. Suponha que o N_2 se comporte como um gás ideal. a) Calcule a temperatura final e a pressão final do gás. b) Se você agora resfriar o gás de volta a 0 °C sem variar a pressão, qual será o volume final?

Problemas desafiadores

19.68 **Oscilações de um pistão.** Um cilindro vertical de raio r contém uma quantidade de gás ideal e possui um pistão ajustado de massa m que pode se mover livremente (Figura 19.34). Não existe atrito entre o pistão e as paredes do cilindro e todo o cilindro é colocado em um banho sob temperatura constante. A pressão do ar externo é P_0. No equilíbrio, o pistão está a uma altura h acima da base do cilindro. a) Calcule a pressão absoluta do gás preso abaixo do pistão na posição de equilíbrio. b) O pistão é puxado para cima de uma distância pequena y e a seguir é liberado. Calcule a força resultante que atua sobre o pistão quando ele está a uma distância igual a $h + y$ acima da base do cilindro, onde y é muito menor do que h. c) Depois que o pistão é puxado para cima e liberado, ele oscila para cima e para baixo. Calcule a frequência dessas pequenas oscilações. Se o deslocamento não for pequeno, o movimento continua sendo harmônico simples? Como você pode ter certeza disso?

Figura 19.34 Problema desafiador 19.68

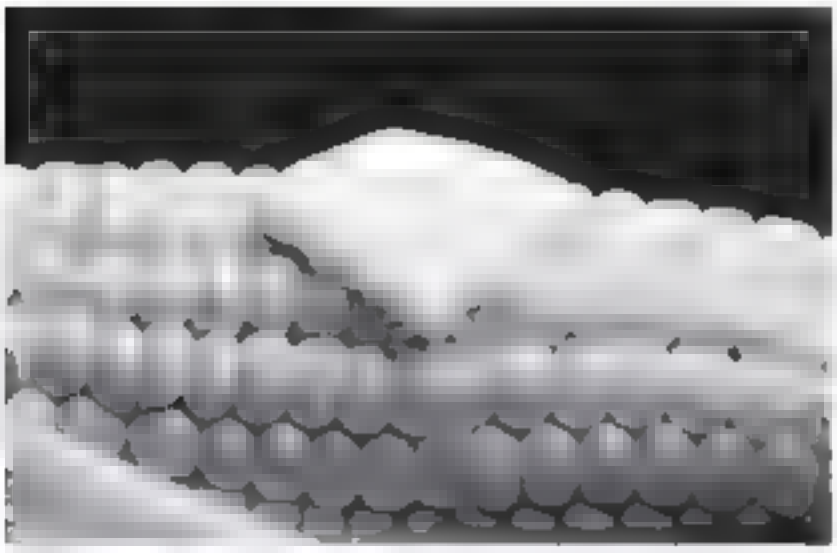
19.69 A equação de estado de van der Waals é a representação aproximada do comportamento de gases com pressões elevadas, sendo dada pela Equação (18.7):

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

onde a e b são constantes que possuem valores diferentes em cada tipo de gás. (No caso particular em que $a = b = 0$, esta é a equação do gás ideal.) a) Calcule o trabalho realizado por um gás que segue essa equação de estado quando ele se expande de um volume V_1 até um volume V_2. Mostre que seu resultado concorda com o trabalho realizado por um gás ideal obtido no Exemplo 19.1 (Seção 19.2) quando você faz $a = b = 0$. b) Para o etano (C_2H_6), $a = 0,554$ J · m³/mol² e $b = 6,38 \times 10^{-5}$ m³/mol. Calcule o trabalho W realizado por 1,80 mol de etano quando ele se expande de $2,0 \times 10^{-4}$ m³ até $4,0 \times 10^{-4}$ m³ à temperatura constante de 300 K. Faça os cálculos usando i) a equação de estado de van der Waals e ii) a equação de estado do gás ideal. c) Qual é a diferença entre os dois resultados do cálculo de W no item (b)? Em qual equação de estado W possui o maior valor? Use a interpretação dada na Seção 18.1 para as constantes a e b para explicar a razão desse resultado. A diferença entre as duas equações de estado é importante neste caso?

A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

20



A segunda lei da termodinâmica diz que o calor flui naturalmente de um corpo quente (como uma espiga recém-cozida de milho) para um corpo frio (como uma porção de manteiga). Será que existe *alguma* possibilidade de o calor passar de um corpo frio para um corpo quente?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O que determina se um processo termodinâmico é reversível ou irreversível.
- O que é máquina térmica, e como calcular a sua eficiência.
- A física das máquinas de combustão interna.
- Como os refrigeradores e as máquinas térmicas se relacionam, e como analisar o desempenho de um refrigerador.
- Como a segunda lei da termodinâmica estabelece limites à eficiência das máquinas e ao desempenho dos refrigeradores.
- Como fazer cálculos envolvendo o ciclo ideal de Carnot para máquinas e refrigeradores.
- O que significa a entropia, e como usar esse conceito para analisar processos termodinâmicos.

Muitos processos termodinâmicos ocorrem naturalmente em um dado sentido, mas não ocorrem em sentido oposto. Por exemplo, o calor sempre flui de um corpo quente para um corpo frio, nunca em sentido contrário. O fluxo de calor de um corpo frio para um corpo quente não violaria a primeira lei da termodinâmica; a energia seria conservada. Porém, isso não ocorre na natureza. Por que não? Como outro exemplo, note que é fácil converter completamente a energia mecânica em calor; isso ocorre sempre que usamos o freio para parar um carro. Indo no sentido inverso, existem muitos dispositivos que convertem *parcialmente* o calor em energia mecânica. (O motor de um automóvel é um exemplo.) Porém, nem o mais inteligente inventor conseguiu construir uma máquina capaz de converter *completamente* uma quantidade de calor em energia mecânica. Novamente, por que não?

A resposta para essas duas perguntas diz respeito aos *sentidos* dos processos termodinâmicos, e é dada pela *segunda lei da termodinâmica*. Essa lei determina limites fundamentais para a eficiência de uma máquina ou de uma usina elétrica. Ela também estipula limites para a energia mínima que deve ser fornecida a um refrigerador. Logo, a segunda lei é diretamente relevante para muitos problemas práticos importantes.

Podemos também enunciar a segunda lei em termos do conceito de *entropia*, uma grandeza que mede o grau de desordem de um sistema. A idéia de entropia ajuda a entender por que a tinta que se mistura com água não pode jamais ser separada espontaneamente, e qual é a razão pela qual uma grande quantidade de processos aparentemente possíveis nunca ocorre na natureza.

20.1 Sentido de um processo termodinâmico

Os processos termodinâmicos que ocorrem na natureza são todos **processos irreversíveis**. Esses processos são aqueles que ocorrem em um determinado sentido, porém não ocorrem no sentido contrário. O fluxo de calor de um corpo quente para um corpo frio ocorre irreversivelmente, como no caso da expansão livre de um gás estudada nas seções 19.3 e 19.6. Quando um livro desliza sobre uma mesa, sua energia mecânica é convertida em calor pelo atrito; esse processo é irreversível, pois ninguém jamais observou o processo inverso (no qual um livro em repouso sobre a mesa começasse a se mover espontaneamente e a temperatura do livro e da mesa começasse a diminuir). O princípa-

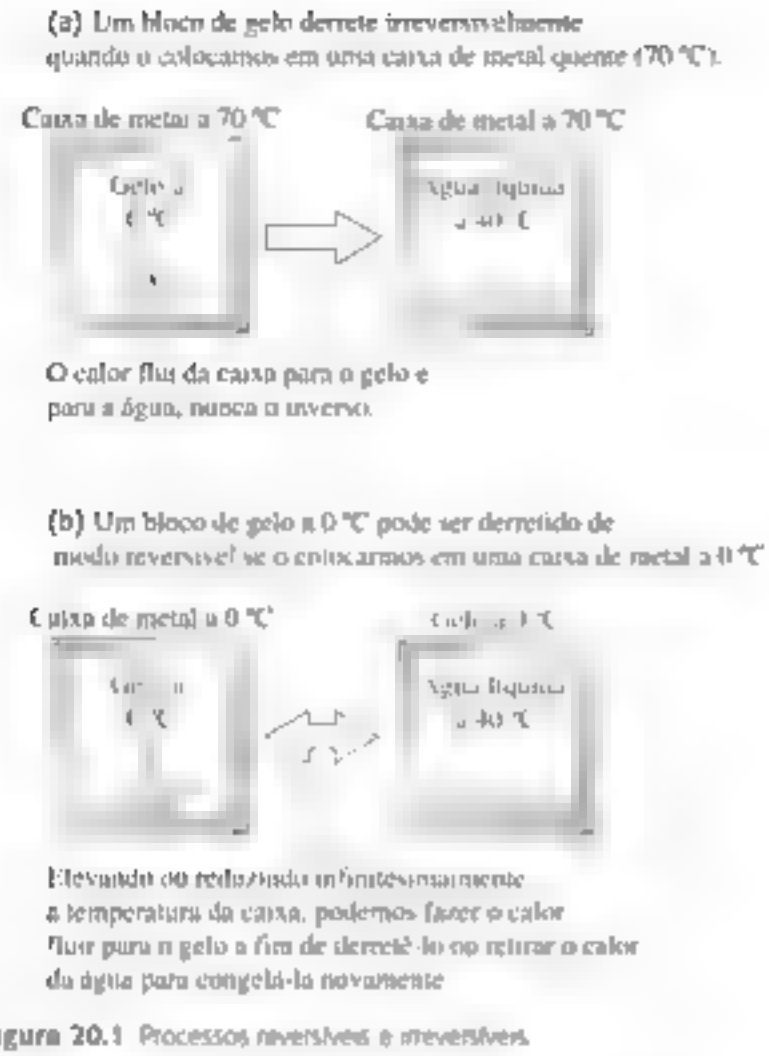

(a) Um bloco de gelo derrete irreversivelmente
quando o colocamos em uma caixa de metal quente (70 °C).
Caixa de metal a 70 °C
Caixa de metal a 70 °C
O calor flui da caixa para o gelo e
para a água, nunca o inverso.
(b) Um bloco de gelo a 0 °C pode ser derretido de
modo reversível se o colocarmos em uma caixa de metal a 0 °C
Caixa de metal a 0 °C
Elevando de modo infinitesimal
a temperatura da caixa, podemos fazer o calor
fluir para o gelo a fim de derretê-lo ou retirar o calor
da água para congelá-la novamente

Figura 20.1 Processos reversíveis e irreversíveis.

tópico deste capítulo é a *segunda lei da termodinâmica*, que determina qual é o sentido preferencial desses processos.

Apesar desse sentido preferencial de todo processo natural, podemos imaginar uma classe de processos idealizados que *poderiam* ser reversíveis. Um sistema que realiza esse **processo reversível** ideal está sempre próximo do equilíbrio termodinâmico com as vizinhanças e no interior do próprio sistema. Qualquer mudança de estado que ocorra pode ser invertida (forçada a realizar-se no sentido contrário) produzindo-se variações infinitesimais nas condições do sistema. Por exemplo, o fluxo de calor entre dois corpos com uma diferença de temperatura infinitesimal entre si pode ser invertido variando apenas levemente uma ou outra temperatura.

Um processo reversível é, portanto, um **processo de equilíbrio**, no qual o sistema está sempre em equilíbrio termodinâmico. Obviamente, se um sistema está *realmente* em equilíbrio termodinâmico não pode ocorrer nenhuma mudança no estado do sistema. O calor não poderia fluir nem para dentro nem para fora de um sistema que tivesse uma temperatura rigorosamente constante em todos os seus pontos, e um sistema que estivesse realmente em equilíbrio mecânico não poderia realizar nenhum trabalho sobre suas vizinhanças. Uma transformação reversível é uma idealização que não pode ser realizada com precisão no mundo real. Entretanto, fazendo o gradiente de pressão e o gradiente de temperatura muito pequenos, podemos manter o sistema muito próximo de seu estado de equilíbrio, e o processo pode se tornar aproximadamente reversível. Essa é a razão pela qual chamamos um processo reversível de *processo de quase-equilíbrio*.

Em contraste, o fluxo de calor com diferença de temperatura finita, a expansão livre de um gás e a conversão de trabalho em calor pelo atrito são todos processos *irreversíveis*; nenhuma pequena variação seria capaz de fazer esses sistemas sofrerem um processo inverso. Todos eles são também processos de *não-equilíbrio*, nos quais o sistema não está em equilíbrio termodinâmico em nenhuma etapa do processo, e somente atinge o equilíbrio no final do processo.

Desordem e processos termodinâmicos

O *estado aleatório* ou o grau de *desordem* do estado final de um sistema pode ser relacionado ao sentido da realização de um processo natural. Por exemplo, imagine uma tarefa de organização monótona, tal como colocar em ordem alfabética milhares de títulos de livros impressos em cartões de arquivos. Jogue para o ar o conjunto todo dos cartões que estavam em ordem alfabética. Quando eles atingirem o solo, estarão em ordem alfabética? Não, a tendência normal é que eles cheguem ao solo em um estado aleatório ou desordenado. Na expansão livre de um gás, discutida nas seções 19.3 e 19.6, o ar está mais desordenado depois que se expande para o recipiente inteiro do que quando estava contido somente em um dos lados do recipiente; do mesmo modo, suas roupas ficam mais desordenadas quando estão espalhadas no chão de seu quarto do que quando estavam arrumadas no interior do armário.

Analogamente, a energia cinética macroscópica é a energia associada à organização, ao movimento coordenado de muitas moléculas; porém, a transferência de calor envolve variações de energia do estado aleatório, ou o movimento molecular desordenado. Logo, a conversão de energia mecânica em calor envolve um aumento de desordem do sistema.

Nas seções seguintes apresentaremos a segunda lei da termodinâmica considerando duas grandes classes de dispositivos: as *máquinas térmicas*, que convertem trabalho em calor com êxito parcial, e os *refrigeradores*, que transportam o calor de um corpo frio para um corpo quente com êxito parcial.

Teste sua compreensão da Seção 20.1 A sua mão direita e a sua mão esquerda normalmente estão à mesma temperatura, exatamente como a caixa de metal e o gelo na Figura 20.1b. Esfregar as mãos uma na outra para aquecê-las é (i) um processo reversível ou (ii) um processo irreversível? ■

20.2 Máquinas térmicas

A essência de nossa sociedade tecnológica é a capacidade de utilizar fontes de energia além da mera força muscular. Algumas vezes, a energia mecânica está disponível diretamente; a força da água e do vento são exemplos disso. Mas a maior parte de nossa energia vem da queima de combustíveis fósseis (carvão, petróleo e gás) e de rea-

ções nucleares. Elas fornecem a energia que é transferida como *calor*, usado diretamente no aquecimento de edifícios, para cozinhar e em processos químicos, contudo, para impulsionar um veículo ou para fazer funcionar qualquer máquina, necessitamos de energia *mecânica*.

Assim, é importante saber como obter calor de uma fonte e converter a maior parcela possível desse calor em energia mecânica ou trabalho. Isso é o que ocorre nos motores a gasolina dos automóveis, em um motor a jato de um avião, na turbina a vapor de uma usina termelétrica e em muitos outros sistemas. Processos relacionados a esses ocorrem no reino animal: a energia do alimento é 'queimada' (ou seja, os carboidratos se combinam com o oxigênio e a reação produz água, dióxido de carbono e energia) e parcialmente convertida em energia mecânica quando o músculo de um animal realiza trabalho sobre o ambiente.

Qualquer dispositivo que transforma calor parcialmente em trabalho ou em energia mecânica denomina-se **máquina térmica**. Geralmente, uma quantidade de matéria no interior da máquina recebe ou rejeita calor, expande-se e se comprime, e algumas vezes sofre transições de fase. Essa matéria é chamada de **substância de trabalho** da máquina. Em máquinas de combustão interna, a substância de trabalho é a mistura de gasolina com ar; na turbina a vapor, a substância de trabalho é a água.

O tipo mais simples de máquina que vamos analisar é aquela cuja substância de trabalho sofre um **processo cíclico**, uma sequência de processos que, ao final, reconduzem a substância ao seu estado inicial. Em uma turbina a vapor, a água é reciclada e usada indefinidamente. A máquina de combustão interna não usa sempre o mesmo ar; ainda assim, podemos analisar esse tipo de máquina em termos de processo cíclico aproximadamente igual ao processo real.

Figura 20.2 Todos os veículos motorizados (exceto os veículos com motor elétrico) usam máquinas térmicas para propulsão. (Os veículos híbridos usam o motor de combustão interna para ajudar a carregar as baterias do motor elétrico.)

Reservatório quente e reservatório frio

Todas as máquinas térmicas *absorvem* calor de uma fonte a temperaturas relativamente altas, realizam algum trabalho mecânico e *rejeitam* algum calor a uma temperatura mais baixa. Do ponto de vista da máquina, o calor rejeitado é desperdiçado. No motor de combustão interna, o calor desperdiçado é aquele liberado nos gases quentes de exaustão e no sistema de resfriamento; em uma turbina a vapor, é o calor que precisa ser transferido a partir do vapor usado para condensar e reciclar a água.

Quando um sistema executa um processo cíclico, sua energia interna inicial é igual à energia interna final. Em qualquer processo cíclico, a primeira lei da termodinâmica exige que

$$U_2 - U_1 = 0 = Q - W \quad \text{logo,} \quad Q = W$$

ou seja, o calor total que flui para o interior da máquina durante o ciclo é igual ao trabalho líquido realizado pela máquina.

Quando analisamos máquinas térmicas, é útil pensar em dois corpos que podem interagir com a substância de trabalho. Um deles, denominado *reservatório quente*, representa a fonte de calor; ele pode fornecer à substância de trabalho grandes quantidades de calor a uma temperatura constante T_H sem alterar significativamente sua própria temperatura. O outro corpo, chamado de *reservatório frio*, pode absorver grandes quantidades do calor rejeitado pela máquina a uma temperatura constante T_C. Em uma turbina a vapor, as chamas e os gases quentes na caldeira constituem o reservatório quente; a água fria e o ar empregados para condensar e resfriar o vapor usado constituem o reservatório frio.

Vamos designar por Q_H o calor transferido para o reservatório quente e por Q_C o calor transferido para o reservatório frio. O calor Q é positivo quando ele é transferido para o *interior* da substância de trabalho, e negativo quando deixa a substância de trabalho. Logo, em uma máquina térmica, Q_H é positivo, mas Q_C é negativo porque representa um calor que *sai* da substância de trabalho. Essa convenção de

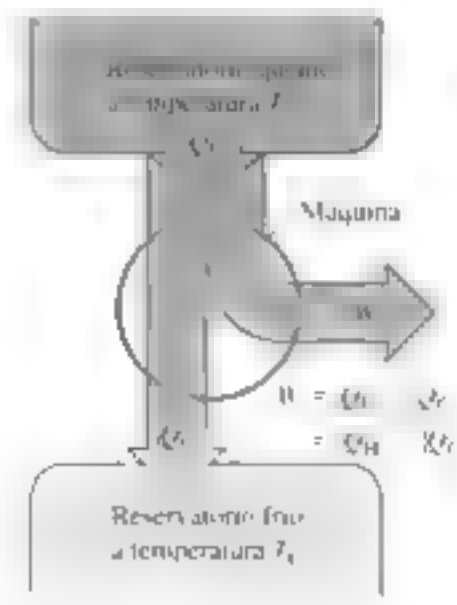


Figura 20.3 Diagrama esquemático do fluxo de energia de uma máquina térmica

sinais é coerente com as regras que formulamos na Seção 19.1, continuaremos a usar aquelas regras aqui. Geralmente, as relações tornam-se mais claras quando as escrevemos em termos dos valores absolutos de Q e W, porque valores absolutos são sempre positivos. Quando o fizermos, nossa notação mostrará isso explicitamente.

Diagramas do fluxo de energia e da eficiência

Podemos representar as transformações de energia em uma máquina térmica usando um *diagrama do fluxo de energia*, como mostra a Figura 20.3. A máquina é indicada pelo círculo. A quantidade de calor Q_H fornecida para a máquina pela fonte quente é proporcional à largura do 'tubo' que entra na máquina na parte superior do diagrama. A largura do tubo na saída da máquina na parte inferior é proporcional ao módulo $|Q_C|$ do calor rejeitado na etapa da exaustão. O ramo que sai da máquina pelo lado direito representa a parcela do calor fornecido que a máquina converte em trabalho mecânico, W.

Quando uma máquina térmica repete indefinidamente o mesmo ciclo, Q_H e Q_C representam, respectivamente, o calor absorvido e o calor rejeitado pela máquina *durante um ciclo*. Q_H é positivo e Q_C é negativo. O calor *total* Q absorvido por ciclo é

$$Q = Q_H + Q_C = |Q_H| - |Q_C| \tag{20.1}$$

A saída útil da máquina é o trabalho líquido W realizado pela substância de trabalho. De acordo com a primeira lei,

$$W = Q = Q_H + Q_C = |Q_H| - |Q_C| \tag{20.2}$$

Idealmente, gostaríamos que *todo* o calor Q_H fosse convertido em trabalho; nesse caso, teríamos $Q_H = W$ e $Q_C = 0$. A experiência mostra que isso é impossível; existe sempre um calor desperdiçado, e Q_C *nunca é igual a zero*. A definição de **eficiência térmica** de uma máquina, designada pela letra e, é dada pela razão

$$e = \frac{W}{Q_H} \tag{20.3}$$

A eficiência térmica e representa a fração do calor Q_H que é convertida em trabalho. Em outras palavras, e é o que você recebe dividido pelo que você pagou. Esse valor é sempre menor do que um, como costuma acontecer! Em termos do diagrama de fluxo apresentado na Figura 20.3, a máquina mais eficiente é aquela na qual o tubo que representa o trabalho realizado é o mais largo possível, e o tubo da exaustão, que representa o calor rejeitado, é o mais estreito possível.

Quando substituímos as duas expressões de W fornecidas pela Equação (20.2) na Equação (20.3), obtemos as seguintes expressões equivalentes para a eficiência e:

$$e = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right|$$

(eficiência térmica de uma máquina) (20.4)

Note que e é o quociente entre duas energias e, portanto, é um número puro sem unidades. Naturalmente, é necessário usar sempre as mesmas unidades para W, Q_H e Q_C.

Estratégia para a resolução de problemas 20.1

MÁQUINAS TÉRMICAS

Problemas envolvendo máquinas térmicas são, acima de tudo, problemas sobre a primeira lei da termodinâmica. Assim, a Estratégia para a solução de problemas 19.1 (Seção 19.4) é igualmente útil no presente capítulo, e sugerimos que você a releia.

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* uma máquina térmica é qualquer dispositivo que converta calor parcialmente em trabalho, como mostra o esquema da Figura 20.3. Veremos na Seção 20.4 que um refrigerador é essencialmente uma máquina térmica funcionando ao contrário; então, muitas das mesmas idéias aqui discutidas aplicam-se a ele também.

PREPARAR *o problema:* como sugerido na Estratégia para a solução de problemas 19.1. A Equação (20.4) é útil em situações nas quais a eficiência térmica da máquina é relevante. Desenhar um diagrama, como o da Figura 20.3, pode ajudar.

EXECUTAR *o problema da seguinte forma.*

1. Tome muito cuidado com a convenção de sinais de W e Q. W é positivo quando o sistema se expande e realiza trabalho, e negativo quando o sistema é comprimido. O valor de Q é positivo quando o calor entra no sistema, e negativo quando sai do sistema. Se você tiver dúvida, use a primeira lei da termodinâmica, quando possível, para conferir a compatibilidade dos sinais. Quando você verifica que uma grandeza é negativa, tal como Q_C na discussão anterior, algumas vezes é conveniente escrevê-la como $Q_C = -|Q_C|$.
2. Alguns problemas referem-se à potência em vez de grandezas de energia. A potência é o trabalho por unidade de tempo ($P = W/t$), e a taxa de transferência de calor (fluxo de calor) H é o calor transferido por unidade de tempo ($H = Q/t$). Algumas vezes ajuda perguntar "Qual é o valor de W ou de Q em um segundo (ou em uma hora)?"
3. Seguindo os passos 1 e 2 acima, identifique a incógnita do problema.

AVALIAR *a sua resposta:* use a primeira lei da termodinâmica para verificar seus resultados, prestando especial atenção aos sinais algébricos.

Exemplo 20.1

ANALISANDO UMA MÁQUINA TÉRMICA O motor a gasolina de um caminhão grande consome 10000 J de calor e realiza 2000 J de trabalho mecânico em cada ciclo. O calor é obtido pela queima de gasolina com calor de combustão $L_c = 5{,}0 \times 10^4$ J/g. a) Qual é a eficiência térmica dessa máquina? b) Qual é a quantidade de calor rejeitada em cada ciclo? c) Qual é a quantidade de gasolina queimada em cada ciclo? d) Se o motor completa 25 ciclos por segundo, qual é a potência fornecida em watts? e) Qual é a quantidade de gasolina queimada por segundo? E por hora?

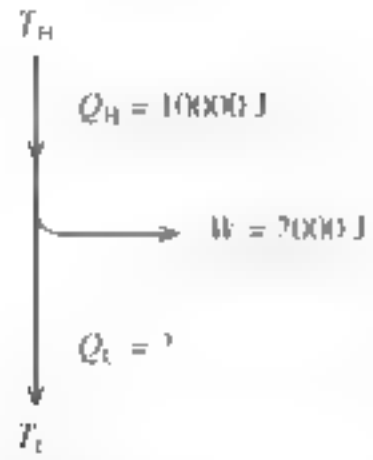


Figura 20.4 Esboço deste problema.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR Este é um problema sobre uma máquina térmica, então podemos usar as idéias discutidas nesta seção.

PREPARAR A Figura 20.4 é o nosso esboço do diagrama de fluxo de energia em um ciclo da máquina. O problema informa a quantidade de trabalho realizada pela máquina por ciclo (W = 2000 J) e a quantidade de calor recebida pela máquina por ciclo (Q_H = 10000 J).

Usamos, então, a primeira forma da Equação (20.4) para encontrar a eficiência térmica. A primeira lei da termodinâmica nos indica a quantidade de calor rejeitada por ciclo, e o calor de combustão nos diz quanta gasolina é preciso queimar por ciclo e, portanto, por segundo de tempo.

EXECUTAR a) Pela primeira expressão na Equação (20.4) a eficiência térmica é

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{2000\ \text{J}}{10000\ \text{J}} = 0.20 = 20\%$$

Esse resultado é típico para caminhões e carros quando W inclui somente o trabalho realmente fornecido para as rodas.

b) Pela Equação (20.2), $W = Q_H + Q_C$, portanto

$$Q_C = W - Q_H = 2000\ \text{J} - 10000\ \text{J}$$
$$= -8000\ \text{J}$$

Ou seja, 8000 J de calor deixam a máquina durante cada ciclo.

c) Seja m a massa da gasolina queimada durante cada ciclo. Então

$$Q_H = mL_c$$
$$m = \frac{Q_H}{L} = \frac{10000\ \text{J}}{5.0 \times 10^4\ \text{J/g}} = 0.20\ \text{g}$$

d) A potência P (taxa de realização do trabalho) é o trabalho por ciclo multiplicado pelo número de ciclos por segundo:

$$P = (2000\ \text{J/ciclo})(25\ \text{ciclos/s}) = 50000\ \text{W} = 50\ \text{kW}$$
$$= (50000\ \text{W})\frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}} = 67\ \text{hp}$$

e) A massa de gasolina queimada por segundo é a massa por ciclo multiplicada pelo número de ciclos por segundo:

$$(0.20\ \text{g/ciclo})(25\ \text{ciclos/s}) = 5.0\ \text{g/s}$$

A massa queimada por hora é

$$(5.0\ \text{g/s})\frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 18000\ \text{g/h} = 18\ \text{kg/h}$$

AVALIAR Podemos verificar nosso resultado na parte (e) convertendo-o em uma grandeza mais familiar, a quantidade de combustível consumida por unidade de distância. A densidade da gasolina é aproximadamente 0,70 g/cm^3, o que equivale a 25700 cm^3 ou 25,7 L de gasolina por hora. Caso o caminhão esteja se deslocando a 88 km/h, isso representa um consumo de combustível da ordem de 3,4 km/L. Esse consumo é substancialmente maior do que o de um carro de passeio, mas é normal para grandes caminhões.

Teste sua compreensão da Seção 20.2 Coloque as seguintes máquinas térmicas em ordem da mais alta à mais baixa eficiência térmica. (i) Uma máquina que absorve 5000 J de calor e rejeita 4500 J de calor em um ciclo; (ii) uma máquina que absorve 25000 J de calor e realiza 2000 J de trabalho em um ciclo; (iii) uma máquina que realiza 400 J de trabalho e rejeita 2800 J de calor em um ciclo. ■

20.3 Máquinas de combustão interna

O motor a gasolina usado em automóveis e em outras máquinas é um exemplo familiar de máquina térmica. Vamos analisar sua eficiência térmica. A Figura 20.5 mostra a operação de um tipo de motor a gasolina. Inicialmente, uma mistura de ar e gasolina flui para o interior de um cilindro através da abertura de uma válvula de admissão enquanto o pistão desce, fazendo o volume do cilindro aumentar de um valor mínimo V (quando o pistão está em seu curso superior) até um volume máximo rV (quando o pistão está em seu curso inferior). A quantidade r denomina-se **razão de compressão**; nos automóveis modernos essa razão apresenta valores da ordem de 8 a 10. No final desse *tempo de admissão*, a válvula de admissão se fecha e a mistura passa a ser comprimida de modo aproximadamente adiabático, até atingir o volume V durante o *tempo de compressão*. A seguir, a mistura sofre ignição causada por uma centelha, e o gás se expande, de modo aproximadamente adiabático, voltando ao volume rV, empurrando o pistão e realizando trabalho; essa etapa é o *tempo motor* ou *tempo de potência*. Finalmente, a válvula de exaustão se abre e os produtos da combustão são empurrados para fora (durante o *tempo de exaustão*), deixando o cilindro livre para o próximo tempo de admissão.

O ciclo Otto

A Figura 20.6 é um diagrama PV de um modelo idealizado dos processos termodinâmicos que ocorrem em um motor a gasolina. Esse modelo é chamado de **ciclo Otto**. A mistura de ar e gasolina entra no ciclo no ponto a. A mistura é comprimida adiabaticamente até o ponto b e, a seguir, sofre ignição. O calor Q_H é fornecido ao sistema pela queima de gasolina ao longo da linha bc, e o tempo no qual o trabalho é realizado é a expansão adiabática até o ponto d. O gás é resfriado até a temperatura do ar externo ao longo da linha da; durante esse processo, o calor $|Q_C|$ é rejeitado. Na prática, ele deixa a máquina como gás de exaustão e não retorna para o sistema. Porém, como uma quantidade equivalente de ar e gasolina entra no sistema, podemos considerar o processo cíclico.

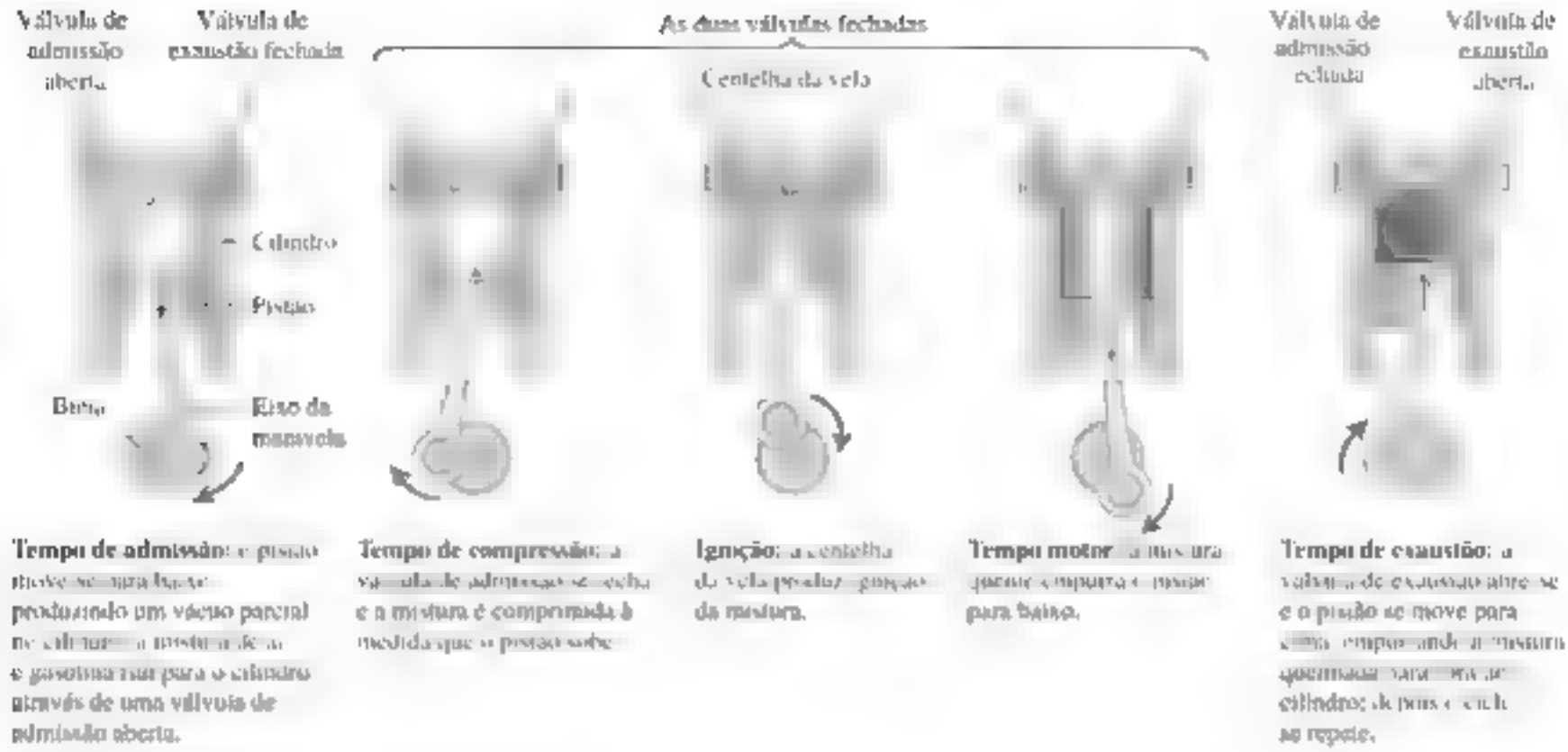

Válvula de admissão aberta
Válvula de exaustão fechada
As duas válvulas fechadas
Válvula de admissão fechada
Válvula de exaustão aberta
Centelha da vela
Cilindro
Pistão
Biela
Eixo de manivela
Tempo de admissão: o pistão move-se para baixo, produzindo um vácuo parcial no cilindro e a mistura ar-gasolina flui para o cilindro através de uma válvula de admissão aberta.
Tempo de compressão: a válvula de admissão se fecha e a mistura é comprimida à medida que o pistão sobe.
Ignição: a centelha da vela produz ignição da mistura.
Tempo motor: a mistura queima, empurra o pistão para baixo.
Tempo de exaustão: a válvula de exaustão abre-se e o pistão se move para cima, empurrando a mistura queimada para fora do cilindro; o processo se repete.

Figura 20.5 Ciclo de um motor de combustão interna com quatro tempos.

Podemos calcular a eficiência desse ciclo ideal. Os processos *bc* e *da* ocorrem a volume constante, de modo que os calores Q_H e Q_C relacionam-se de modo simples com as temperaturas.

$$Q_H = nC_V(T_c - T_b) > 0$$

$$Q_C = nC_V(T_a - T_d) < 0$$

A eficiência térmica é dada pela Equação (20.4). Substituindo a expressão anterior e cancelando o fator comum nC_V, obtemos

$$e = \frac{Q_H + Q_C}{Q_H} = \frac{T_c - T_b + T_a - T_d}{T_c - T_b} \qquad (20.5)$$

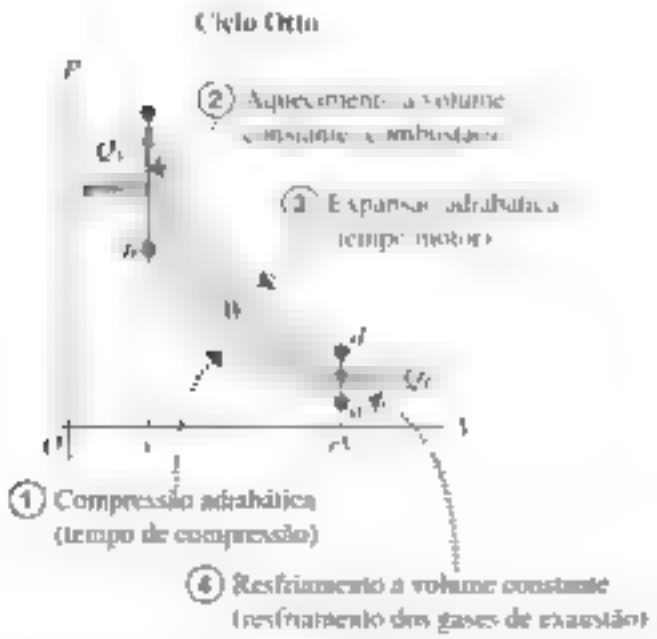

Ciclo Otto
P
V
(2) Aquecimento a volume constante (combustão instantânea)
(3) Expansão adiabática (tempo motor)
(1) Compressão adiabática (tempo de compressão)
(4) Resfriamento a volume constante (resfriamento dos gases de exaustão)

Figura 20.6 Diagrama *PV* de um ciclo Otto, modelo do ciclo ideal de um motor a gasolina.

Para simplificar essa expressão ainda mais, podemos usar a relação entre a temperatura e o volume para um processo adiabático de um gás ideal, Equação (19.22). Para os dois processos adiabáticos *ab* e *cd*, achamos

$$T_b(rV)^{\gamma-1} = T_cV^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad T_a(rV)^{\gamma-1} = T_dV^{\gamma-1}$$

Dividimos cada uma das expressões anteriores pelo fator comum $V^{\gamma-1}$ e substituímos as relações obtidas para T_c e T_b na Equação (20.5). O resultado é

$$e = \frac{T_dr^{\gamma-1} - T_ar^{\gamma-1} + T_a - T_d}{T_dr^{\gamma-1} - T_ar^{\gamma-1}} = \frac{(T_d - T_a)(r^{\gamma-1} - 1)}{(T_d - T_a)r^{\gamma-1}}$$

Eliminando o fator comum $(T_d - T_a)$, encontramos

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

(eficiência térmica no ciclo Otto) (20.6)

A eficiência térmica dada pela Equação (20.6) é sempre menor do que a unidade, mesmo no caso de um modelo idealizado. Considerando $r = 8$ e $\gamma = 1{,}4$ (o valor para o ar), a eficiência teórica é $e = 0{,}56$ ou 56%. A eficiência pode aumentar elevando-se o valor de r. Contudo, isso também faz aumentar a temperatura no final do processo adiabático da compressão da mistura ar–combustível. Quando a temperatura é muito elevada, a mistura pode explodir espontaneamente durante a compressão, em vez de explodir quando a centelha da vela produz a ignição. Esse fenômeno, que se chama *pré-ignição* ou *detonação*, produz um forte som de pancada e pode danificar o motor. A taxa de octanagem da gasolina mede suas qualidades antidetonantes. A razão de compressão prática máxima da gasolina de octanagem elevada, ou gasolina *premium*, é aproximadamente de 10 a 13. Razões mais elevadas podem ser obtidas usando-se combustíveis mais exóticos.

O ciclo Otto, que acabamos de descrever, é um modelo altamente idealizado. Ele supõe que a mistura se comporte como um gás ideal; despreza o atrito, a turbulência, a perda de calor para as paredes do cilindro e muitos outros efeitos que se combinam para reduzir a eficiência da máquina real. Outra fonte de ineficiência é a combustão incompleta. Uma mistura de ar e gasolina com a composição adequada para uma combustão completa convertendo os hidrocarbonetos em H_2O e CO_2 não sofre ignição imediata. Uma ignição confiável requer uma mistura mais "rica" em gasolina. A combustão incompleta resultante produz na exaustão CO e hidrocarbonetos que não queimam. O calor obtido da gasolina é, então, menor do que o calor total de combustão; a diferença é desperdiçada, e os produtos da exaustão contribuem para a poluição. As eficiências dos motores de gasolina reais são tipicamente da ordem de 35%.

O ciclo Diesel

O ciclo do motor Diesel é semelhante ao do motor a gasolina. A diferença mais importante é que não existe combustível no cilindro no início do tempo de compressão. Um pouco antes do início do tempo de potência, os injetores começam a injetar o combustível diretamente no cilindro, com uma velocidade suficiente para manter a pressão constante durante a primeira parte do tempo de potência. Em virtude da elevada temperatura resultante da compressão adiabática, o combustível explode espontaneamente ao ser injetado; não é necessário usar nenhuma vela de ignição.

O **ciclo Diesel** idealizado é representado na Figura 20.7. Começando no ponto *a*, o ar é comprimido adiabaticamente até o ponto *b*, aquecido à pressão constante até o ponto *c*, expandido adiabaticamente até o ponto *d* e resfriado a volume constante até o ponto *a*. Como não existe nenhum combustível no cilindro durante a maior parte do tempo de compressão, não pode ocorrer pré-ignição, logo, a razão de compressão r pode ser muito maior do que a de um motor a gasolina. Isso faz a eficiência aumentar e garante uma ignição confiável quando o combustível é injetado (por causa da temperatura elevada atingida durante a compressão adiabática). Valores de r em torno de 15 a 20 são normais; com esses valores e com $\gamma = 1{,}4$, a eficiência teórica de um ciclo Diesel idealizado é cerca de 0,65 até 0,70. Do mesmo modo que no ciclo Otto, a eficiência real é bem menor do que essa. Embora os motores Diesel sejam bastante eficientes, eles precisam ser construídos com uma precisão muito maior do que os motores a gasolina, e seu sistema de injeção de combustível exige manutenção rigorosa.

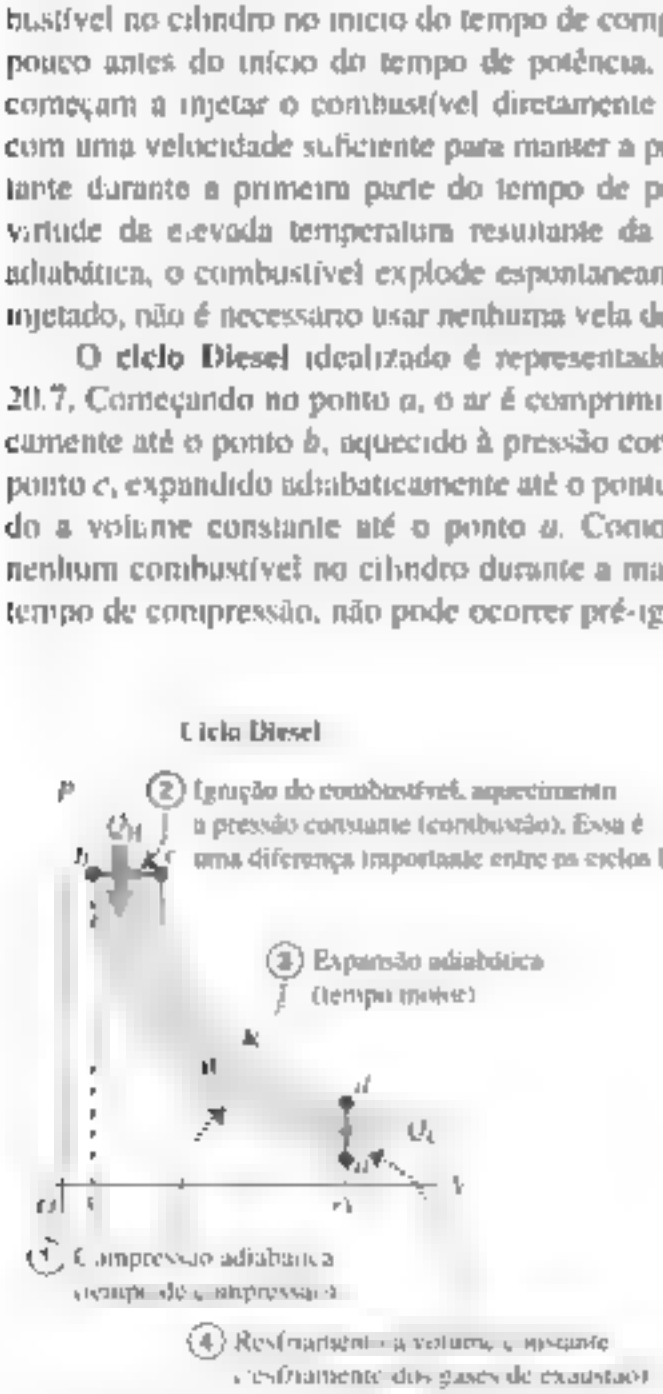

Ciclo Diesel
P
(2) Ignição do combustível, aquecimento a pressão constante (combustão). Essa é uma diferença importante entre os ciclos Diesel e Otto.
Q_H
(3) Expansão adiabática (tempo motor)
Q_L
V
(1) Compressão adiabática (tempo de compressão)
(4) Resfriamento a volume constante (resfriamento dos gases de exaustão)

Figura 20.7 Diagrama *PV* de um ciclo Diesel ideal.

Teste sua compreensão da Seção 20.3 Em um motor de ciclo Otto com cilindros de um tamanho fixo e uma razão de compressão fixa, quais dos seguintes aspectos do diagrama *PV* da Figura 20.6 mudariam se você dobrasse a quantidade de combustível queimada por ciclo? (Pode haver mais de uma resposta correta.) (i) A distância vertical entre os pontos *b* e *c*; (ii) a distância vertical entre os pontos *a* e *d*; (iii) a distância horizontal entre os pontos *b* e *a*. ∎

20.4 Refrigeradores

Podemos dizer que um **refrigerador** é uma máquina térmica funcionando com um ciclo invertido. Uma máquina térmica recebe calor de uma fonte quente e o rejeita em uma fonte fria. Um refrigerador faz exatamente o contrário: recebe calor de uma fonte fria (a parte interna do refrigerador) e o transfere para uma fonte quente (geralmente o ar externo no local onde o refrigerador se encontra). A máquina térmica *fornece* um trabalho mecânico líquido, o refrigerador precisa *receber* um trabalho mecânico líquido. Usando as convenções de sinais da Seção 20.2, Q_C é positivo para um refrigerador porque W e Q_H são negativos; logo, $|W| = -W$ e $|Q_H| = -Q_H$.

A Figura 20.8 mostra um diagrama do fluxo de energia de um refrigerador. De acordo com a primeira lei da termodinâmica, em um processo cíclico,

$$Q_H + Q_C - W = 0 \quad \text{ou} \quad -Q_H = Q_C - W$$

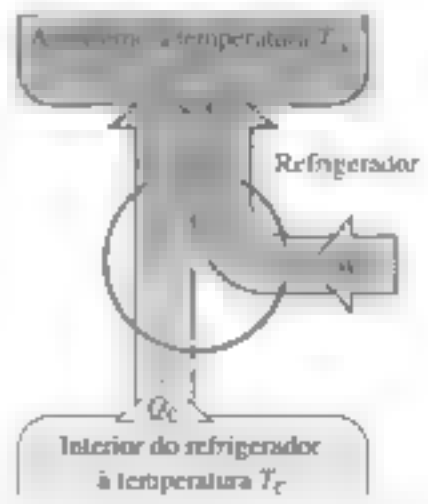


Figura 20.8 Diagrama esquemático do fluxo de energia de um refrigerador.

porém, como Q_H e W são negativos,

$$|Q_H| = Q_C + |W| \tag{20.7}$$

Logo, como o diagrama mostra, o calor $|Q_H|$ que deixa a substância de trabalho e se transfere para o reservatório quente é sempre *maior* do que o calor Q_C retirado do reservatório frio. Observe que a seguinte relação envolvendo os valores absolutos

$$|Q_H| = |Q_C| + |W| \tag{20.8}$$

é válida tanto no caso do refrigerador quanto no da máquina térmica.

De um ponto de vista econômico, o melhor ciclo de refrigeração é aquele que remove a maior quantidade de calor $|Q_C|$ do interior do refrigerador para o mesmo trabalho realizado, $|W|$. A razão relevante é, portanto, $|Q_C| / |W|$, quanto maior for essa razão, melhor será o refrigerador. Essa razão é chamada de **coeficiente de desempenho**, designado por K. De acordo com a Equação (20.8), $|W| = |Q_H| - |Q_C|$, obtemos

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} \tag{20.9}$$

(coeficiente de desempenho de um refrigerador)

Como sempre, medimos Q_H, Q_C e W com as mesmas unidades, logo, K é um número puro sem dimensões.

Refrigeradores comuns

Os princípios envolvidos em um ciclo de refrigeração típico são indicados esquematicamente na Figura 20.9a. O "circuito" do fluido contém um fluido refrigerante (a substância de trabalho). Antigamente esse fluido era o CCl_2F_2, ou outro membro da família do gás freon; como a liberação dessa substância contribui para diminuir a camada de ozônio, atualmente se usam outros fluidos refrigerantes. O lado esquerdo do circuito (inclusive as serpentinas de resfriamento no interior do refrigerador) está a uma baixa temperatura e a uma baixa pressão; o lado direito (inclusive as serpentinas do condensador fora do refrigerador) está à temperatura e pressão elevadas. Geralmente, os dois lados contêm líquido e vapor em equilíbrio térmico.

O compressor recebe o fluido, comprime-o adiabaticamente e o conduz até a serpentina do condensador a uma pressão elevada. A temperatura do fluido é, então, mais elevada do que a do ar que circunda o condensador, de modo que o fluido refrigerante liberta o calor $|Q_H|$ e se condensa parcialmente na fase líquida. A seguir, o fluido expande-se adiabaticamente no evaporador a uma taxa controlada pela válvula de expansão. À medida que o fluido se expande, ele se resfria consideravelmente, o bastante para que o fluido na serpentina do evaporador fique mais frio do que nas vizinhanças. Ele absorve o calor $|Q_C|$ das vizinhanças, resfriando-as e se vaporizando parcialmente. Em seguida, o fluido entra no compressor para iniciar um novo ciclo. O compressor, geralmente acionado por um motor elétrico (Figura 20.9b), requer energia e realiza um trabalho $|W|$ *sobre* a substância de trabalho em cada ciclo.

Um condicionador de ar opera exatamente com base no mesmo princípio. Nesse caso, a caixa do refrigerador é uma sala ou um edifício inteiro. As serpentinas do evaporador estão no interior da sala, o condensador está fora da casa e os ventiladores fazem o ar circular (Figura 20.10). Em instalações grandes, as serpentinas do condensador são geralmente resfriadas com água. As grandezas de maior importância prática em um condicionador de ar são a *taxa* de remoção do calor (a taxa de transferência de calor H da região que está

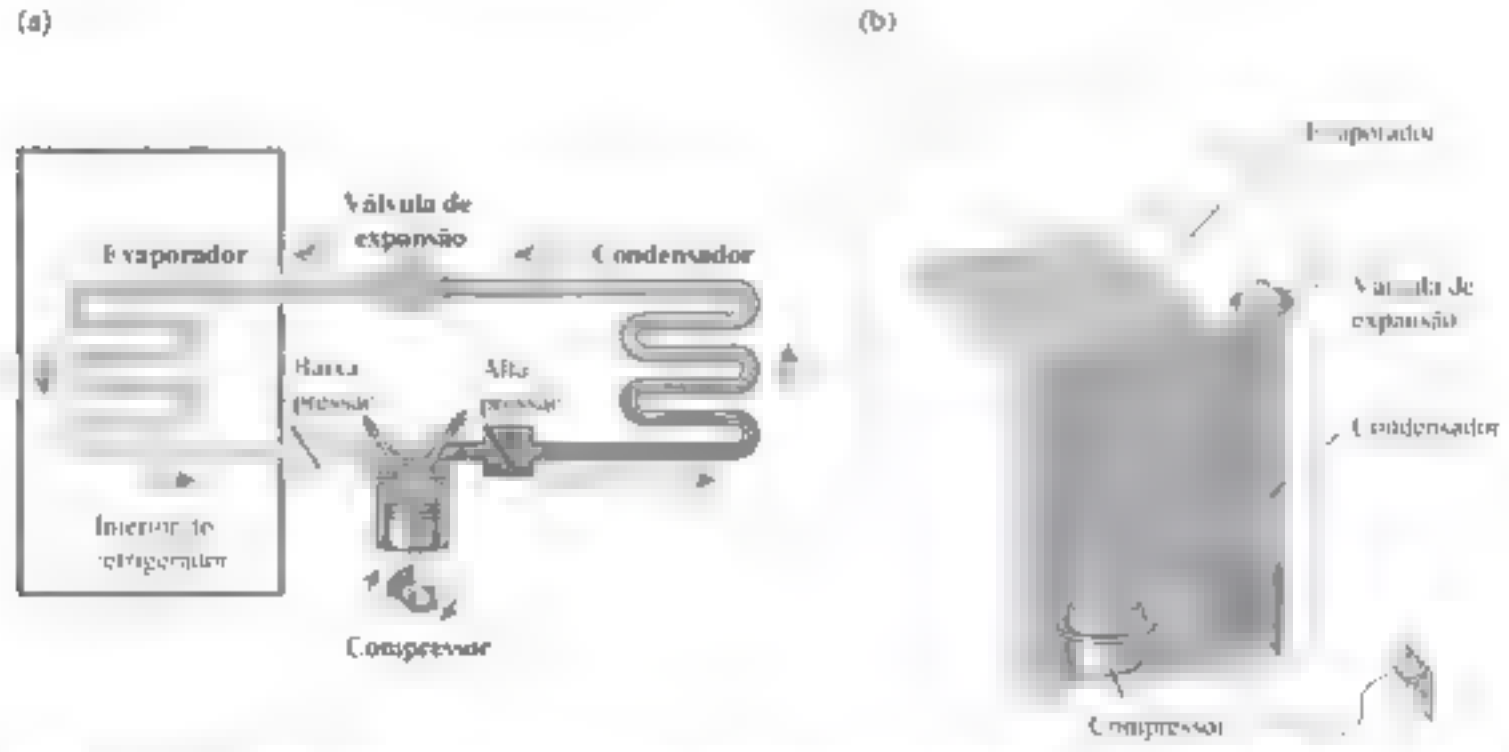


Figura 20.9 (a) Diagrama do princípio de funcionamento do ciclo de um refrigerador. (b) Onde os elementos-chave são dispostos em um refrigerador comum.

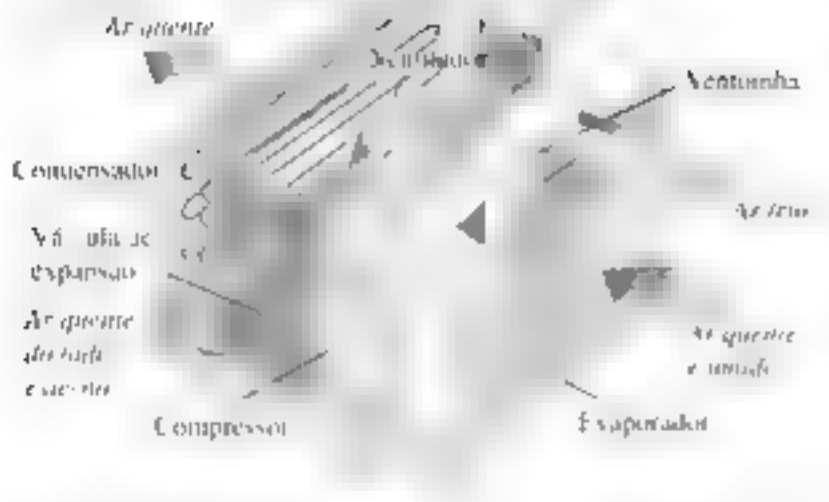


Figura 20.10 Um condicionador de ar funciona conforme os mesmos princípios de um refrigerador.

sendo resfriada) e a *potência* de entrada $P = W/t$ fornecida ao compressor. Se uma quantidade de calor $|Q_C|$ for removida no tempo t, então $H = |Q_C|/t$. Podemos, então, expressar o coeficiente de desempenho do seguinte modo:

$$K = \frac{|Q_C|}{W} = \frac{H/t}{P/t} = \frac{H}{P}$$

Condicionadores de ar normais costumam ter taxas de remoção de calor H da ordem de 1500 até 3000 W e requerem potência elétrica fornecida na entrada entre cerca de 600 até 1200 W. Um coeficiente de desempenho médio é da ordem de 2,5, e aparelhos com capacidades maiores possuem coeficientes mais elevados. Os valores reais de K para a operação de condicionadores dependem dos valores da temperatura interna e da temperatura externa.

Infelizmente, K é expresso em termos comerciais, com uma mistura de unidades inglesas que não são usadas no Brasil e, portanto, devem ser transformadas em unidades SI quando forem mencionadas.

Uma variação do tema anterior é a chamada **bomba de calor**, usada para aquecer um edifício resfriando o ar de seu exterior. Ela funciona como se fosse um condicionador de ar montado de fora para dentro. As serpentinas do evaporador estão do lado de fora do edifício, de onde retiram calor do ar frio, e as serpentinas do condensador estão no interior do edifício, onde fornecem calor para aquecer o ar. Com um projeto apropriado, o calor Q_H fornecido ao interior por ciclo pode ser consideravelmente maior do que o trabalho $|W|$ necessário para fazê-lo fluir no interior.

Sempre é preciso realizar um trabalho para transferir calor de um corpo frio para um corpo quente. O calor flui espontaneamente de um corpo quente para um corpo frio, e o fluxo inverso necessita de um trabalho externo. A experiência mostra que é impossível fazer um refrigerador que transporte calor de um corpo frio para um corpo quente sem realização de trabalho. Caso não fosse necessário nenhum trabalho, o coeficiente de desempenho seria infinito. Tal dispositivo poderia ser chamado de *refrigerador sem trabalho*; trata-se de um mito, como o unicórnio ou refeições gratuitas.

Teste sua compreensão da Seção 20.4 Você consegue resfriar sua casa deixando a porta do refrigerador aberta? ▮

20.5 Segunda lei da termodinâmica

Evidências experimentais sugerem fortemente que é *impossível* construir uma máquina térmica que converta completamente calor em trabalho, ou seja, uma máquina que possua eficiência térmica de 100%. Essa impossibilidade é a base para a seguinte formulação da **segunda lei da termodinâmica**.

> **É impossível para qualquer sistema passar por um processo no qual absorve calor de um reservatório a uma dada temperatura e converte o calor completamente em trabalho mecânico de modo que o sistema termine em um estado idêntico ao inicial.**

Trata-se do chamado enunciado da "máquina térmica" da segunda lei, também conhecido pelos físicos como o *enunciado de Kelvin-Planck* para essa lei.

A base da segunda lei da termodinâmica repousa na diferença entre a natureza da energia interna e a energia mecânica macroscópica. Em um corpo que se move, as moléculas apresentam movimentos aleatórios, porém superposto ao movimento aleatório existe um movimento coordenado de cada molécula no sentido da velocidade do corpo. A energia cinética associada ao movimento macroscópico *coordenado* é o que chamamos de energia cinética do corpo que se move. As energias cinéticas e energias potenciais associadas ao movimento *aleatório* das moléculas são responsáveis pela energia interna.

Quando um corpo deslizando sobre uma superfície atinge o repouso em virtude do atrito, o movimento organizado do corpo é convertido em movimento aleatório das moléculas do corpo e da superfície. Como não podemos controlar o movimento individual de cada molécula, é impossível converter completamente esse movimento aleatório outra vez em movimento organizado. Podemos apenas converter uma *parte* do movimento aleatório, e isso é justamente o que a máquina térmica faz.

Se a segunda lei da termodinâmica *não* fosse verdadeira, poderíamos fazer um automóvel deslocar-se ou colocar uma usina termoelétrica em funcionamento apenas resfriando o ar ambiente. Nenhuma dessas duas possibilidades viola a *primeira* lei da termodinâmica. A segunda lei, portanto, não é deduzida a partir da primeira lei; sustenta-se por si própria como uma lei independente na natureza. A primeira lei proíbe a criação ou a destruição da energia; a segunda lei limita a *disponibilidade* da energia e os modos de conversão e de uso da energia.

Um novo enunciado para a segunda lei

Nossa análise dos refrigeradores na Seção 20.4 constitui a base para uma formulação alternativa da segunda lei da termodinâmica. O calor flui espontaneamente de um corpo quente para um corpo frio, mas o inverso jamais ocorre. Um

refrigerador retira calor de um corpo frio para um corpo quente, porém, sua operação necessita do fornecimento de trabalho ou de energia mecânica. Generalizando essas observações, dizemos que

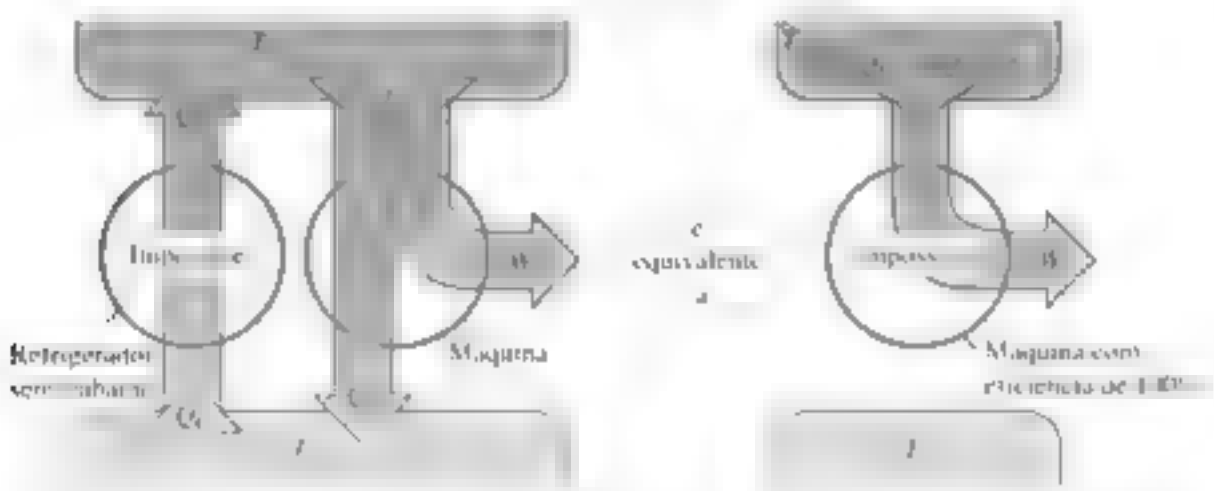
> **É impossível a realização de qualquer processo que tenha como única etapa a transferência de calor de um corpo frio para um corpo quente.**

Trata-se do chamado enunciado do "refrigerador" da segunda lei da termodinâmica (também conhecido como o *enunciado de Clausius*). Pode parecer que esse enunciado não tem muita relação com o enunciado da "máquina térmica". Contudo, os dois enunciados são completamente equivalentes. Por exemplo, se pudéssemos construir um refrigerador sem usar trabalho, violando o enunciado do "refrigerador" da segunda lei, poderíamos usá-lo em conjunto com uma máquina térmica, bombeando o calor rejeitado pela máquina e fazendo-o retornar ao reservatório quente para ser usado novamente. Essa máquina composta (Figura 20.11a) violaria o enunciado da "máquina térmica" da segunda lei, porque seu efeito resultante seria retirar uma quantidade líquida de calor $|Q_H - Q_C|$ do reservatório quente e convertê-la completamente em trabalho W.

Alternativamente, se pudéssemos fazer uma máquina térmica com uma eficiência de 100%, violando o primeiro enunciado da segunda lei, poderíamos operar a máquina usando calor de um reservatório quente e aproveitar o trabalho obtido na saída da máquina para fazer funcionar um refrigerador que bombeasse calor de um reservatório frio para um reservatório quente (Figura 20.11b). Esse dispositivo composto violaria o enunciado do "refrigerador" da segunda lei, porque seu efeito resultante seria retirar calor Q_C de um reservatório frio e transferi-lo para um reservatório quente sem que fosse necessário nenhum consumo de trabalho. Portanto, qualquer dispositivo que viole um enunciado da segunda lei pode ser usado para construir um dispositivo que viola o outro enunciado. Se a violação do primeiro enunciado for impossível, também será impossível a violação do segundo enunciado!

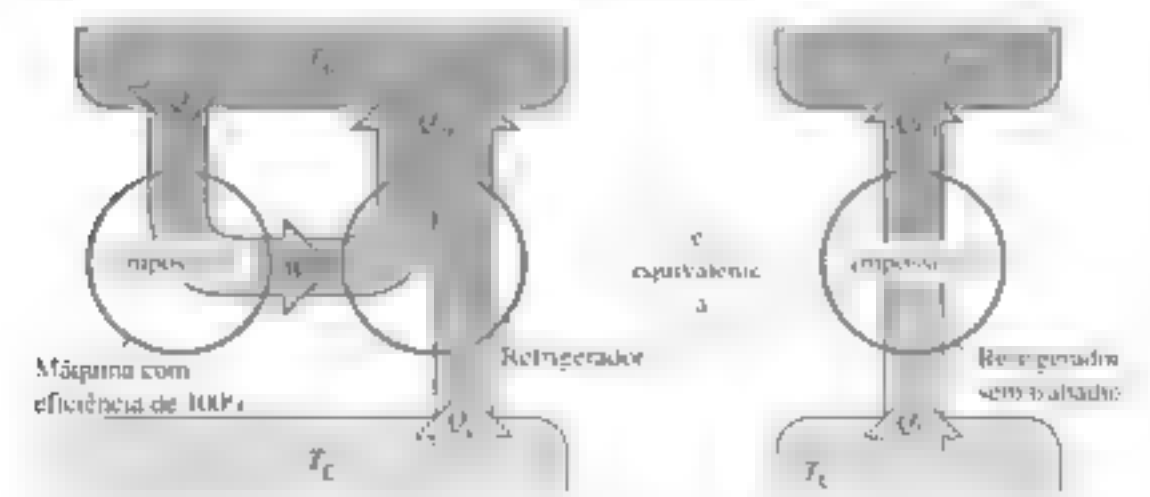
A conversão de trabalho em calor é um processo *irreversível*, como no caso do atrito, do escoamento de um fluido

(a) O enunciado da "máquina" da segunda lei da termodinâmica



Se existisse um refrigerador que não precisasse de trabalho, ele poderia ser usado juntamente com uma máquina comum para formar um dispositivo com eficiência de 100%, convertendo o calor $Q_H = |Q_C|$ completamente em trabalho.

(b) O enunciado do "refrigerador" da segunda lei da termodinâmica.



Se uma máquina com eficiência de 100% fosse possível, ela poderia ser usada juntamente com um refrigerador comum para formar um refrigerador que não precisa de trabalho, transferindo o calor Q_C de um reservatório frio para um reservatório quente sem precisar de nenhum trabalho realizado sobre o sistema.

Figura 20.11 Diagrama esquemático de uma máquina térmica e de um refrigerador para os enunciados equivalentes da segunda lei da termodinâmica.

viscoso ou do fluxo de calor de um corpo quente para um corpo frio por meio de um gradiente de temperatura. Os enunciados da 'máquina' e do 'refrigerador' da segunda lei da termodinâmica afirmam que esses processos só podem ser parcialmente reversíveis. Podemos citar outros exemplos. Os gases escapam, através de aberturas, de uma região com alta pressão até uma região com baixa pressão; os gases e os líquidos miscíveis sempre se misturam espontaneamente, e nunca se separam. A segunda lei da termodinâmica é uma expressão da existência de um sentido único intrínseco para estes e muitos outros processos irreversíveis. A conversão da energia é um aspecto essencial de toda vida animal e vegetal e da tecnologia humana; logo, a segunda lei da termodinâmica é de importância fundamental no mundo em que vivemos.

Se uma máquina com eficiência de 100% fosse possível, ela poderia ser usada juntamente com um refrigerador comum para formar um refrigerador que não precisa de trabalho, transferindo o calor Q_C de um reservatório frio para um reservatório quente sem precisar de nenhum trabalho realizado sobre o sistema.

Teste sua compreensão da Seção 20.5 Uma máquina com eficiência de 100% (Figura 20.11a) violaria a *primeira* lei da termodinâmica? E um refrigerador que funcionasse sem trabalho? (Figura 20.11b)? ■

20.6 O ciclo de Carnot

De acordo com a segunda lei, nenhuma máquina térmica pode ter eficiência de 100%. Qual é a eficiência máxima que uma dada máquina *pode* ter, a partir de um reservatório quente a uma temperatura T_H e de um reservatório frio a uma temperatura T_C? Essa pergunta foi respondida em 1824 pelo engenheiro francês Sadi Carnot (1796-1832), que desenvolveu uma máquina hipotética ideal que fornece a eficiência máxima permitida pela segunda lei. O ciclo dessa máquina é conhecido como **ciclo de Carnot**.

Para compreender o ciclo de Carnot, voltemos ao tema básico deste capítulo: a *irreversibilidade* e sua relação com o sentido de um processo termodinâmico. A conversão de trabalho em energia é um processo irreversível; o objetivo da máquina térmica é obter uma reversão *parcial* desse processo, ou seja, a conversão de calor em trabalho com a maior eficiência possível. Para a eficiência máxima de uma máquina térmica, portanto, *devemos evitar todo processo irreversível*. Essa exigência é suficiente para determinar as etapas básicas do ciclo de Carnot, conforme veremos a seguir.

O *fluxo de calor* em uma queda de temperatura finita é um processo irreversível. Portanto, durante a transferência de calor no ciclo de Carnot não deve existir *nenhuma* diferença de temperatura finita. Quando a máquina retira calor da fonte quente a uma temperatura T_H, a substância de trabalho da máquina também deve estar a uma temperatura T_H; caso contrário, ocorrerá fluxo de calor. Analogamente, quando a máquina descarta calor para o reservatório frio a uma temperatura T_C, a máquina também deve estar a uma temperatura T_C. Ou seja, todo processo envolvendo trocas de calor, a uma temperatura T_H ou T_C, deve ser *isotérmico*.

Reciprocamente, em qualquer processo no qual a temperatura da substância de trabalho da máquina está entre T_H e T_C, não pode ocorrer *nenhuma* transferência de calor entre a máquina e qualquer reservatório, porque essa transferência de calor não poderia ser reversível. Portanto, qualquer processo no qual a temperatura T da substância de trabalho varia deve ser *adiabático*.

A conclusão é que todo processo em nosso ciclo idealizado deve ser isotérmico ou adiabático. Além disso, o equilíbrio térmico e mecânico deve ser sempre mantido para que cada processo seja completamente reversível.

Passos do ciclo de Carnot

O ciclo de Carnot é constituído por dois processos isotérmicos reversíveis e dois processos adiabáticos reversíveis. A Figura 20.13 mostra um ciclo de Carnot usando como substância de trabalho um gás ideal dentro de um cilindro com um pistão. O ciclo consiste nas seguintes etapas:

1. O gás se expande isotermicamente na temperatura T_H, absorvendo um calor Q_H (ab).
2. O gás se expande adiabaticamente até que sua temperatura cai para T_C (bc).
3. Ele é comprimido isotermicamente na temperatura T_C, rejeitando o calor $|Q_C|$ (cd).
4. Ele é comprimido adiabaticamente, retornando ao seu estado inicial na temperatura T_H (da).

Podemos calcular a eficiência térmica e da máquina de Carnot no caso especial mostrado na Figura 20.3, em que a substância de trabalho é um *gás ideal*. Para efetuar esse cálculo, acharemos inicialmente a razão Q_C/Q_H entre as quantidades de calor transferidas durante os dois processos isotérmicos, e a seguir usaremos a Equação (20.4) para achar e.

Em um gás ideal, a energia interna U depende somente da temperatura e, portanto, permanece constante em um processo isotérmico. Na expansão isotérmica ab, $\Delta U_{ab} = 0$

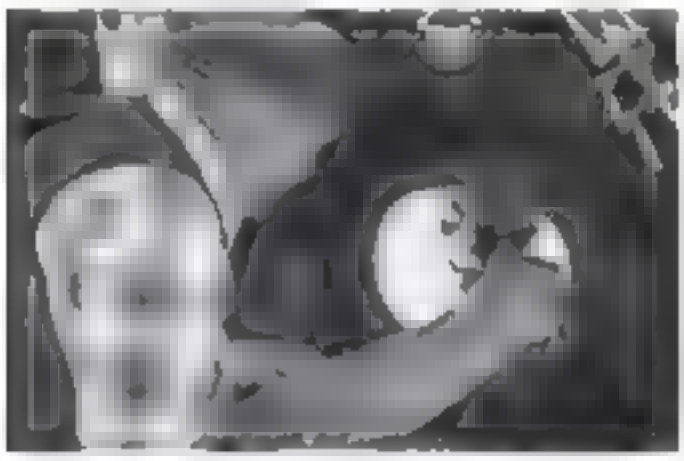


Figura 20.12 A temperatura da fornalha de uma máquina a vapor é muito mais alta do que a da água na caldeira, por isso o calor flui irreversivelmente da fornalha para a água. O esforço de Carnot para entender a eficiência das máquinas a vapor conduziu-o à idéia de que uma máquina ideal envolveria apenas processos reversíveis.

e Q_H é igual ao trabalho W_{ab} realizado pelo gás durante sua expansão isotérmica a uma temperatura T_H. Calculamos esse trabalho no Exemplo 19.1 (Seção 19.2); usando aquele resultado, obtemos

$$Q_H = W_{ab} = nRT_H \ln \frac{V_b}{V_a} \qquad (20.10)$$

Analogamente

$$Q_C = W_{cd} = nRT_C \ln \frac{V_d}{V_c} = -nRT_C \ln \frac{V_c}{V_d} \qquad (20.11)$$

Como V_d é menor que V_c, Q_C é negativo ($Q_C = -|Q_C|$): há transferência de calor para fora do gás durante a compressão isotérmica à temperatura T_C.

A razão entre as duas quantidades de calor é, portanto,

$$\frac{Q_C}{Q_H} = -\left(\frac{T_C}{T_H}\right)\frac{\ln(V_c/V_d)}{\ln(V_b/V_a)} \qquad (20.12)$$

Podemos simplificar o resultado anterior usando a relação entre o volume e a temperatura em um processo adiabático, Equação (19.22). Para os dois processos adiabáticos, encontramos

$$T_H V_b^{\gamma-1} = T_C V_c^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad T_H V_a^{\gamma-1} = T_C V_d^{\gamma-1}$$

Dividindo membro a membro as duas equações anteriores, achamos

$$\left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

Portanto, os logaritmos na Equação (20.12) são iguais, e essa equação se reduz a

$$\frac{Q_C}{Q_H} = -\frac{T_C}{T_H} \quad \text{ou} \quad \frac{|Q_C|}{Q_H} = \frac{T_C}{T_H}$$

(transferência de calor na máquina de Carnot) (20.13)

A razão entre o calor rejeitado a uma temperatura T_C e o calor absorvido a uma temperatura T_H é precisamente igual a T_C/T_H. Logo, pela Equação (20.4), a eficiência térmica da máquina de Carnot é

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H}$$

(eficiência da máquina de Carnot) (20.14)

Esse resultado simples afirma que a eficiência de uma máquina de Carnot depende apenas das temperaturas dos dois reservatórios. A eficiência é grande quando a *diferença* de temperatura é grande, tornando-se muito pequena quando as duas temperaturas forem aproximadamente iguais. A eficiência nunca pode ser exatamente igual a um, a menos que $T_C = 0$; mais tarde mostraremos que isso também é impossível.

ATENÇÃO Use a escala Kelvin para cálculos do ciclo de Carnot Em todos os cálculos envolvendo o ciclo de Carnot, você deve tomar cuidado e usar sempre temperaturas *absolutas* (escala Kelvin). A razão é que o conjunto formado pelas equações (20.10) até (20.14) foi deduzido a partir da equação do gás ideal $PV = nRT$, em que T é a temperatura absoluta.

Exemplo 20.1

ANALISANDO UMA MÁQUINA DE CARNOT I Uma certa máquina de Carnot absorve 2000 J de calor de um reservatório a 500 K, realiza trabalho e descarta calor para um reservatório a 350

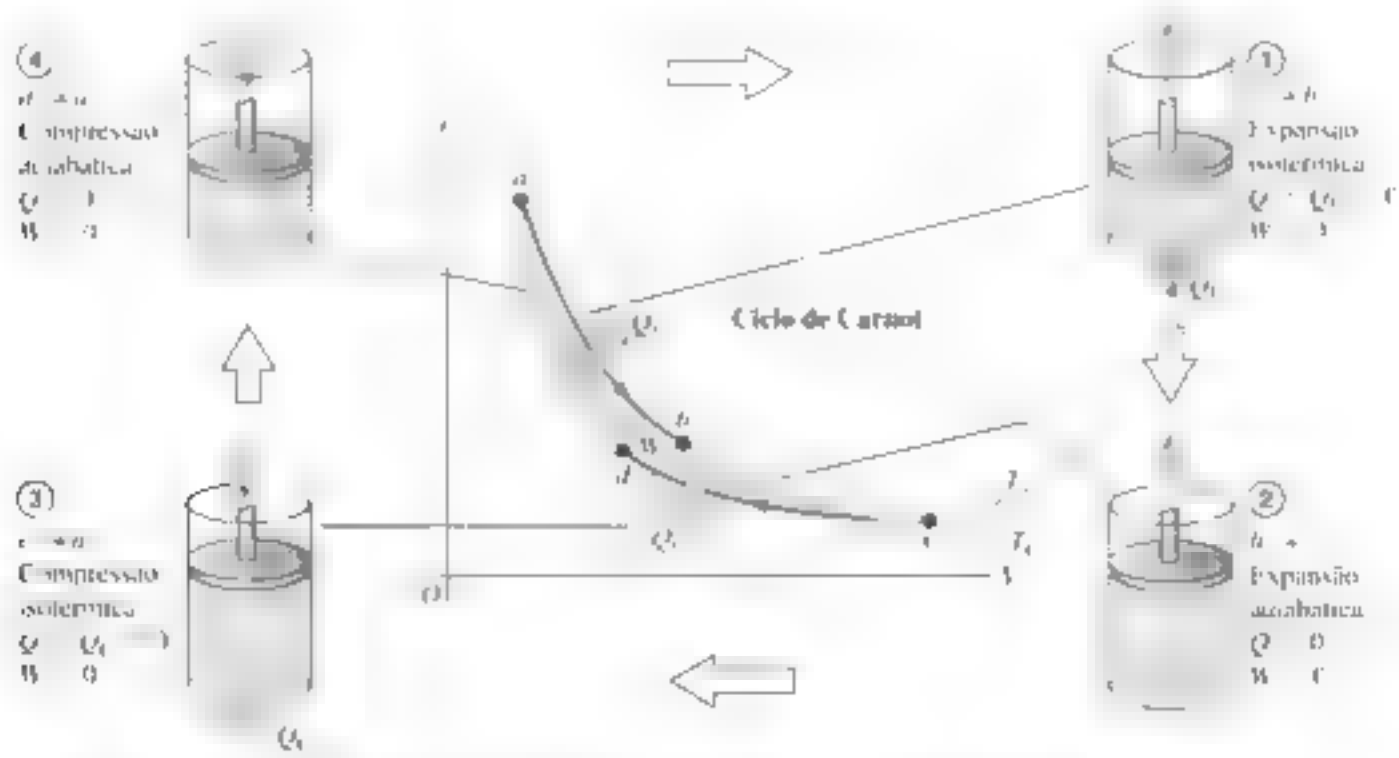


Figura 20.13 Ciclo de Carnot para um gás ideal. No diagrama PV as linhas finas são isotermas (curvas com temperatura constante) e as linhas grossas são curvas adiabáticas (curvas com transferência de calor igual a zero).

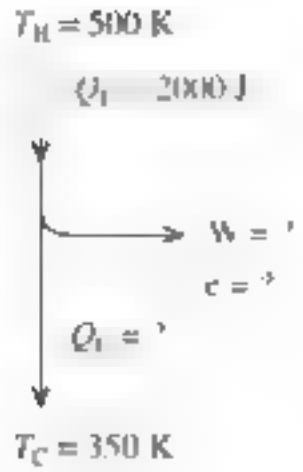


Figura 20.14 Esboço para este problema.

K. Qual foi o trabalho realizado, qual a quantidade de calor rejeitada e qual é a eficiência dessa máquina?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve uma máquina de Carnot, portanto podemos usar as ideias desta seção, assim como os conceitos da Seção 20.2 (que se aplicam a máquinas térmicas de todos os tipos).

PREPARAR: a Figura 20.14 mostra o diagrama do fluxo de energia para este problema. Sobre essa máquina de Carnot, conhecemos a quantidade de calor absorvida, $Q_H = 2000$ J, e as temperaturas $T_H = 500$ K e $T_C = 350$ K dos reservatórios quente e frio, respectivamente. Calculamos a quantidade de calor descartada por meio da Equação (20.13) e depois calculamos a quantidade de trabalho usando a primeira lei da termodinâmica: o trabalho realizado em um ciclo completo é a soma do calor absorvido e o calor descartado (negativo) [ver Equação (20.2)]. Encontramos a eficiência a partir das duas temperaturas com a Equação (20.14).

EXECUTAR: pela Equação (20.13), o calor Q_C rejeitado pela máquina é

$$Q_C = -Q_H\frac{T_C}{T_H} = -(2000\ \text{J})\frac{350\ \text{K}}{500\ \text{K}}$$
$$= -1400\ \text{J}$$

Então, pela primeira lei, o trabalho W realizado pela máquina é

$$W = Q_H + Q_C = 2000\ \text{J} + (-1400\ \text{J})$$
$$= 600\ \text{J}$$

Pela Equação (20.14), a eficiência térmica é

$$e = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{350\ \text{K}}{500\ \text{K}} = 0.30 = 30\%$$

AVALIAR: o sinal negativo de Q_C está correto: ele mostra que o calor está *saindo* da máquina e entrando no reservatório frio. Note que é possível conferir nosso resultado usando a definição básica de eficiência térmica:

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{600\ \text{J}}{2000\ \text{J}} = 0.30 = 30\%$$

Exemplo 20.3

ANALISANDO UMA MÁQUINA DE CARNOT II Suponha que 0,200 mol de um gás ideal diatômico ($\gamma = 1,40$) passe por um ciclo de Carnot com temperaturas de 227 °C e 27 °C. A pressão inicial é $P_a = 10,0 \times 10^5$ Pa e, durante a expansão isotérmica, na temperatura mais elevada o volume dobra. a) Ache a pressão e o volume em cada um dos pontos *a*, *b*, *c* e *d* na Figura 20.13. b) Calcule Q, W e ΔU no ciclo todo e em cada uma das etapas do ciclo. c) Determine a eficiência diretamente a partir dos resultados da parte (b) e compare-a com o resultado obtido a partir da Equação (20.14).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve as propriedades do ciclo de Carnot, assim como as propriedades dos gases ideais.

PREPARAR: o problema informa o número de moles, a pressão e a temperatura no ponto *a* (que é a maior entre as temperaturas dos dois reservatórios), portanto podemos encontrar o volume em *a* usando a equação do gás ideal. Depois calculamos a pressão e o volume em outros pontos usando as equações vistas nesta seção em combinação com a equação do gás ideal. A seguir, aplicamos a cada etapa do ciclo as equações (20.10) e (20.11) para encontrar a transferência de calor e o trabalho realizado, e usamos a Equação (20.13) para calcular a variação da energia interna. Como no Exemplo 20.2, achamos a eficiência aplicando a Equação (20.14).

EXECUTAR: a) Antes de mais nada, lembre-se de converter as temperaturas que foram fornecidas em graus Celsius em temperaturas absolutas somando 273,15. A temperatura mais elevada é $T_a = (227 + 273,15)\ \text{K} = 500\ \text{K}$, e a temperatura mais baixa é $T_c = (27 + 273,15)\ \text{K} = 300\ \text{K}$. A seguir usamos a equação do gás ideal para achar V_a:

$$V_a = \frac{nRT_a}{P_a} = \frac{(0,200\ \text{mol})(8,314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(500\ \text{K})}{10,0 \times 10^5\ \text{Pa}}$$
$$= 8,31 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

O volume dobra durante a expansão isotérmica $a \to b$, logo

$$V_b = 2V_a = 2(8,31 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)$$
$$= 16,6 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

Além disso, durante a expansão isotérmica $a \to b$, $P_aV_a = P_bV_b$, portanto

$$P_b = \frac{P_aV_a}{V_b} = 5,0 \times 10^5\ \text{Pa}$$

Na expansão adiabática $b \to c$, $T_aV_b^{\gamma-1} = T_cV_c^{\gamma-1}$, logo,

$$V_c = V_b\left(\frac{T_a}{T_c}\right)^{1/(\gamma-1)} = (16,6 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)\left(\frac{500\ \text{K}}{300\ \text{K}}\right)^{2,5}$$
$$= 59,6 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

Usando novamente a equação do gás ideal para o ponto *c*, achamos

$$P_c = \frac{nRT_c}{V_c} = \frac{(0,200\ \text{mol})(8,314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{59,6 \times 10^{-4}\ \text{m}^3}$$
$$= 0,837 \times 10^5\ \text{Pa}$$

Na compressão adiabática $d \to a$, $T_aV_a^{\gamma-1} = T_dV_d^{\gamma-1}$, e

$$V_d = V_a\left(\frac{T_a}{T_d}\right)^{1/(\gamma-1)} = (8,31 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)\left(\frac{500\ \text{K}}{300\ \text{K}}\right)^{2,5}$$
$$= 29,8 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

$$P_d = \frac{nRT_d}{V_d} = \frac{(0,200\ \text{mol})(8,314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{29,8 \times 10^{-4}\ \text{m}^3}$$
$$= 1,67 \times 10^5\ \text{Pa}$$

b) Na expansão isotérmica $a \rightarrow b$, $\Delta U_{ab} = 0$. Para achar W_{ab} (= Q_H), usamos a Equação (20.10):

$$W_{ab} = Q_H = nRT_H \ln\frac{V_b}{V_a}$$
$$= (0.200\ \text{mol})(8{,}314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(500\ \text{K})(\ln 2)$$
$$= 576\ \text{J}$$

Na expansão adiabática $b \rightarrow c$, $Q_{bc} = 0$. Pela primeira lei da termodinâmica, $\Delta U_{bc} = Q_{bc} - W_{bc} = -W_{bc}$, logo, o trabalho realizado pelo gás nesse processo é igual à variação de energia interna com o sinal contrário. Usando a Equação (19.13) temos $\Delta U = nC_V\Delta T$, onde $\Delta T = T_C - T_H$ (temperatura final menos temperatura inicial). Usando $C_V = 20{,}8$ J/mol · K para um gás ideal diatômico, achamos

$$W_{bc} = -\Delta U_{bc} = -nC_V(T_C - T_H) = nC_V(T_H - T_C)$$
$$= (0.200\ \text{mol})(20{,}8\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(500\ \text{K} - 300\ \text{K})$$
$$= 832\ \text{J}$$

Na expansão isotérmica $c \rightarrow d$, $\Delta U_{cd} = 0$; a Equação (20.11) fornece

$$W_{cd} = Q_C = nRT_C \ln\frac{V_d}{V_c}$$
$$= (0{,}200\ \text{mol})(8{,}314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})\left(\ln\frac{29{,}8\times10^{-3}\ \text{m}^3}{59{,}6\times10^{-3}\ \text{m}^3}\right)$$
$$= -346\ \text{J}$$

Na compressão adiabática $d \rightarrow a$, $Q_{da} = 0$, e

$$W_{da} = -\Delta U_{da} = -nC_V(T_H - T_C) = nC_V(T_C - T_H)$$
$$= (0{,}200\ \text{mol})(20{,}8\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K} - 500\ \text{K})$$
$$= -832\ \text{J}$$

Podemos organizar os resultados na seguinte tabela.

Processo	Q	W	ΔU
$a \rightarrow b$	576 J	576 J	0
$b \rightarrow c$	0	832 J	−832 J
$c \rightarrow d$	−346 J	−346 J	0
$d \rightarrow a$	0	−832 J	832 J
Total	230 J	230 J	0

c) Pela tabela acima, $Q_H = 576$ J, e o trabalho total é igual a 230 J. Logo,

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{230\ \text{J}}{576\ \text{J}} = 0.40 = 40\%$$

Podemos comparar este resultado com o resultado obtido com a Equação (20.14):

$$e = \frac{T_H - T_C}{T_H} = \frac{500\ \text{K} - 300\ \text{K}}{500\ \text{K}} = 0.40 = 40\%$$

AVALIAR na tabela de resultados da parte (b), note que, no ciclo completo, $Q = W$ e $\Delta U = 0$. Esses resultados são exatamente os que deveríamos ter esperado: em um ciclo completo, o calor total recebido é usado para realizar trabalho sem nenhuma variação total na energia interna do sistema. Note também que as quantidades de trabalho nos dois processos adiabáticos possuem o mesmo módulo, porém os sinais são contrários. Você consegue demonstrar, partindo do raciocínio que levou à Equação (20.13), que isso deve ocorrer *sempre* no caso de um ciclo de Carnot?

Observe que a eficiência neste exemplo é maior do que a obtida no Exemplo 20.2. Isso ocorre porque a razão entre a temperatura mais elevada e a mais baixa (500 K)/(300 K) é maior, se comparada a (500 K)/(350 K).

O refrigerador de Carnot

Como cada etapa do ciclo de Carnot é reversível, o *ciclo inteiro* pode ser invertido, convertendo a máquina térmica em um refrigerador. O coeficiente de desempenho do refrigerador de Carnot pode ser obtido combinando-se a definição geral de K, Equação (20.9), com a Equação (20.13) do ciclo de Carnot. Inicialmente reescrevemos a Equação (20.9) na forma

$$K = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} = \frac{|Q_C|/|Q_H|}{1 - |Q_C|/|Q_H|}$$

A seguir, substituímos a Equação (20.13), $|Q_C|/|Q_H| = T_C/T_H$ na relação anterior. O resultado é

$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad \begin{matrix}\text{(coeficiente de desempenho do}\\ \text{refrigerador de Carnot)}\end{matrix} \qquad (20.15)$$

Quando a diferença de temperatura $T_H - T_C$ é pequena, K é muito maior do que a unidade; nesse caso, um calor muito grande pode ser "bombeado" da temperatura mais baixa para a temperatura mais elevada com apenas um pequeno gasto de trabalho. Porém, quanto maior for a diferença de temperatura, menor será o valor de K, e uma quantidade maior de trabalho deve ser realizada para uma dada quantidade de calor.

Exemplo 20.4

ANALISANDO UM REFRIGERADOR DE CARNOT Se o ciclo descrito no Exemplo 20.3 for invertido e se transformar em um refrigerador, qual será o seu coeficiente de desempenho?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema utiliza as idéias da Seção 20.3 (sobre refrigeradores em geral), assim como a discussão acima sobre refrigeradores de Carnot.

PREPARAR: a Equação (20.9) fornece o coeficiente de desempenho de *qualquer* refrigerador em termos do calor extraído do reservatório frio por ciclo e do trabalho que precisa ser realizado por ciclo.

EXECUTAR no Exemplo 20.3, vimos que, em um ciclo, a máquina de Carnot rejeita um calor $Q_C = -346$ J para o reservatório frio, e realiza um trabalho $W = 230$ J. Logo, quando funciona em sentido contrário ao de um refrigerador, o sistema extrai um calor $Q_C = -346$ J do reservatório frio, ao mesmo tempo em que requer um fornecimento de trabalho $W = -230$ J. Pela Equação (20.9),

$$K = \frac{Q_C}{W} = \frac{346\ \text{J}}{230\ \text{J}} = 1.50$$

Como se trata de um ciclo de Carnot, podemos também usar a Equação (20.15)

$$K = \frac{T_c}{T_H - T_c} = \frac{300\ \text{K}}{500\ \text{K} - 300\ \text{K}} = 1{,}50$$

AVALIAR em um ciclo de Carnot, e e K dependem somente das temperaturas, conforme indicado nas equações (20.14) e (20.15), portanto não é necessário calcular Q e W. Contudo, em ciclos que contêm processos irreversíveis, essas duas equações não são mais válidas, e cálculos mais detalhados são necessários.

O ciclo de Carnot e a segunda lei

É possível demonstrar que **nenhuma máquina térmica pode ter eficiência maior do que a da máquina de Carnot operando entre as mesmas temperaturas extremas**. A chave dessa demonstração é dada pela observação anterior, segundo a qual, como cada etapa do ciclo de Carnot é reversível, o *ciclo inteiro* é reversível. Percorrido em sentido inverso, a máquina se transforma em um refrigerador. Imagine uma máquina que possua uma eficiência maior do que a máquina de Carnot (Figura 20.15). Suponha que o ciclo de Carnot seja invertido, funcionando como um refrigerador que, mediante um trabalho negativo $-|W|$, receba calor Q_c do reservatório frio e rejeite calor $|Q_H|$ do reservatório quente. A máquina supereficiente rejeita um calor $|Q_c$, mas, para fazer isso, ela recebe uma grande quantidade de calor $Q_H + \Delta$. O trabalho realizado seria $W + \Delta$, e o efeito resultante das duas máquinas juntas seria receber uma quantidade de calor Δ e convertê-la completamente em trabalho. Isso viola o enunciado da segunda lei da termodinâmica pautado na máquina térmica. Poderíamos fazer um raciocínio semelhante para mostrar que a máquina supereficiente também viola o enunciado da segunda lei da termodinâmica baseada no refrigerador. Observe que não precisamos supor que a máquina supereficiente seja reversível. De modo análogo, podemos mostrar que *nenhum refrigerador pode ter um coeficiente de desempenho maior do que o refrigerador de Carnot operando entre as mesmas temperaturas extremas*.

Logo, o enunciado afirmando que nenhuma máquina térmica pode ter uma eficiência maior do que a máquina de Carnot é outro enunciado equivalente à segunda lei da termodinâmica. Conclui-se também que **todas as máquinas de Carnot funcionando entre as mesmas temperaturas possuem a mesma eficiência, independentemente da substância de trabalho**. Embora tenhamos deduzido a Equação (20.14) para a máquina de Carnot usando um gás ideal como substância de trabalho, ela vale de fato para *qualquer* máquina de Carnot, qualquer que seja a substância de trabalho.

A Equação (20.14), que fornece a eficiência de uma máquina de Carnot, impõe um limite para a eficiência de qualquer máquina real, tal como uma turbina a vapor. Para maximizar esse limite superior e a eficiência da máquina real, o projetista deve fazer a temperatura T_H da etapa de fornecimento de calor ser a mais elevada possível, e a temperatura T_c da exaustão, a mais baixa possível.

A temperatura de exaustão não pode ser menor do que a menor temperatura disponível para esfriar a exaustão. Para a turbina a vapor de uma usina termelétrica, T_c pode ser a temperatura da água de um rio ou um lago; logo, é necessário que a temperatura T_H da caldeira seja a mais elevada possível. A pressão de vapor de qualquer líquido aumenta rapidamente com a temperatura, de modo que a resistência mecânica da caldeira impõe limites a esse aumento de temperatura. A 500 °C, a pressão de vapor da água é aproximadamente igual a 240×10^5 Pa (235 atm); esse valor constitui um limite prático aproximado para a pressão interna nas modernas caldeiras de vapor.

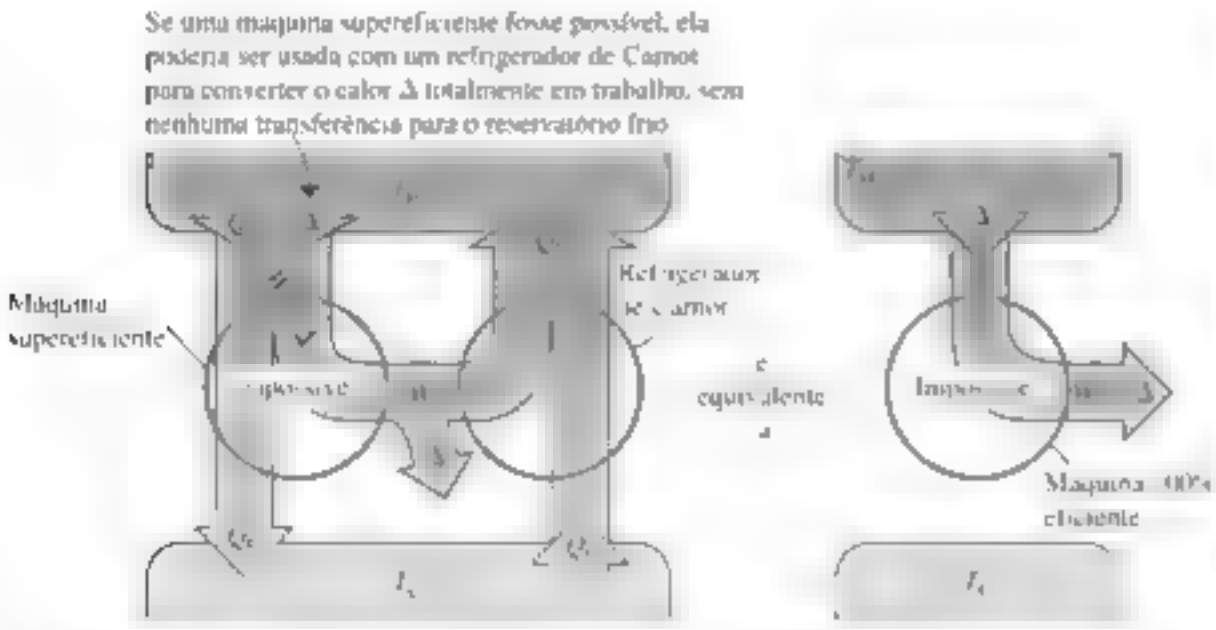

Se uma máquina supereficiente fosse possível, ela poderia ser usada com um refrigerador de Carnot para converter o calor Δ totalmente em trabalho, sem nenhuma transferência para o reservatório frio
Máquina supereficiente
Refrigerador de Carnot
é equivalente a
Máquina (100% eficiente)

Figura 20.15 Provando que a máquina de Carnot possui a maior eficiência possível. Uma máquina supereficiente mais eficiente do que uma máquina de Carnot é usada para converter o calor Δ totalmente em trabalho, sem nenhuma transferência de calor para o reservatório frio. Isso viola a Segunda lei da termodinâmica.

Figura 20.16 Para maximizar a eficiência, a temperatura no interior de um motor a jato deve ser a maior possível. São usados materiais cerâmicos especiais que suportam temperaturas de mais de 1000 °C sem que haja fusão ou amolecimento.

*A escala Kelvin de temperatura

No Capítulo 17, comentamos sobre a necessidade de se definir uma escala de temperatura que não dependa de nenhum material particular. Podemos agora usar o ciclo de Carnot para definir essa escala. A eficiência térmica de uma máquina de Carnot operando entre as temperaturas T_C e T_H de dois reservatórios é independente da substância de trabalho, e depende somente dessas temperaturas. Pela Equação (20.4), essa eficiência é

$$e = \frac{Q_H + Q_C}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H}$$

Portanto, a razão Q_C/Q_H é a mesma para *todas* as máquinas de Carnot operando entre as temperaturas T_C e T_H.

Kelvin propôs que podemos *definir* a razão entre as temperaturas T_C/T_H como igual ao módulo da razão Q_C/Q_H, entre a quantidade de calor absorvido e a quantidade de calor rejeitado:

$$\frac{T_C}{T_H} = \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = -\frac{Q_C}{Q_H}$$

(definição da temperatura Kelvin) (20.16)

A Equação (20.16) é muito parecida com a Equação (20.13), porém existe uma diferença sutil e crucial. As temperaturas na Equação (20.13) são baseadas em um termômetro de gás ideal, conforme definido na Seção 17.3, enquanto a Equação (20.16) *define* uma escala de temperatura pautada no ciclo de Carnot e na segunda lei da termodinâmica, e não depende do comportamento de nenhuma substância particular. Portanto, a **escala Kelvin de temperatura** é verdadeiramente *absoluta*. Para completar a definição da escala Kelvin, atribuímos, como fizemos na Seção 17.3, o valor arbitrário 273.16 K para a temperatura do ponto triplo da água. Quando uma substância é usada em um ciclo de Carnot, a razão entre o calor absorvido e o calor rejeitado $|Q_H|/|Q_C|$ é igual à razão entre as temperaturas dos respectivos reservatórios como *expressas pela escala de um termômetro de gás* definido na Seção 17.3. Visto que o ponto triplo da água foi escolhido com o valor 273.16 K em ambas as escalas, concluímos que a *escala Kelvin de temperatura e a escala do termômetro de gás ideal são idênticas*.

O ponto zero da escala Kelvin denomina-se **zero absoluto**. O zero absoluto pode ser interpretado em nível molecular; no zero absoluto, o sistema possui uma energia interna total (cinética mais potencial) *mínima*. Contudo, devido aos efeitos quânticos, *não* é correto dizer que em $T = 0$ todo movimento cessa. Existem razões teóricas para acreditar que o zero absoluto não pode ser atingido experimentalmente, embora temperaturas da ordem de 10^{-7} K já tenham sido atingidas. Quanto mais próxima for a temperatura do zero absoluto, mais difícil tornar-se-á abaixar essa temperatura. Um dos enunciados da *terceira lei da termodinâmica* é o de que é impossível atingir-se o zero absoluto em um número finito de processos termodinâmicos.

Teste sua compreensão da Seção 20.6 Um inventor em busca de apoio financeiro apresenta a você a idéia de um motor a gasolina que funciona em um novo tipo de ciclo termodinâmico. Seu projeto é totalmente feito de cobre e é resfriado a ar. Ele alega que o motor terá uma eficiência de 85%. Será prudente investir nesse maravilhoso novo motor? (*Sugestão*: ver Tabela 17.4.) ■

20.7 Entropia

A segunda lei da termodinâmica, conforme enunciada, possui forma bastante diferente das outras leis físicas conhecidas. Não foi formulada em termos de uma equação ou relação quantitativa, mas sim em termos da afirmação de uma *impossibilidade*. Contudo, a segunda lei da termodinâmica *pode* ser formulada mediante uma afirmação quantitativa usando-se o conceito de *entropia*, o assunto desta seção.

Mencionamos diversos processos que ocorrem naturalmente no sentido do aumento de desordem. O fluxo de calor irreversível faz a desordem aumentar porque inicialmente as moléculas estavam arrumadas em regiões quentes e frias; essa arrumação desaparece quando o sistema atinge o equilíbrio térmico. O calor fornecido a um corpo faz sua desordem aumentar porque ocorre um aumento de velocidade média de cada molécula e, portanto, o estado caótico aumenta. A expansão livre de um gás faz aumentar sua desordem porque as posições das moléculas tornam-se mais aleatórias do que antes da expansão.

Entropia e desordem

A **entropia** fornece uma previsão *quantitativa* da desordem. Para explicar esse conceito, vamos considerar uma expansão isotérmica de um gás ideal. Adicionamos uma quantidade de calor dQ e deixamos o gás expandir-se apenas enquanto sua temperatura permanecer constante. Como a energia interna de um gás ideal depende somente

Figura 20.17 Quando fogos de artifício explodem, a desordem aumenta: os produtos químicos cuidadosamente embalados dentro de cada cartucho são espalhados em todas as direções, e a energia química armazenada é convertida em energia cinética aleatória dos fragmentos.

de sua temperatura, a energia interna também é constante; logo, pela primeira lei, o trabalho dW realizado pelo gás é igual ao calor dQ fornecido ao gás. Ou seja,

$$dQ = dW = P\,dV = \frac{nRT}{V}\,dV \quad \text{então} \quad \frac{dV}{V} = \frac{dQ}{nRT}$$

O gás passa a um estado mais desordenado depois da expansão porque as moléculas se movem em um volume maior e suas posições tornam-se mais aleatórias. Logo, a variação relativa de volume dV/V constitui uma estimativa do aumento de desordem, e a equação anterior mostra que essa razão é proporcional à grandeza dQ/T. Introduzimos o símbolo S para entropia do sistema, e definimos a variação infinitesimal de entropia dS durante um processo reversível infinitesimal em uma temperatura absoluta T pela relação

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad \text{(processo reversível infinitesimal)} \qquad (20.17)$$

Se uma quantidade total de calor Q é fornecida durante um processo isotérmico reversível a uma temperatura absoluta T, a variação total de entropia $\Delta S = S_2 - S_1$ é dada por

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T}$$

(processo isotérmico reversível) (20.18)

A unidade de entropia é uma unidade de energia dividida por uma unidade de temperatura; no SI, a unidade de entropia é 1 J/K.

Agora, podemos ver como a razão Q/T se relaciona ao aumento da desordem. Uma temperatura maior implica um movimento mais aleatório. Se a substância está inicialmente fria, com movimento molecular pequeno, o fornecimento do calor Q produz um aumento fracionário substancial no movimento e no estado aleatório das moléculas. Se, no entanto, a substância já está quente, a mesma quantidade de calor fornecido produz um aumento relativamente menor no já elevado movimento molecular existente. Portanto, o quociente Q/T caracteriza de modo apropriado o crescimento da desordem quando o calor flui para o interior de um sistema.

Exemplo 20.5

VARIAÇÃO DA ENTROPIA NA LIQUEFAÇÃO Um quilograma de gelo a 0 °C é liquefeito e convertido em água a 0 °C. Calcule a variação de entropia, supondo que o processo de liquefação ocorra reversivelmente. O calor da água é $L_f = 3{,}34 \times 10^5$ J/kg.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR. A liquefação ocorre a uma temperatura constante de 0 °C, portanto este é um processo isotérmico reversível.

PREPARAR. O problema informa a quantidade de calor fornecida (em termos do calor de fusão) e a temperatura K. (Note que em cálculos de entropia sempre é preciso usar temperaturas absolutas, ou Kelvin.) Podemos, então, calcular a variação de entropia com a Equação (20.18).

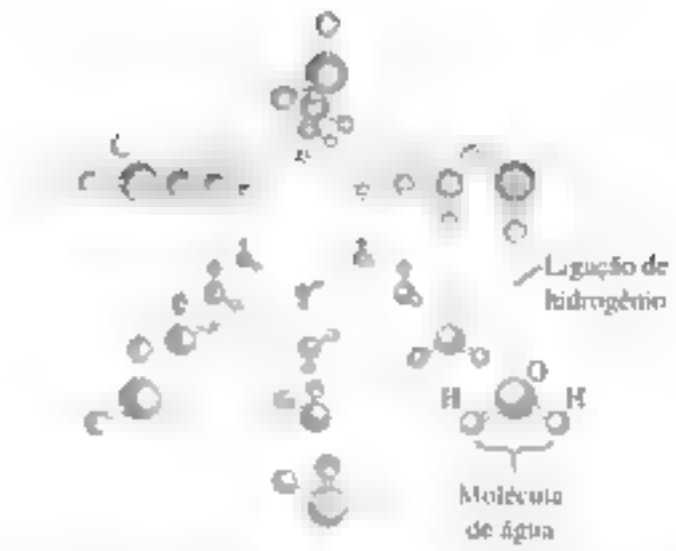


Figura 20.18 As moléculas de água são agrupadas em um cristal de gelo de modo regular e uniforme. Quando o gelo se funde, as ligações de hidrogênio entre as moléculas se rompem, produzindo aumento de desordem das moléculas de água e aumentando sua entropia.

EXECUTAR. O calor necessário para liquefazer o gelo é $Q = mL_f = 3{,}34 \times 10^5$ J. De acordo com a equação (20.18), o aumento da entropia do sistema é

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T} = \frac{3{,}34 \times 10^5\ \text{J}}{273\ \text{K}} = 1{,}22 \times 10^3\ \text{J/K}$$

AVALIAR. Esse aumento corresponde ao aumento de desordem quando as moléculas de água passam do estado sólido cristalino para o estado mais desordenado de líquido (Figura 20.18).

Em qualquer processo *isotérmico* reversível, a variação da entropia é igual ao calor transferido dividido pela temperatura absoluta. Quando congelamos a água, Q apresenta sinal contrário; logo, a variação da entropia da água é $\Delta S = -1{,}22 \times 10^3$ J/K. As moléculas da água se distribuem formando o gelo cristalino, de modo que tanto a desordem quanto a entropia diminuem.

Entropia em processos reversíveis

Podemos generalizar a definição de variação de entropia de modo a incluir *qualquer* processo reversível que conduza o sistema de um estado a outro, independentemente de ele ser isotérmico ou não. Podemos imaginar o processo como uma série de etapas infinitesimais reversíveis. Durante uma etapa típica, uma quantidade de calor infinitesimal dQ é fornecida ao sistema a uma temperatura absoluta T. A seguir, somamos (integramos) todas as razões dQ/T para o processo todo; ou seja,

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad \text{(variação de entropia em um processo reversível)} \qquad (20.19)$$

O limite 1 corresponde ao estado inicial, e 2 é o estado final.

Como a entropia mede a desordem de um dado sistema, ela depende apenas do estado presente do sistema, e não do que ocorreu no passado. Mais adiante mostraremos que isso é verdade. Quando um sistema evolui de um estado inicial com entropia S_1 até um estado final com entropia S_2, a variação de entropia $\Delta S = S_2 - S_1$, definida pela

Equação (20.19), não depende do percurso que leva o sistema do estado inicial ao estado final, mas é sempre a mesma em *todos* os processos *possíveis* entre o estado 1 e o estado 2. Portanto, a entropia de um sistema deve possuir um valor definido para um dado estado do sistema. Lembramos que a *energia interna*, apresentada no Capítulo 19, também possui essa propriedade, embora a entropia e a energia interna sejam grandezas completamente diferentes.

Uma vez que a entropia é uma função do estado do sistema, podemos também calcular variações de entropia em processos *irreversíveis* (não-equilíbrio) nos quais as equações (20.17) e (20.19) não poderiam ser aplicadas. Simplesmente inventamos um caminho ligando o estado final ao estado inicial que *seja* constituído totalmente por processos reversíveis, e calculamos a variação total de entropia nesse caminho hipotético. Não é o caminho real, mas o resultado deve ser o mesmo que seria obtido no caminho real.

Como no caso da energia interna, a discussão anterior não nos informa como calcular a entropia absoluta, apenas as variações de entropia em um dado processo. Assim como acontece com a energia interna, podemos atribuir arbitrariamente um valor para a entropia do sistema em um estado de referência e depois calcular a entropia de qualquer outro estado em referência a esse estado arbitrário.

Exemplo 20.8

VARIAÇÃO DE ENTROPIA EM UMA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA Um quilograma de água a 0 °C é aquecido até 100 °C. Calcule sua variação de entropia.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: na prática, o processo descrito seria feito irreversivelmente, talvez colocando uma panela com água em um fogão elétrico com uma superfície mantida a 100 °C. Mas a variação de entropia da água depende apenas dos estados inicial e final do sistema, e não faz se o processo é reversível ou irreversível.

PREPARAR: podemos imaginar que a temperatura da água seja aumentada reversivelmente em uma série de processos infinitesimais, em cada um dos quais a temperatura aumenta de um valor infinitesimal dT. Usamos então a Equação (20.19) para integrar todas essas etapas e calcular a variação de entropia em todo o processo.

EXECUTAR: pela Equação (17.14) o calor necessário para realizar cada uma dessas etapas é dado por $dQ = mc\,dT$. Substituindo essa relação na Equação (20.19) e integrando, encontramos

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = mc\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = mc\ln\frac{T_2}{T_1}$$

$$= (1{,}0\ \text{kg})(4190\ \text{J/kg}\cdot\text{K})\ln\frac{373\ \text{K}}{273\ \text{K}}$$

$$= 1{,}31\times 10^3\ \text{J/K}$$

AVALIAR: a variação de entropia é positiva, como era de se esperar em um processo em que o sistema absorve calor.

Neste cálculo, supusemos que o calor específico da água c não depende da temperatura. Trata-se de uma aproximação muito boa, uma vez que o calor específico c da água cresce menos do que 1% entre 0 °C e 100 °C.

Exemplo conceitual 20.9

UM PROCESSO ADIABÁTICO REVERSÍVEL Um gás se expande adiabática e reversivelmente. Qual é sua variação de entropia?

SOLUÇÃO

Em um processo adiabático, nenhum calor sai nem entra no sistema. Logo, $dQ = 0$ e *não existe nenhuma* variação de entropia nesse processo reversível: $\Delta S = 0$. Todo processo adiabático *reversível* é um processo com entropia constante. (Por essa razão, o processo adiabático reversível denomina-se processo *isentrópico*.) O aumento da desordem resultante do aumento de volume é compensado pela diminuição da desordem causada pela diminuição da temperatura do gás e redução das velocidades moleculares.

Exemplo 20.10

VARIAÇÃO DE ENTROPIA EM UMA EXPANSÃO LIVRE Uma caixa termicamente isolada é dividida por uma parede em dois compartimentos, cada um com volume V (Figura 20.19). Inicialmente um dos compartimentos contém n moles de um gás ideal a uma temperatura T, e no outro compartimento foi feito vácuo. A seguir, quebramos a parede e o gás se expande, preenchendo completamente os dois compartimentos da caixa. Qual é a variação de entropia nesse processo de expansão livre?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste processo, $Q = 0$, $W = 0$ e $\Delta U = 0$ e, portanto (como o sistema é um gás ideal), $\Delta T = 0$. Poderíamos pensar que a variação de entropia fosse igual a zero porque não existe troca de calor. Porém, a Equação (20.19) só vale quando o processo é reversível; esta expansão não é reversível e existe uma variação de entropia. O processo é adiabático, mas não é isentrópico, porque $\Delta S \neq 0$. Como mencionamos no início desta seção, a entropia aumenta em uma expansão livre porque as posições das moléculas tornam-se mais aleatórias do que antes da expansão.

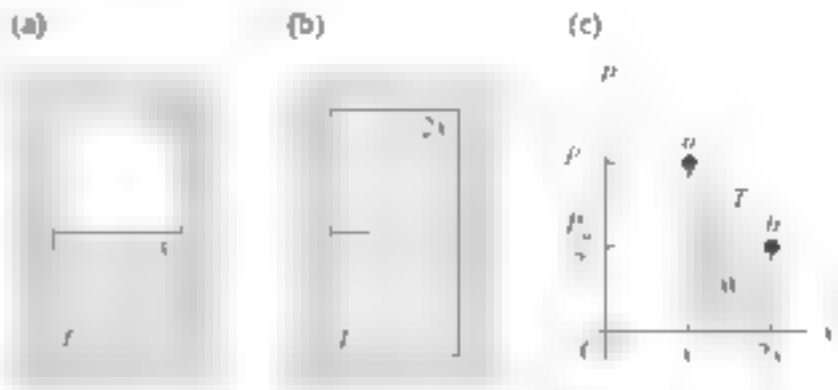


Figura 20.19 (a, b) Expansão livre de um gás ideal isolado. (c) O processo de expansão livre não passa por posições de equilíbrio de a até b. Contudo, a variação de entropia $S_b - S_a$ pode ser calculada usando-se o caminho isotérmico mostrado, ou *qualquer* outro processo reversível de a até b.

PREPARAR para calcular ΔS, lembramos que a variação de entropia só depende do estado final e do estado inicial. Podemos imaginar um processo *reversível* que apresente os mesmos pontos extremos, usar a Equação (20.19) para calcular a variação de entropia desse processo hipotético e, assim, saber qual foi a variação de entropia do processo original. Um processo reversível adequado neste caso é uma expansão isotérmica desde V até $2V$ a uma temperatura T. O gás realiza um trabalho W durante essa expansão isotérmica, de modo que seria necessário fornecer uma igual quantidade de calor Q para manter a energia interna constante. Encontramos a variação de entropia nesse processo isotérmico reversível usando a Equação (20.18); a variação de entropia na expansão livre será igual.

EXECUTAR verificamos no Exemplo 17.1 (Seção 17.3) que o trabalho realizado por n moles de um gás ideal em uma expansão isotérmica de um volume V_1 até um volume V_2 é dado por $W = nRT \ln (V_2/V_1)$. Usando $V_1 = V$ e $V_2 = 2V$, temos

$$Q = W = nRT \ln \frac{2V}{V} = nRT \ln 2$$

Portanto, a variação de entropia é

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln 2$$

e esse resultado também é a variação de entropia de uma expansão livre com o mesmo estado final e o mesmo estado inicial. Para um mol,

$$\Delta S = (1 \text{ mol})(8{,}314 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(\ln 2) = 5{,}76 \text{ J/K}$$

AVALIAR a variação de entropia é positiva, como havíamos previsto. O fator $(\ln 2)$ em nossa resposta é uma consequência de o volume ter aumentado em um fator de 2. Você consegue demonstrar que, se o volume houvesse aumentado na expansão livre de V para xV, onde x é um número arbitrário, a variação de entropia teria sido $\Delta S = nR \ln x$?

Exemplo 20.9

ENTROPIA E O CICLO DE CARNOT Calcule a variação total de entropia da máquina de Carnot do Exemplo 20.2 (Seção 20.6) durante um ciclo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR todas as quatro etapas do ciclo de Carnot são reversíveis (ver Figura 20.13); portanto, podemos usar a expressão para a variação de entropia em um processo reversível.

PREPARAR calculamos a variação de entropia em cada etapa e depois somamos as variações de entropia para obter o total para o ciclo inteiro.

EXECUTAR não existe nenhuma variação de entropia durante o processo de expansão adiabática. Durante a expansão isotérmica a $T_H = 500$ K, a máquina recebe 2000 J de calor, e a variação de entropia é

$$\Delta S_H = \frac{Q_H}{T_H} = \frac{2000 \text{ J}}{500 \text{ K}} = 4{,}0 \text{ J/K}$$

Durante a compressão isotérmica em $T_C = 350$ K, a máquina rejeita 1400 J de calor, e sua variação de entropia é

$$\Delta S_C = \frac{Q_C}{T_C} = \frac{-1400 \text{ J}}{350 \text{ K}} = -4{,}0 \text{ J/K}$$

A variação total de entropia da máquina durante um ciclo é

$$\Delta S_{máq} = \Delta S_H + \Delta S_C = 4{,}0 \text{ J/K} + (-4{,}0 \text{ J/K}) = 0.$$

AVALIAR o resultado $\Delta S_{máq} = 0$ nos diz que, quando a máquina de Carnot completa um ciclo, ela apresenta a mesma entropia que apresentava no início do ciclo. Discutiremos esse resultado na subseção seguinte.

Qual é a variação de entropia total do *ambiente* da máquina durante esse ciclo? O reservatório quente (500 K) fornece 2000 J de calor durante a expansão isotérmica reversível, logo sua variação de entropia é $(-2000 \text{ J})/(500 \text{ K}) = -4{,}0$ J/K; o reservatório frio (350 K) absorve 1400 J de calor durante a compressão isotérmica reversível, logo sua variação de entropia é $(+1400 \text{ J})/(350 \text{ K}) = +4{,}0$ J/K. Portanto, cada reservatório individual apresenta uma variação de entropia; contudo, a soma dessas variações — ou seja, a variação de entropia total do ambiente do sistema — é zero.

Esses resultados aplicam-se ao caso especial do ciclo de Carnot, em que *todos* os processos são reversíveis. Nesse caso, descobrimos que a variação de entropia total do sistema e do ambiente em conjunto é igual a zero. Veremos que, se o ciclo incluir processos irreversíveis (como no caso do ciclo Otto ou do ciclo Diesel da Seção 20.3), a variação de entropia total do sistema e do ambiente *não pode* ser zero, tem de ser positiva.

Entropia em processos cíclicos

O Exemplo 20.9 mostrou que a variação total de entropia em um ciclo de uma máquina de Carnot específica, que usa um gás ideal como substância de trabalho, é zero. Esse resultado decorre diretamente da Equação (20.13), que pode ser reescrita na forma

$$\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_C}{T_C} = 0 \qquad (20.20)$$

A razão Q_H/T_H é igual a ΔS_H, a variação de entropia que ocorre em $T = T_H$. Analogamente, Q_C/T_C é igual a ΔS_C, a variação de entropia que ocorre em $T = T_C$. Portanto, a Equação (20.20) afirma que $\Delta S_H + \Delta S_C = 0$, ou seja, a variação total de entropia é nula em um ciclo completo.

E quanto às máquinas de Carnot que usam outras substâncias de trabalho? De acordo com a segunda lei, *qualquer* máquina de Carnot operando entre duas dadas temperaturas T_H e T_C apresenta a mesma eficiência $e = 1 - T_C/T_H$ (Equação (20.14)). Combinando essa expressão de e com a Equação (20.4), $e = 1 + Q_C/Q_H$, reproduzimos exatamente a Equação (20.20). Logo, a Equação (20.20) vale para qualquer máquina de Carnot operando entre essas temperaturas, independentemente de a sua substância de trabalho ser um gás ideal. Concluímos que *a varia-*

ção total de entropia em um ciclo de qualquer máquina de Carnot é igual a zero.

Esse resultado pode ser generalizado para mostrar que a variação total de entropia em *qualquer* processo cíclico reversível é zero. Um processo cíclico reversível aparece em um diagrama *PV* como um caminho fechado (Figura 20.20a). Podemos aproximar esse caminho por meio de uma série de processos isotérmicos e adiabáticos, formando partes de muitos ciclos de Carnot longos e finos (Figura 20.20b). A variação total de entropia no ciclo completo é a soma das variações de entropia em cada pequeno ciclo de Carnot, cada um dos quais com uma variação de entropia igual a zero. Logo, **a variação total de entropia durante *qualquer* ciclo reversível é igual a zero:**

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

(processo cíclico reversível) (20.21)

Conclui-se que, quando um sistema sofre um processo reversível que o conduz de qualquer estado *a* até qualquer estado *b*, *a variação de entropia é independente do caminho seguido* (Figura 20.20c). Se a variação de entropia no caminho 1 fosse diferente da variação de entropia no caminho 2, o sistema poderia seguir o caminho 1 e, em seguida, voltar ao ponto inicial pelo caminho 2, com uma variação total de entropia diferente de zero. Isso violaria a conclusão de que a variação de entropia em qualquer ciclo deve ser sempre igual a zero. Como a variação de entropia em tais processos não depende do caminho, concluímos que, em qualquer estado determinado, o sistema possui um valor da entropia que depende somente do estado em que ele se encontra, e não dos processos que o conduziram ao referido estado.

Entropia em processos irreversíveis

Em um processo real reversível envolvendo apenas estados de equilíbrio, a variação total da entropia e do ambiente é igual a zero. Entretanto, todos os processos *irreversíveis* envolvem um aumento de entropia. Diferentemente da energia, *a entropia é uma grandeza que não se conserva*. A entropia de um sistema isolado *pode* variar, mas, como veremos, ela nunca pode diminuir. A expansão livre de um gás, descrita no Exemplo 20.8, é um exemplo de processo irreversível de um sistema isolado no qual existe um aumento de entropia.

Exemplo 20.10

UM PROCESSO IRREVERSÍVEL Suponha que 1,0 kg de água a 100 °C seja colocado em contato térmico com 1,0 kg de água a 0 °C. Qual é a variação total de entropia? Suponha que o calor específico da água seja constante e igual a 4190 J/kg · K nesse intervalo de temperatura.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este processo envolve um fluxo de calor irreversível devido à diferença entre as temperaturas.

PREPARAR: como há massas iguais de água a 0 °C e água a 100 °C, a temperatura final é a média dessas duas temperaturas, ou 50 °C. Embora os processos sejam irreversíveis, podemos calcular as variações de entropia da água (conceitualmente) quente e da água (conceitualmente) fria da mesma forma que no Exemplo 20.6, supondo que o processo ocorra reversivelmente. Precisamos usar a Equação (20.19) para calcular ΔS em cada substância, porque as temperaturas variam no processo.

EXECUTAR: a temperatura final é 50 °C = 323 K. A variação de entropia da água quente é

$$\Delta S_{\text{quente}} = mc\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = (1{,}0\text{ kg})(4190\text{ J/kg}\cdot\text{K})\int_{373\text{ K}}^{323\text{ K}}\frac{dT}{T}$$

$$= (4190\text{ J/K})\left(\ln\frac{323\text{ K}}{373\text{ K}}\right) = -603\text{ J/K}$$

A variação de entropia da água fria é

$$\Delta S_{\text{fria}} = (4190\text{ J/K})\left(\ln\frac{323\text{ K}}{273\text{ K}}\right) = +705\text{ J/K}$$

Figura 20.20 (a) Processo cíclico reversível de um gás ideal, descrito por uma curva fechada em um diagrama *PV*. (b) Podemos aproximar o caminho do processo por uma série de ciclos de Carnot longos e finos. Vemos que a variação de entropia total é zero em cada ciclo de Carnot e no processo cíclico real. (c) A variação de entropia entre os pontos *a* e *b* independe do caminho

A variação *total* de entropia do sistema é

$$\Delta S_{total} = \Delta S_{quente} + \Delta S_{fria} = (-603\ J/K) + 705\ J/K = +102\ J/K$$

AVALIAR um fluxo de calor irreversível em um sistema isolado é acompanhado por um aumento de entropia. Poderíamos ter chegado ao mesmo estado final simplesmente misturando as duas quantidades de água. Esse processo também é irreversível. como a entropia depende apenas do estado do sistema. a variação total de entropia seria a mesma, 102 J/K

É interessante observar que a entropia do sistema aumenta *continuamente* enquanto as duas quantidades de água entram em equilíbrio. Por exemplo, os primeiros 4190 J de calor transferidos resfriam a água quente até 99 °C e aquecem a água fria até 1 °C. A variação total da entropia nessa etapa é aproximadamente

$$\Delta S = \frac{-4190\ J}{373\ K} + \frac{4190\ J}{273\ K} = +4{,}1\ J/K$$

Você consegue demonstrar de um modo semelhante que a variação de entropia total é positiva em *qualquer* variação de temperatura de um grau que conduza ao estado de equilíbrio?

Entropia e a segunda lei

Os resultados do Exemplo 20.10 sobre o fluxo de calor de uma temperatura mais elevada para uma temperatura mais baixa, ou a mistura de substâncias com temperaturas diferentes, são característicos de *todos* os processos naturais (isto é, irreversíveis). Quando incluímos todas as variações de entropia no interior de um sistema, as variações positivas são sempre maiores do que as variações negativas. No caso especial de um processo *reversível*, os aumentos e diminuições de entropia são exatamente iguais. Portanto, podemos enunciar o princípio geral: **quando todas as variações de entropia que ocorrem em um processo são somadas, a entropia aumenta ou permanece constante.** Em outras palavras, **não existe nenhum processo com diminuição de entropia quando todas as possíveis variações de entropia são incluídas.** Essa afirmação constitui um enunciado alternativo para a segunda lei da termodinâmica em termos da entropia. Logo, ele é equivalente aos enunciados da 'máquina' e do 'refrigerador' discutidos anteriormente. A Figura 20.21 mostra um exemplo específico desse princípio geral.

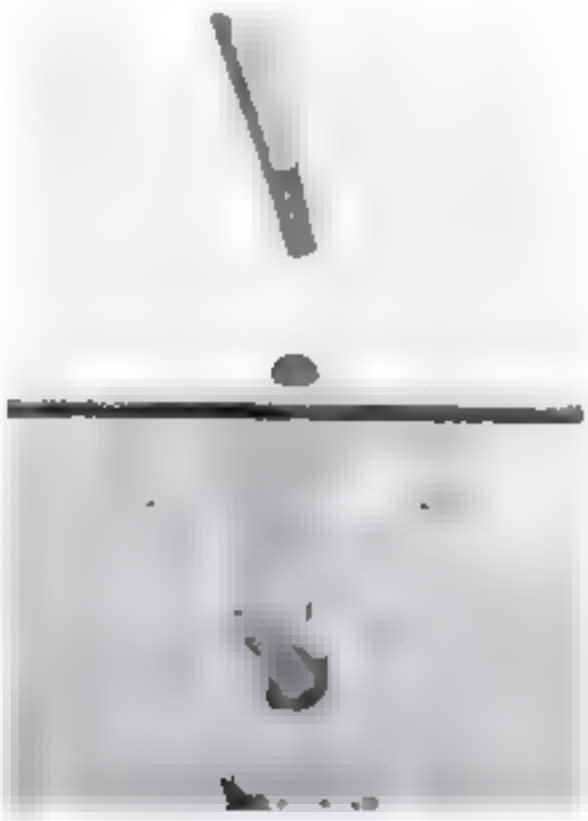


Figura 20.21 Quando misturamos tinta colorida com água, o sistema inicialmente possui uma relativa ordem (baixa entropia) e os fluidos inicialmente estão separados e podem ser distinguidos. O estado final, depois de ocorrer a mistura completa, é mais desordenado (entropia maior). A separação espontânea da água e da tinta, um processo em que haveria diminuição de entropia, nunca foi observado.

O aumento de entropia em todo processo irreversível natural mede o aumento da desordem e do caos no universo associado a esse processo. Considere novamente a mistura de água quente com água fria (Exemplo 20.10). *Poderíamos* usar a água quente e a água fria como os reservatórios quente e frio de uma máquina térmica. Enquanto retiramos calor da água quente e fornecemos calor para a água fria, podemos obter certa quantidade de trabalho. Porém, depois que a água se mistura e atinge o equilíbrio térmico, a oportunidade de se obter trabalho é perdida irremediavelmente. Depois do equilíbrio, a água quente não pode ser mais *separada* da água fria. Não existe nenhuma diminuição de *energia* quando a água quente se mistura com a água fria. O que foi perdido não foi a *energia*, mas a *disponibilidade*, ou seja, a oportunidade de se converter parte do calor da água quente em trabalho mecânico. Portanto, quando a entropia cresce, a energia para produção de trabalho se torna menos *disponível* e o universo se torna mais caótico ou aleatório.

Teste sua compreensão da Seção 20.7 Suponha que 2.0 kg de água a 50 °C variem espontaneamente de temperatura, de modo que metade da água esfrie até 0 °C enquanto a outra metade aquece espontaneamente até 100 °C. (Toda a água permanece líquida, portanto não congela nem ferve.) Qual seria a variação de entropia da água? Esse processo é possível? (*Sugestão:* ver Exemplo 20.10.) ❚

*20.8 Interpretação microscópica da entropia

Descrevemos na Seção 19.4 como a energia interna de um sistema pode ser calculada, pelo menos em teoria, somando-se todas as energias cinéticas das suas partículas constituintes e todas as energias potenciais da interação entre as partículas. Isso é chamado de cálculo *microscópico* da energia interna. Podemos também fazer um cálculo microscópico da entropia S de um sistema. Contudo, diferentemente da energia, a entropia não é algo que pertence a cada partícula individual ou a pares de partículas do sistema. Em vez disso, a entropia é uma medida da desordem do sistema como um todo. Para ver como podemos calcular a entropia microscopicamente, devemos, primeiro, introduzir o conceito de *estado microscópico* e de *estado macroscópico*.

Suponha que você jogue N moedas idênticas ao chão e metade delas dê cara e a outra metade, coroa. Trata-se de uma descrição do **estado macroscópico** do sistema de N moedas. Uma descrição do **estado microscópico** do sistema inclui informação sobre cada moeda individual: a moeda um deu cara, a moeda dois deu coroa, a moeda três deu coroa, e assim por diante. Podem existir muitos estados microscópicos que correspondem ao mesmo estado macroscópico. Por exemplo, com $N = 4$ moedas existem seis possibilidades em que uma metade dê cara e a outra metade, coroa (Figura 20.22). O número de estados microscópicos cresce rapidamente com o aumento de N; para $N = 100$ existem $2^{100} = 1{,}27 \times 10^{30}$ estados microscópicos, dos quais $1{,}01 \times 10^{29}$ dão metade cara e metade coroa.

A ocorrência menos provável da distribuição das moedas é que todas elas dêem cara ou todas elas deem coroa. É certamente possível que você consiga lançar cem moedas e todas dêem cara, mas não aposte nisso: a probabilidade dessa ocorrência é de apenas 1 em $1{,}27 \times 10^{30}$. No lançamento de N moedas, a probabilidade maior é que a metade dê cara e a outra metade dê coroa. A razão é que esse estado *macroscópico* possui o maior número possível de estados *microscópicos* correspondentes, conforme indicado na Figura 20.22.

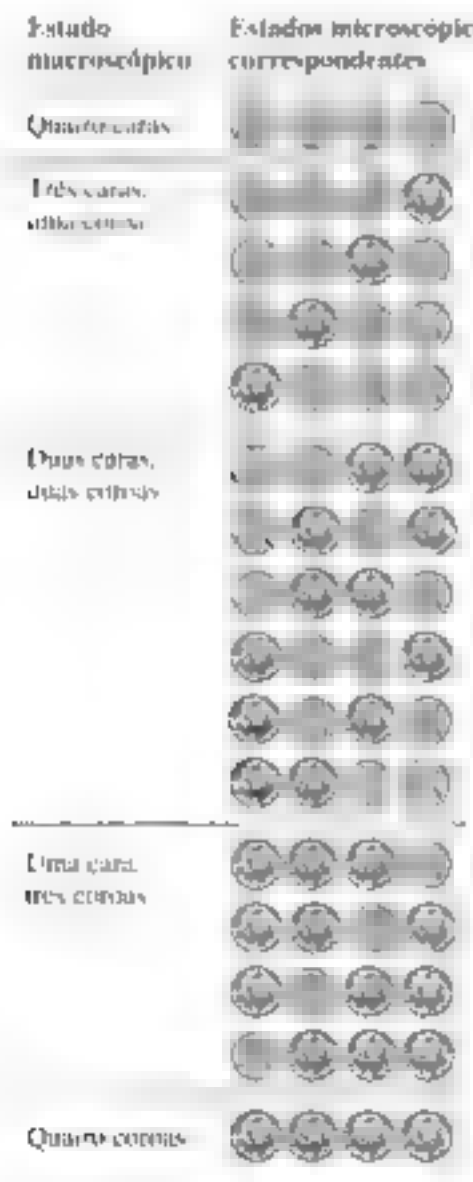


Figura 20.22 Todos os estados microscópicos possíveis para quatro moedas. Podem existir diversos estados microscópicos para cada estado macroscópico.

Para fazer a ligação com o conceito de entropia, note que N moedas todas dando cara constituem um estado macroscópico completamente ordenado; a descrição "todas caras" especifica completamente o estado de cada uma das N moedas. O mesmo é verdade quando todas as moedas dão coroa. Porém, a descrição macroscópica de "metade cara, metade coroa" por si só informa muito pouco sobre o estado (cara ou coroa) de cada moeda individual. Podemos dizer que o sistema está *desordenado* porque sabemos muito pouco acerca do seu estado microscópico. Comparando com o estado "todas caras" ou "todas coroas", o estado "metade cara, metade coroa" apresenta um número de estados microscópicos possíveis, muito maior desordem e, portanto, entropia muito maior (que é uma medida quantitativa da desordem).

Agora, em vez de N moedas, considere um mol de um gás ideal contendo o número de Avogadro de moléculas. O estado macroscópico desse sistema é dado pela pressão P, volume V e temperatura T; uma descrição do estado microscópico envolve o conhecimento da posição e da velocidade de cada molécula do gás. Em uma dada pressão, volume e temperatura, o número de estados microscópicos é astronomicamente grande e depende das posições e das velocidades das suas $6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas. Se o gás se expande e ocupa um volume maior, o intervalo de posições possíveis aumenta, assim como aumenta o número dos possíveis estados microscópicos. O sistema torna-se mais desordenado e a entropia aumenta, como calculamos no Exemplo 20.8 (Seção 20.7).

Podemos extrair a seguinte conclusão geral: **em qualquer sistema, o estado macroscópico mais provável é aquele com o maior número de estados microscópicos correspondentes, que é também o estado macroscópico com a maior desordem e a maior entropia.**

Calculando a entropia: estados microscópicos

Seja w o número de estados microscópicos possíveis para um dado estado macroscópico. (Para as quatro moedas mostradas na Figura 20.22, o estado referente a quatro caras seria $w = 1$, o estado com três caras e uma coroa, $w = 4$, e assim por diante.) Então podemos mostrar que a entropia S de um estado macroscópico é dada por

$$S = k \ln w \quad \text{(definição microscópica da entropia)} \tag{20.22}$$

onde $k = R/N_A$ é a constante de Boltzmann (constante dos gases por molécula) introduzida na Seção 18.3. Como a Equação (20.22) mostra, quando aumenta o número dos possíveis estados microscópicos w, a entropia S aumenta.

O que importa em um processo termodinâmico não é a entropia absoluta, mas sim a *diferença* de entropia entre o estado final e o estado inicial. Portanto, uma definição igualmente válida e útil poderia ser $S = k \ln w + C$, onde C é uma

constante, uma vez que C é cancelada em qualquer cálculo de diferença de entropia entre dois estados. No entanto, é conveniente fazer essa constante igual a zero e usar a Equação (20.22). Com essa escolha, como o menor valor possível de w é igual a um, o menor valor possível de entropia S de qualquer sistema é $k \ln 1 = 0$. A entropia *nunca* pode ser negativa.

Na prática, o cálculo de w é uma tarefa muito difícil, de modo que a Equação (20.22) costuma ser usada apenas quando calculamos a entropia absoluta S de um sistema específico. Porém, podemos usar essa relação para calcular *diferenças* de entropia entre um estado e outro. Considere um sistema que sofre uma transformação termodinâmica que o leva de um estado macroscópico 1, para o qual existem w_1 estados microscópicos, até um estado macroscópico 2, associado a w_2 estados microscópicos. A variação de entropia desse processo é dada por

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln w_2 - k \ln w_1 = k \ln \frac{w_2}{w_1} \qquad (20.23)$$

A *diferença* de entropia entre os dois estados macroscópicos depende da *razão* entre os números dos estados microscópicos possíveis.

Como o exemplo seguinte mostrará, aplicar a Equação (20.23) para calcular uma variação de entropia entre um estado macroscópico e outro fornece os mesmos resultados que considerar um processo reversível conectando esses dois estados e usando a Equação (20.19).

Exemplo 20.11

UM CÁLCULO MICROSCÓPICO DA VARIAÇÃO DE ENTROPIA

Use a Equação (20.23) para calcular a variação de entropia na expansão livre de n mols de um gás na temperatura T, conforme descrito no Exemplo 20.8 (Figura 20.23).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o problema pede que calculemos a variação de entropia usando o número de microestados no estado macroscópico inicial (Figura 20.23a) e no estado macroscópico final (Figura 20.23b).

PREPARAR: quando a parede é removida, as velocidades das moléculas não mudam, porque nenhum trabalho é realizado. Porém, cada molécula pode mover-se em um volume duas vezes maior e, portanto, dispõe de um número duas vezes maior de posições possíveis. Isso é tudo o que precisamos para calcular a variação de entropia usando a Equação (20.23).

EXECUTAR: seja w_1 o número de microestados do sistema como um todo quando o gás ocupa o volume V (Figura 20.23a). O número total de moléculas é $N = nN_A$, e cada molécula tem o dobro de estados possíveis depois que a divisória é retirada. Assim, o número w_2 de estados microscópicos quando o gás ocupa um volume $2V$ (Figura 20.23b) cresce de 2^N, ou seja, $w_2 = 2^N w_1$.

A variação de entropia nesse processo é

$$\Delta S = k \ln \frac{w_2}{w_1} = k \ln \frac{2^N w_1}{w_1} = k \ln 2^N$$

$$= Nk \ln 2$$

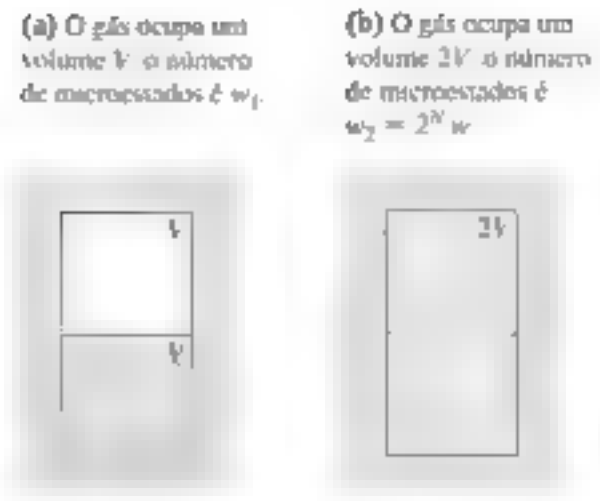


Figura 20.23 Na expansão livre de N moléculas na qual o volume dobra, o número possível de estados microscópicos aumenta de um fator 2^N.

Como $N = nN_A$ e $k = R/N_A$, obtemos

$$\Delta S = (nN_A)(R/N_A) \ln 2 = nR \ln 2$$

AVALIAR: portanto, encontramos o mesmo resultado que o obtido no Exemplo 20.8, porém sem nenhuma referência ao processo termodinâmico realizado pelo sistema.

Estados microscópicos e a segunda lei

A relação entre a entropia e o número de estados microscópicos nos proporciona uma nova visão do enunciado da segunda lei da termodinâmica, segundo o qual a entropia de um sistema isolado nunca pode diminuir. Pela Equação (20.22), concluímos que um sistema isolado nunca pode sofrer espontaneamente uma transformação que faça diminuir o número de estados microscópicos possíveis.

Um exemplo de tal processo proibido ocorreria se todo o ar na sala onde você está se contraísse espontaneamente e ocupasse metade do volume disponível, deixando um vácuo na outra metade. Essa 'compressão livre' seria o inverso da expansão livre dos exemplos 20.8 e 20.11. O número de estados microscópicos possíveis se reduziria de um fator 2^N. Em sentido estrito, esse processo não é impossível! A probabilidade de encontrar uma molécula na metade da sala é de $\frac{1}{2}$, de modo que a probabilidade de encontrar todas as moléculas na metade da sala é de $(\frac{1}{2})^N$. (Essa probabilidade é exatamente a mesma de se obter cara N vezes seguidas quando você lança N vezes uma moeda.) Essa probabilidade *não* é zero. Mas não se preocupe com a possibilidade de você vir a ficar sem ar para respirar na sua sala; considere que uma sala típica pode conter 1000 mols de ar; logo, $N = 1000N_A = 6{,}02 \times 10^{26}$ moléculas. A probabilidade de que todas essas moléculas fiquem na mesma metade da sala é, portanto, de $(\frac{1}{2})^N$, ou de $(\frac{1}{2})^{6{,}02 \times 10^{26}}$. Expresso sob forma de um número decimal, isso equivale a um número com mais de 10^{26} zeros depois da vírgula!

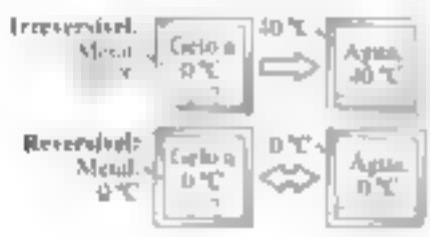
Como a probabilidade da ocorrência de uma 'compressão livre' é um número tão pequeno, ela certamente nunca ocorreu em nenhuma parte e em nenhum momento

no universo. Concluímos que, do ponto de vista prático, a segunda lei da termodinâmica nunca é violada.

Teste sua compreensão da Seção 20.8 Uma quantidade de N moléculas de um gás ideal ocupa inicialmente um volume V. A seguir o gás se expande até um volume $2V$. O número de estados microscópicos do gás aumenta nessa expansão. Sob quantas seguintes circunstâncias esse número aumentará mais? (i) Se a expansão for reversível e isotérmica; (ii) se a expansão for reversível e adiabática; (iii) a variação do número será igual em ambas as circunstâncias. ❚

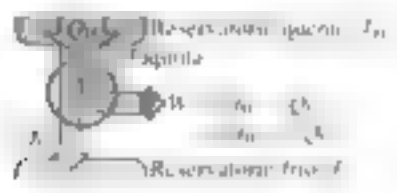
Resumo

Processos reversíveis e irreversíveis. Um processo reversível é aquele cujo sentido pode ser invertido por mudanças infinitesimais nas condições do processo, e em que o sistema está sempre em equilíbrio térmico, ou muito próximo do equilíbrio térmico. Todos os outros processos termodinâmicos são irreversíveis.



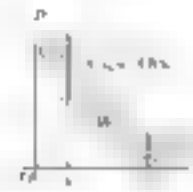
Máquinas térmicas. Uma máquina térmica recebe um calor Q_H de uma fonte, converte parte desse calor em trabalho W e rejeita o calor restante $|Q_C|$ em uma temperatura mais baixa. A eficiência térmica e de uma máquina térmica mede quanto do calor absorvido é convertido em trabalho. (Ver Exemplo 20.1.)

$$e = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_H} \qquad (20.4)$$



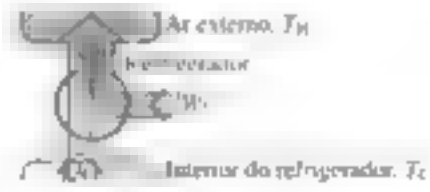
Ciclo Otto. Um motor a gasolina operando em um ciclo Otto possui uma eficiência máxima teórica e que depende da razão de compressão r e da razão entre os calores específicos γ da substância de trabalho.

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \qquad (20.6)$$

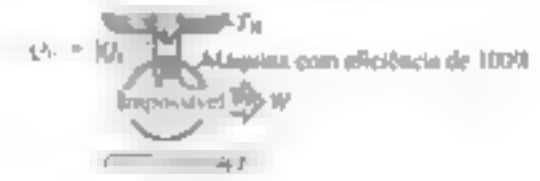


Refrigeradores. Um refrigerador recebe um calor Q_C de uma fonte mais fria, recebe um trabalho $|W|$, e rejeita um calor $|Q_H|$ em uma fonte mais quente. A eficiência do refrigerador é dada por seu coeficiente de desempenho K:

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} \qquad (20.9)$$



Segunda lei da termodinâmica. A segunda lei da termodinâmica descreve o sentido da realização de um processo termodinâmico natural. Ela pode ser descrita mediante diversos enunciados equivalentes. O enunciado da *máquina* afirma que nenhum processo cíclico pode converter completamente calor em trabalho. O enunciado do *refrigerador* afirma que nenhum processo cíclico pode transferir calor de um corpo frio para um corpo quente sem que nenhum trabalho seja fornecido ao sistema.

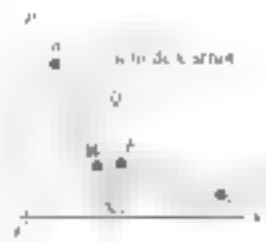


Ciclo de Carnot. O ciclo de Carnot opera entre dois reservatórios de calor com temperaturas T_H e T_C, e utiliza somente processos reversíveis. Sua eficiência térmica depende apenas de T_H e T_C. Um outro enunciado equivalente da segunda lei é o de que nenhuma máquina térmica operando entre os mesmos extremos de temperatura pode ter uma eficiência maior do que a máquina de Carnot. (Ver exemplos 20.2 e 20.3.)

Uma máquina de Carnot com um ciclo invertido é um refrigerador de Carnot. Seu coeficiente de desempenho depende apenas de T_H e T_C. Outro enunciado da segunda lei é: nenhum refrigerador operando entre dois limites de temperatura pode ter um coeficiente de desempenho maior que o coeficiente de desempenho do refrigerador de Carnot operando entre esses limites. (Ver Exemplo 20.4.)

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H} \qquad (20.14)$$

$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \qquad (20.15)$$



Entropia. A entropia é a medida quantitativa da desordem de um sistema. A variação de entropia de qualquer processo reversível depende da quantidade de fluxo de calor e da temperatura absoluta T. A entropia depende apenas do estado do sistema, e a

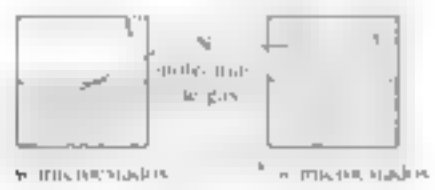
variação de entropia entre um dado estado final e um dado estado inicial é sempre a mesma em qualquer processo que leve o sistema do estado inicial ao estado final. Esse fato pode ser usado no cálculo da variação de entropia em um processo irreversível. (Ver exemplos 20.5–20.10.)

Um importante enunciado da segunda lei da termodinâmica afirma que a entropia de um sistema isolado pode crescer, mas nunca diminuir. Quando um sistema interage com suas vizinhanças, a variação total da entropia do sistema e do ambiente nunca pode diminuir. Quando a interação envolve apenas processos reversíveis, a entropia total é constante e $\Delta S = 0$; quando existe um processo irreversível, a variação total da entropia aumenta e $\Delta S > 0$.

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad \text{(processo reversível)} \tag{20.19}$$

Entropia e estados microscópicos. Quando um sistema está em dado estado macroscópico, as partículas que o compõem podem ser distribuídas em w possíveis estados microscópicos. Quanto maior for o número w, maior será a entropia. (Ver Exemplo 20.11.)

$$S = k \ln w \tag{20.22}$$



Principais termos

bomba de calor, 286
ciclo de Carnot, 288
ciclo Diesel, 284
ciclo Otto, 282
coeficiente de desempenho, 285
eficiência térmica, 281
entropia, 295
escala Kelvin de temperatura, 295
estado macroscópico, 299
estado microscópico, 299
máquina térmica, 280
processo cíclico, 280
processo de equilíbrio, 279
processo reversível, 279
processos irreversíveis, 278
razão de compressão, 282
refrigerador, 284
segunda lei da termodinâmica, 286
substância de trabalho, 280
zero absoluto, 295

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Sim. É isso o que um refrigerador faz: ele faz o calor fluir do interior frio do refrigerador para o exterior quente. A segunda lei da termodinâmica diz que o calor não pode fluir *espontaneamente* de um corpo frio para um corpo quente. Um refrigerador possui um motor que realiza trabalho sobre o sistema para *forçar* o calor a fluir nesse sentido.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

20.1 **Resposta: (ii).** Como deslizar um livro sobre a mesa, esfregar as mãos uma na outra utiliza a fricção, ou atrito, para converter energia mecânica em calor. O (impossível) processo inverso envolveria as suas mãos ficarem mais frias espontaneamente, e a energia liberada forçaria as suas mãos a se moverem ritmicamente para a frente e para trás!

20.2 **Respostas: (iii), (i), (ii).** Pela Equação (20.4) a eficiência é $e = W/Q_H$, e pela Equação (20.2), $W = Q_H + Q_C = |Q_H| - |Q_C|$. Para a máquina (i), $Q_H = 5000$ J e $Q_C = -4500$ J, então $W = 5000$ J + (−4500 J) = 500 J, e $e = (500\ \text{J})/(5000\ \text{H}) = 0,100$. Para a máquina (ii), $Q_H = 25000$ J e $W = 2000$ J, então $e = (2000\ \text{J})/(25000\ \text{J}) = 0,080$. Para a máquina (iii), $W = 400$ J e $Q_C = -2800$ J, logo, $Q_H = W - Q_C = 400\ \text{J} - (-2800\ \text{J}) = 3200$ J e $e = (400\ \text{J})/(3200\ \text{J}) = 0,125$.

20.3 **Respostas: (i), (ii).** Dobrar a quantidade de combustível queimado por ciclo significa dobrar Q_H, então o resultante aumento da pressão de b a c na Figura 20.6 é maior. A razão de compressão e, por conseguinte, a eficiência permanecem ambos iguais, então $|Q_C|$ (a quantidade de calor rejeitado para o meio ambiente) precisa aumentar do mesmo fator que Q_H. Assim, a diminuição da pressão de d até a na Figura 20.6 também é maior. O volume V e a razão de compressão r não variam; portanto, as dimensões horizontais do diagrama PV não se alteram.

20.4 **Resposta: não.** Um refrigerador usa o fornecimento de trabalho para transferir calor de um sistema (o interior do refrigerador) para outro sistema (o seu exterior, que inclui a casa onde o refrigerador está instalado). Se a porta estiver aberta, esses dois sistemas são, na verdade, o *mesmo* sistema e acabarão à mesma temperatura. Pela primeira lei da termodinâmica, todo o fornecimento de trabalho para o motor do refrigerador será convertido em calor e a temperatura da sua casa irá, na verdade, *aumentar*. Para esfriar a casa você precisa de um sistema que transfira calor para o mundo externo, como um condicionador de ar ou uma bomba de calor.

20.5 **Respostas: não, não.** Tanto a máquina com eficiência de 100% da Figura 20.11a, quanto o refrigerador sem trabalho da Figura 20.11b voltam ao final de um ciclo ao mesmo estado do início, portanto a variação da energia interna resultante em cada sistema é zero ($\Delta U = 0$). Na máquina com eficiência de 100%, o fluxo total de calor para a máquina é igual ao trabalho realizado total, logo $Q = W$, $Q - W = 0$, e a primeira lei é obedecida ($\Delta U = Q - W$). No refrigerador sem trabalho, nenhum trabalho total é realizado (portanto $W = 0$) e o calor que sai é igual ao que entra (portanto, $Q = 0$), então, novamente, $Q - W = 0$ e $\Delta U = 0$, de acordo com a primeira lei. É a segunda lei da termodinâmica que nos diz que tanto a máquina com eficiência de 100%, quanto o refrigerador sem trabalho são impossíveis.

20.6 **Resposta: não.** A eficiência não pode ser maior do que a de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas duas temperaturas extremas, $e_{\text{máx}} = 1 - (T_C/T_H)$ [Equação (20.14)]. A tem-

peratura T_C do reservatório frio dessa máquina resfriada a ar é cerca de 300 K (temperatura ambiente), e a temperatura T_H do reservatório quente não pode ser superior ao ponto de liquefação do cobre, 1356 K (ver Tabela 17.4). Assim, a maior eficiência possível da máquina de Carnot é $e = 1 - (300\ K)/(1356\ K) = 0.78$ ou 78%. A temperatura de qualquer máquina real será de ser menor do que essa, logo, seria impossível que a máquina do inventor atingisse 85% de eficiência. É melhor você investir seu dinheiro em outro projeto!

20.7 **Respostas: −102 J/K, não.** O processo descrito é exatamente o oposto do processo usado no Exemplo 20.10. O resultado viola a segunda lei da termodinâmica, a qual afirma que a entropia de um sistema isolado não pode diminuir.

20.8 **Resposta: (i).** No caso (i), vimos no Exemplo 20.8 (Seção 20.7) que, em um gás ideal, a variação de entropia em uma expansão livre é a mesma que em uma expansão isotérmica. Pela Equação (20.23), isso implica que a razão do número de estados microscópicos depois e antes da expansão, w_2/w_1, é também igual nos dois casos. Pelo Exemplo 20.11, $w_2/w_1 = 2^N$, então o número de estados microscópicos aumenta de um fator 2^N. No caso (ii), em uma expansão reversível a variação de entropia é $\int dQ/T = 0$; se a expansão é adiabática, não há transferência de calor, portanto $\Delta S = 0$. Pela Equação (20.23), $w_2/w_1 = 1$, e não há variação no número de estados microscópicos. A diferença é que, em uma expansão adiabática, a temperatura diminui e as moléculas se movem mais lentamente, então há menos estados microscópicos disponíveis para elas do que em uma expansão isotérmica.

Questões para discussão

Q20.1 Uma panela de pressão é cheia de água até a metade e sua tampa veda a panela de modo a impedir a saída de vapor d'água de seu interior. A panela é colocada sobre a chama de um fogão, e a água se vaporiza no seu interior. O gás é desligado, o vapor se condensa e o líquido volta ao seu estado inicial. Esse processo é reversível ou irreversível? Por quê?

Q20.2 Forneça dois exemplos de processos reversíveis e dois exemplos de processos irreversíveis em sistemas puramente mecânicos, tais como blocos escorregando em planos, molas, roldanas e bois. Explique o que faz o processo ser reversível ou irreversível.

Q20.3 Quais são os processos irreversíveis que ocorrem em um motor a gasolina? Por que eles são irreversíveis?

Q20.4 Você tenta esfriar a cozinha de sua casa deixando a porta da geladeira aberta. O que ocorrerá? Por quê? Esse resultado seria o mesmo que o obtido se você deixasse aberta a tampa de uma geladeira de isopor cheia de pedras de gelo? Caso os resultados sejam diferentes, explique a razão dessas diferenças.

Q20.5 Um membro do Congresso dos Estados Unidos propôs o seguinte esquema para produção de energia: as moléculas de água (H_2O) são quebradas, produzindo-se hidrogênio e oxigênio. A seguir, o hidrogênio é queimado (ou seja, combinado com o oxigênio), liberando energia no processo. O único produto dessa combustão seria água, de modo que não ocorreria nenhuma poluição. O que você pode dizer sobre esse esquema de produção de energia, analisando-o à luz da segunda lei da termodinâmica?

Q20.6 Converter energia mecânica completamente em calor é uma violação da segunda lei da termodinâmica? E converter calor completamente em trabalho? Explique suas respostas.

Q20.7 Imagine um filtro especial colocado na janela de uma casa. Os pequenos furos do filtro permitem a saída apenas de moléculas com velocidades maiores do que certa velocidade e somente a entrada de moléculas mais lentas do que um certo valor. Explique por que esse filtro produziria o resfriamento da casa e por que a segunda lei da termodinâmica proíbe a sua construção.

Q20.8 O eixo de um motor elétrico está ligado ao eixo de um gerador elétrico. O motor faz o gerador entrar em movimento, e certa corrente produzida pelo gerador é usada para fazer o motor girar. A corrente excedente é utilizada para iluminar uma casa. O que há de errado com esse esquema?

Q20.9 Quando uma roupa molhada é pendurada no deserto, onde sopra um vento quente, ela seca por evaporação, podendo atingir até uma temperatura da ordem de 20 °C abaixo da temperatura do ar. Discuta esse processo com base na segunda lei da termodinâmica.

Q20.10 Compare o diagrama *PV* do ciclo Otto na Figura 20.6 com o diagrama da máquina térmica de Carnot na Figura 20.13. Explique algumas das fundamentais diferenças entre os dois ciclos.

Q20.11 Se nenhuma máquina real pode ser tão eficiente quanto uma máquina de Carnot operando entre os mesmos limites de temperatura, por que deduzir e usar a Equação (20.14)?

Q20.12 A eficiência de máquinas térmicas é alta quando a diferença de temperatura entre os reservatórios frio e quente é grande. Refrigeradores, por outro lado, funcionam melhor quando a diferença de temperatura é pequena. Tendo em mente o ciclo do refrigerador mecânico mostrado na Figura 20.9, explique em termos físicos por que requer menos trabalho retirar calor da substância de trabalho quando os dois reservatórios (o interior do refrigerador e o ar externo) estão quase à mesma temperatura do que quando o ar externo é muito mais quente do que o interior do refrigerador.

Q20.13 Qual deveria ser a eficiência de uma máquina de Carnot operando com $T_H = T_C$? Qual seria a eficiência se $T_C = 0$ K e T_H fosse qualquer temperatura acima de 0 K? Justifique suas respostas.

Q20.14 Em máquinas térmicas reais, tal como o motor a gasolina de um carro, há sempre algum atrito entre as partes móveis, embora os óleos lubrificantes reduzam o atrito a um valor mínimo. Se o atrito entre as partes móveis da máquina fosse completamente eliminado, sua eficiência seria igual a 100%? Justifique sua resposta. Sua resposta depende do fato de a máquina seguir ou não um ciclo de Carnot? Novamente, justifique sua resposta.

Q20.15 Um refrigerador cheio de alimentos consome mais potência quando a temperatura ambiente é 20 °C ou quando a temperatura é 15 °C? Ou o consumo de potência é o mesmo? Explique seu raciocínio.

Q20.16 No Exemplo 20.4, um refrigerador de Carnot requer um fornecimento de trabalho de apenas 230 J para extrair 346 J de calor do reservatório frio. Essa discrepância não implica uma violação da lei da conservação de energia? Justifique sua resposta.

Q20.17 Explique por que cada um dos processos seguintes é um exemplo do aumento da desordem ou da aleatoriedade: mistura de água quente com água fria, expansão livre de um gás, fluxo de calor irreversível e produção de calor pelo atrito mecânico. Existe aumento de entropia em todos esses casos? Justifique sua resposta.

Q20.18 A expansão livre de um gás é um processo adiabático e, portanto, não há transferência de calor. Nenhum trabalho é realizado, logo a energia interna não se altera. Dessa forma, $Q/T = 0$. Apesar disso, a desordem do sistema e a sua entropia aumentaram após a expansão. Por que a Equação (20.19) não se aplica a essa situação?

Q20.19 A Terra e o Sol estão em equilíbrio térmico? Existe variação de entropia associada à transmissão de energia do Sol para a Terra? A radiação difere dos outros modos de transferência de calor no que diz respeito a variações de entropia? Explique seu raciocínio.

Q20.20 Discuta as variações de entropia envolvidas na preparação e no consumo de um *sundae* com uma cobertura de calda quente.
Q20.21 Se você roda um filme de trás para a frente, é como se o sentido do tempo fosse invertido. No filme com o tempo invertido, você veria processos que violam a conservação da energia? E a conservação do momento linear? Você veria processos que violam a segunda lei da termodinâmica? Em cada um dos casos, se ocorrerem processos que violem alguma lei, dê alguns exemplos.
Q20.22 Alguns críticos da teoria da evolução biológica afirmam que essa teoria viola a segunda lei da termodinâmica, uma vez que a evolução implica a transformação de uma forma de vida mais simples em outra forma de vida mais complexa, com organismos mais ordenados. Explique por que esse não é um argumento válido contra a teoria da evolução.
Q20.23 Uma planta que cresce cria uma estrutura altamente complexa e organizada a partir de materiais simples como o ar, a água e alguns minerais. Isso viola a segunda lei da termodinâmica? Justifique sua resposta. Qual é a fonte de energia primária de uma planta? Explique seu raciocínio.

Exercícios

Seção 20.2 Máquinas térmicas

20.1 Um motor Diesel produz 2200 J de trabalho mecânico e rejeita 4300 J de calor em cada ciclo. a) Qual deve ser a quantidade de calor a ser fornecida para a máquina em cada ciclo? b) Qual é a eficiência térmica da máquina?
20.2 O motor de um avião recebe um calor de 9000 J e rejeita 6400 J em cada ciclo. a) Qual é o trabalho realizado pela máquina em cada ciclo? b) Qual é a eficiência térmica da máquina?
20.3 **Motor a gasolina.** Um motor a gasolina consome 16 000 J de calor e realiza 3700 J de trabalho em cada ciclo. O calor é obtido pela queima de gasolina com calor de combustão igual a $4{,}60 \times 10^2$ J/g. a) Qual é a eficiência térmica? b) Qual é a quantidade de calor rejeitada em cada ciclo? c) Qual é a massa de combustível queimada em cada ciclo? d) Se o motor gira com 60,0 ciclos por segundo, qual é a potência fornecida pelo motor em quilowatts?
20.4 Um motor a gasolina produz uma potência igual a 180 kW. Sua eficiência é 28%. a) Qual é a quantidade de calor fornecida para a máquina por segundo? b) Qual é o calor rejeitado pela máquina por segundo?
20.5 Certa usina termelétrica alimentada por reação nuclear produz uma potência mecânica (usada para operar um gerador elétrico) igual a 330 MW. Sua taxa de absorção de calor do reator nuclear é igual a 1300 MW. a) Qual é a eficiência térmica? b) Com que taxa o calor é rejeitado?

Seção 20.3 Máquinas de combustão interna

20.6 a) Calcule a eficiência teórica de um motor do ciclo Otto com $\gamma = 1{,}40$ e $r = 9{,}50$, a temperatura da mistura ar–gasolina quando ela entra no cilindro é igual a 22 °C (ponto *a* da Figura 18.3). b) Se esse motor requer 10 000 J de calor da queima de seu combustível, quanto calor ele rejeita para o ar externo?
20.7 Qual deve ser a razão de compressão r de um ciclo Otto para que ele atinja uma eficiência ideal de 65,0% para $\gamma = 1{,}40$?
20.8 O motor de ciclo Otto de um Mercedes-Benz SLK230 tem uma razão de compressão igual a 8,8. a) Qual é a eficiência ideal do motor? Use $\gamma = 1{,}40$. b) O motor de um Dodge Viper GTS possui uma razão de compressão ligeiramente maior e igual a 9,6. Qual é o aumento da eficiência ideal produzido por esse aumento da razão de compressão?

Seção 20.4 Refrigeradores

20.9 Um refrigerador possui um coeficiente de desempenho igual a 2,10. Ele absorve $3{,}40 \times 10^4$ J de calor de um reservatório frio em cada ciclo. a) Qual é a energia mecânica em cada ciclo necessária para operar o refrigerador? b) Durante cada ciclo, qual é o calor rejeitado para o reservatório quente?
20.10 Um condicionador de ar em uma sala tem um coeficiente de desempenho igual a 2,9 em um dia quente, e usa 850 W de potência elétrica. a) Quantos joules de calor o condicionador de ar retira da sala em um minuto? b) Quantos joules de calor o condicionador fornece ao ar quente em um minuto? c) Explique por que as suas respostas às partes (a) e (b) não são iguais.
20.11 Uma unidade de condicionador de ar em uma janela absorve $9{,}80 \times 10^4$ J de calor por minuto de uma sala que está sendo resfriada e, no mesmo intervalo de tempo, despeja $1{,}44 \times 10^5$ J de calor no ar externo. a) Qual é o consumo de potência dessa unidade em watts? b) Qual é a eficiência energética dessa unidade?
20.12 Um *freezer* possui um coeficiente de desempenho igual a 2,40. O *freezer* deve converter 1,80 kg de água a 25 °C em 1,80 kg de gelo a –5 °C em uma hora. a) Que quantidade de calor deve ser removida da água a 25 °C para convertê-la em gelo a –5 °C? b) Qual é a energia elétrica consumida pelo *freezer* durante uma hora? c) Qual é a quantidade de calor rejeitado para a sala na qual o *freezer* está localizado?

Seção 20.6 O ciclo de Carnot

20.13 Uma máquina de Carnot cujo reservatório quente está a uma temperatura de 620 K absorve 550 J de calor nessa temperatura em cada ciclo e fornece 335 J para o reservatório frio. a) Qual é o trabalho produzido pela máquina durante cada ciclo? b) Qual é a temperatura da fonte fria? c) Qual é a eficiência térmica do ciclo?
20.14 Uma máquina de Carnot opera entre dois reservatórios com temperaturas de 520 K e 300 K. a) Se a máquina recebe 6,45 kJ de calor do reservatório a 520 K em cada ciclo, quantos joules por ciclo ela rejeita ao reservatório a 300 K? b) Qual é o trabalho mecânico produzido pela máquina durante cada ciclo? c) Qual é a eficiência térmica da máquina?
20.15 Uma máquina de Carnot tem uma eficiência de 59% e realiza $2{,}5 \times 10^4$ J de trabalho em cada ciclo. a) Quanto calor a máquina extrai de sua fonte de calor em cada ciclo? b) Suponha que a máquina rejeite calor para a sala à temperatura de 20 °C. Qual é a temperatura de sua fonte de calor?
20.16 Uma máquina que produz gelo opera com um ciclo de Carnot. Ela recebe calor da água a 0 °C e rejeita calor para uma sala a 24 °C. Suponha que 85,0 kg de água a 0 °C sejam convertidos em gelo a 0 °C. a) Qual é o calor rejeitado para a sala? b) Qual é a energia que deve ser fornecida para a máquina?
20.17 Um refrigerador de Carnot opera entre dois reservatórios de temperaturas de 320 K e 270 K. a) Se em cada ciclo o refrigerador recebe 415 J de calor do reservatório a 270 K, qual é a quantidade de calor em joules transferida para o reservatório a 320 K? b) Se o refrigerador executa 165 ciclos em cada minuto, qual é a potência necessária para operar o refrigerador? c) Qual é o coeficiente de desempenho do refrigerador?
20.18 Um dispositivo de Carnot extrai 5,0 kJ de calor de um corpo a –10 °C. Que trabalho é realizado quando o dispositivo rejeita calor para o ambiente a uma temperatura de a) 25 °C, b) 0 °C, c) –25 °C? Em cada caso, o dispositivo funciona como uma máquina ou como um refrigerador?

20.19 Certa marca de *freezer* anuncia que usa 730 kW · h de energia por ano. a) Supondo que o *freezer* funcione durante 5 horas todos os dias, quanta potência ele requer enquanto está em funcionamento? b) Se o *freezer* mantém seu interior a uma temperatura de −5 °C em uma sala a 20 °C, qual é o seu coeficiente de desempenho teórico máximo? c) Qual é a quantidade máxima teórica de gelo que esse *freezer* poderia fazer em uma hora, partindo de água a 20 °C?

20.20 Uma máquina ideal de Carnot funciona entre 500 °C e 100 °C com um fornecimento de calor de 250 J por ciclo. a) Que quantidade de calor é fornecida ao reservatório frio em cada ciclo? b) Qual é o número mínimo de ciclos necessário para que a máquina erga uma pedra de 500 kg a uma altura de 100 m?

20.21 Uma máquina térmica de Carnot possui uma eficiência térmica igual a 0,600, e a temperatura de seu reservatório quente é 800 K. Se 3000 J de calor forem rejeitados para o reservatório frio em um ciclo, quanto trabalho a máquina realiza durante um ciclo?

20.22 Uma máquina térmica de Carnot usa um reservatório quente que consiste em uma grande quantidade de água fervente e um reservatório frio formado por um grande tanque de gelo e água. Em 5 minutos de funcionamento, o calor rejeitado pela máquina derrete 0,0400 kg de gelo. Durante esse tempo, quanto trabalho W é realizado pela máquina?

20.23 Você projeta uma máquina que absorve $1,50 \times 10^4$ J de calor a 650 K em cada ciclo e rejeita calor a uma temperatura de 350 K. A máquina completa 240 ciclos em 1 minuto. Qual é o máximo rendimento de potência teórico da sua máquina, em cavalos-vapor?

20.24 a) Mostre que a eficiência e de uma máquina de Carnot e o coeficiente de desempenho K de um refrigerador de Carnot são relacionados por $K = (1 - e)/e$. A máquina e o refrigerador operam entre os mesmos reservatórios quentes e frios. b) Qual é o valor de K para os valores limites quando $e \to 1$ e $e \to 0$? Explique.

Seção 20.7 Entropia

20.25 Um estudante universitário, na falta do que fazer, aquece 0,350 kg de gelo a 0 °C até ele se fundir completamente. a) Qual é a variação da entropia da água? b) A fonte de calor é um corpo com massa muito grande a uma temperatura igual a 25 °C. Qual é a variação de entropia do corpo? c) Qual é a variação total de entropia da água e da fonte de calor?

20.26 Você decide tomar um banho quente, mas descobre que o seu descuidado companheiro de quarto usou quase toda a água quente. Você enche a banheira com 270 kg de água e tenta aquecê-la mais despejando 5,0 kg de água fervente aquecida no fogão. a) Esse processo é reversível ou irreversível? Use raciocínio físico para explicar. b) Calcule a temperatura final da água do banho. c) Calcule a variação total na entropia do sistema (água da banheira + água fervente), supondo que não haja troca de calor com o ar e com a própria banheira.

20.27 Um bloco de gelo de 15,0 kg a 0 °C se liquefaz a 0 °C dentro de uma sala grande com uma temperatura de 20 °C. Considere o gelo e a sala um sistema isolado, e suponha que a sala seja grande o bastante para que sua variação de temperatura possa ser desprezada. a) A liquefação do gelo é reversível ou irreversível? Explique, usando raciocínio físico simples e sem recorrer a nenhuma equação. b) Calcule a variação de entropia total do sistema durante esse processo. Comente se esse resultado é compatível ou não com a sua resposta à parte (a).

20.28 Você faz chá com 0,250 kg de água a 85 °C e deixa esfriar à temperatura ambiente (20 °C) antes de bebê-lo. a) Calcule a variação de entropia da água enquanto esfria. b) O processo de resfriamento é essencialmente isotérmico para o ar em sua cozinha. Calcule a variação de entropia do ar enquanto o chá esfria, supondo que todo o calor perdido pela água vá para o ar. Qual é a variação total de entropia do sistema chá–ar?

20.29 Em um processo reversível, 3 moles de um gás ideal são comprimidos isotermicamente a 20 °C. Durante a compressão, um trabalho de 1850 J é realizado sobre o gás. Qual é a variação de entropia do gás?

20.30 Qual é a variação de entropia de 0,130 kg do gás hélio no seu ponto de ebulição normal quando todo ele condensa isotermicamente em 1,0 L de hélio líquido? (*Sugestão*: ver a Tabela 17.4 na Seção 17.6.)

20.31 a) Calcule a variação de entropia quando 1,0 kg de água a 100° C é vaporizado e convertido em vapor d'água a 100 °C. (Ver a Tabela 17.4.) b) Compare sua resposta com a variação de entropia quando 1,0 kg de gelo funde-se a 0 °C, calculada no Exemplo 20.5 (Seção 20.7). A variação de entropia é maior ou menor do que a variação de entropia na liquefação? Interprete sua resposta, usando a idéia de que a entropia está associada ao grau de desordem de um sistema.

20.32 a) Calcule a variação de entropia quando ocorre vaporização de 1,0 mol de água (massa molecular 18,0 g/mol) a 100 °C. b) Repita o cálculo da parte (a) para 1,0 mol de nitrogênio líquido, 1,0 mol de prata e 1,0 mol de mercúrio quando cada um desses materiais é vaporizado em seu ponto de ebulição normal. (Veja a Tabela 17.4 para os calores de vaporização e o Apêndice D para as massas moleculares. Note que a molécula de nitrogênio é N_2.) c) As respostas que você encontrou nos itens (a) e (b) devem concordar com boa aproximação. (Resultado conhecido como *regra de Dreyer e Trouton*.) Explique por que isso acontece usando a idéia de que a entropia mede o grau de desordem de um sistema.

20.33 Se 25,0 g do metal gálio derretem na sua mão (ver Figura 17.20), qual é a variação de entropia do gálio nesse processo? E quanto à variação de entropia da sua mão? É positiva ou negativa? É maior ou menor em módulo do que a variação de entropia do gálio?

*Seção 20.8 Interpretação microscópica da entropia

*20.34 Uma caixa possui dois compartimentos separados por uma divisória. O lado esquerdo da caixa contém 500 moléculas do gás nitrogênio; o lado direito contém 100 moléculas do gás oxigênio. Os dois gases estão à mesma temperatura. A divisória é perfurada, e o equilíbrio é atingido. Suponha que o volume da caixa seja suficientemente grande para que cada gás sofra uma expansão livre mantendo sua temperatura constante. a) Em média, quantas moléculas de cada gás estarão em cada metade da caixa? b) Qual é a variação de entropia do sistema depois que a divisória foi perfurada? c) Qual seria a probabilidade de encontrar as moléculas com a mesma distribuição existente antes de a divisória ser perfurada, ou seja, 500 moléculas de nitrogênio do lado esquerdo e 100 moléculas de oxigênio do lado direito?

*20.35 Dois moles de gás ideal ocupam um volume V. O gás sofre uma expansão isotérmica reversível até um volume $3V$. a) A distribuição das velocidades se altera com a expansão isotérmica? Explique. b) Use a Equação (20.23) para calcular a variação de entropia do gás. c) Use a Equação (20.18) para calcular a variação de entropia do gás. Compare este resultado com o obtido na parte (b).

*20.36 Um balão solitário com um volume de 2,40 L e contendo 0,100 mol de ar é solto na Estação Espacial Internacional, que está temporariamente desabitada e despressurizada. A luz do sol entran-

do por uma janela aquece e explode o balão, fazendo com que o ar dentro dele passe por uma expansão livre dentro da estação vazia, cujo volume total é 425 m³. Calcule a variação de entropia do ar durante a expansão.

Problemas

20.37 Você projeta uma máquina de Carnot que funciona entre as temperaturas de 500 K e 400 K e realiza 2000 J de trabalho em cada ciclo. a) Calcule a eficiência de sua máquina. b) Calcule a quantidade de calor descartada durante a compressão isotérmica a 400 K. c) *Desenhe* as isotermas de 500 K e 400 K em um diagrama *PV* (sem fazer os cálculos); depois esboce o ciclo de Carnot seguido por sua máquina. d) No mesmo diagrama, *desenhe* a isoterma de 300 K, depois desenhe, com uma cor diferente, se possível, o ciclo de Carnot começando novamente no mesmo ponto da isoterma de 500 K, mas funcionando em um ciclo entre as isotermas de 500 K e de 300 K. e) Compare as áreas dentro das curvas (o trabalho total realizado) nos dois ciclos. Note que a mesma quantidade de calor é extraída do reservatório quente em ambos os casos. Você consegue explicar por que menos calor é "perdido" durante a compressão isotérmica a 300 K em relação à compressão a 400 K?

20.38 Você está projetando uma máquina de Carnot com 2 moles de CO_2 como substância de trabalho; o gás pode ser considerado ideal. O gás precisa ter uma temperatura máxima de 527 °C e uma pressão máxima de 5,0 atm. Com um fornecimento de calor de 400 J por ciclo, você quer 300 J de trabalho útil. a) Ache a temperatura do reservatório frio. b) Quantos ciclos a máquina precisa efetuar para derreter completamente um bloco de gelo de 10,0 kg originalmente a 0 °C usando apenas o calor rejeitado pela máquina?

20.39 Uma máquina de Carnot cujo reservatório frio está a −90 °C possui eficiência de 40%. Um engenheiro recebeu a tarefa de fazer a eficiência aumentar para 45%. a) De quantos graus Celsius a temperatura do reservatório quente deve aumentar, se a temperatura do reservatório frio permanece constante? b) De quantos graus Celsius a temperatura da fonte fria deve diminuir mantendo constante a temperatura da fonte quente?

20.40 Uma máquina térmica usa 0,350 mol de um gás diatômico ideal e executa o ciclo indicado no diagrama *PV* da Figura 20.24. O processo $1 \rightarrow 2$ ocorre a volume constante, o processo $2 \rightarrow 3$ é adiabático e o processo $3 \rightarrow 1$ ocorre a uma pressão constante de 1,0 atm. O valor de γ para esse gás é 1,40. a) Ache a pressão e o volume nos pontos 1, 2 e 3. b) Calcule Q, W e ΔU em cada um em um dos três processos. c) Ache o trabalho total realizado pelo gás no ciclo. d) Calcule o fluxo de calor total para o interior da máquina em um ciclo. e) Qual é a eficiência térmica da máquina? Como esse valor se compara à eficiência de um ciclo de Carnot operando entre as mesmas temperaturas extremas T_1 e T_2?

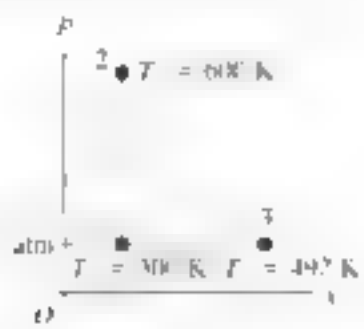


Figura 20.24 Problema 20.40

20.41 Você constrói uma máquina térmica que reque 1,0 mol de um gás ideal diatômico em todo o ciclo mostrado na Figura 20.25. a) Mostre que o segmento *ab* é uma compressão isotérmica. b) Durante qual(is) segmento(s) do ciclo o calor é absorvido pelo gás? Durante qual(is) segmento(s) o calor é rejeitado? Como você sabe disso? c) Calcule a temperatura nos pontos *a*, *b* e *c*. d) Calcule o calor total trocado com o meio ambiente e o trabalho total realizado pela máquina em um ciclo. e) Calcule a eficiência térmica da máquina.

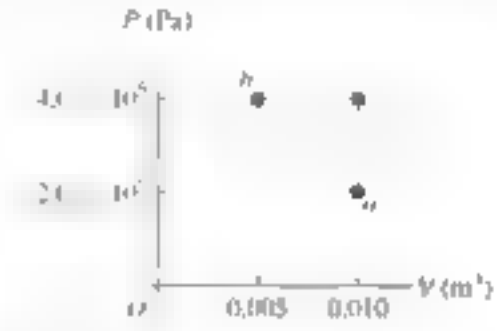


Figura 20.25 Problema 20.41

20.42 **Bomba de calor.** Uma bomba de calor é uma máquina térmica operando no sentido contrário. No inverno, ela bombeia o calor do ar frio exterior para dentro do ar quente do interior do prédio, mantendo-o em uma temperatura agradável. No verão, ela bombeia o calor do ar frio do interior do prédio para o ar quente do exterior, agindo como um condicionador de ar. a) Se a temperatura exterior no inverno é −5 °C e a temperatura interior é 17 °C, quantos joules de calor a bomba de calor fornecerá no interior para cada joule de energia elétrica usado para operar a unidade, imaginando um ciclo de Carnot ideal? b) Suponha que você tenha a opção de usar aquecimento por resistência elétrica, em vez de uma bomba de calor. Quanta energia elétrica você irá necessitar para fornecer a mesma quantidade de calor ao interior da casa que na parte (a)? Considere uma bomba de calor de Carnot fornecendo calor ao interior de uma casa para mantê-la a 68 °F. Mostre que a bomba de calor fornece *menos* calor por joule de energia elétrica usado para operar a unidade à medida que a temperatura externa diminui. Observe que esse comportamento é o oposto da dependência da eficiência de uma máquina térmica de Carnot em relação à diferença entre as temperaturas dos reservatórios. Explique por que isso acontece.

20.43 Uma máquina térmica funciona segundo o ciclo mostrado na Figura 20.26. A substância de trabalho é 2,0 mols de gás hélio, que atinge uma temperatura máxima de 327 °C. Considere o hélio um gás ideal. O processo *bc* é isotérmico. A pressão nos estados *a* e *c* é $1,0 \times 10^5$ Pa, e a pressão no estado *b* é $3,0 \times 10^5$ Pa. a) Quanto calor entra no gás e quanto calor sai do gás a cada ciclo? b) Quanto trabalho a máquina realiza a cada ciclo, e qual é a sua eficiência? c) Compare a eficiência dessa máquina com a máxima eficiência possível dos reservatórios quente e frio usados nesse ciclo.

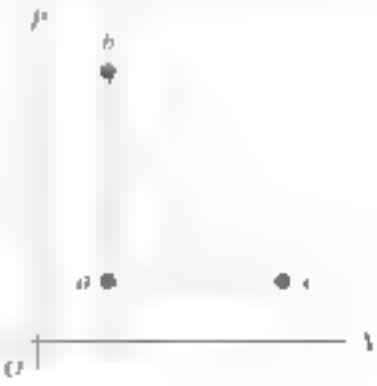


Figura 20.26 Problema 20.43

20.44 Sendo um engenheiro mecânico iniciante, você é contratado para projetar uma máquina de Carnot que tem 2,0 mols de gás ideal monoatômico como sua substância de trabalho e um reservatório de alta temperatura (500 °C). A máquina deve erguer um peso de 15,0 kg até 2,0 m por ciclo, usando 500 J de calor fornecido. O gás na câmara da máquina pode ter um volume mínimo de 5,0 L durante o ciclo. a) Desenhe um diagrama *PV* desse ciclo. Mostre em seu diagrama por onde o calor entra no gás e por onde o calor sai do gás. b) Qual deve ser a temperatura do reservatório frio? c) Qual é a eficiência térmica da máquina? d) Quanta energia térmica essa máquina desperdiça por ciclo? e) Qual é a pressão máxima que a câmara de gás precisa suportar?

20.45 Uma usina elétrica experimental no Laboratório de Energia Natural no Havaí gera energia elétrica a partir do gradiente de temperatura do oceano. A água da superfície está a 27 °C e a água em profundidades elevadas está a 6 °C. a) Qual é a eficiência teórica máxima dessa usina? b) Se a usina deve produzir 210 kW de potência, com que taxa o calor deve ser extraído da água quente? Com que taxa o calor deve ser absorvido da água fria? Suponha a eficiência máxima teórica. c) A água fria que sai da usina possui temperatura igual a 10 °C. Qual deve ser a vazão da água fria através do sistema? Dê a sua resposta em kg/h e em L/h.

20.46 Calcule a eficiência térmica da máquina que usa *n* moles de um gás ideal diatômico e executa o ciclo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ mostrado na Figura 20.27.

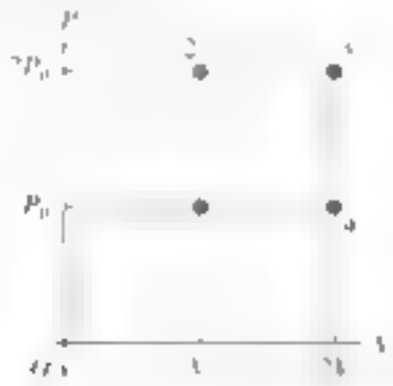


Figura 20.27 Problema 20.46.

20.47 Um cilindro contém oxigênio a uma pressão de 2,0 atm. Seu volume é 4,0 L e a temperatura é 300 K. Suponha que o oxigênio possa ser considerado um gás ideal. O oxigênio é submetido aos seguintes processos:

(i) Aquecido à pressão constante do estado inicial (estado 1) até o estado 2, cuja temperatura é $T = 450$ K.

(ii) Resfriado a volume constante até 250 K (estado 3).

(iii) Comprimido à temperatura constante até um volume de 4,0 L (estado 4).

(iv) Aquecido a volume constante até 300 K, fazendo o sistema retornar ao estado 1.

a) Mostre esses quatro processos em um diagrama *PV*, fornecendo os valores numéricos de *P* e *V* em cada um dos quatro estados. b) Calcule *Q* e *W* em cada um dos quatro processos. c) Ache o trabalho total realizado pelo oxigênio. d) Qual é a eficiência desse dispositivo como máquina térmica? Como se compara essa eficiência com a eficiência de um ciclo de Carnot entre as mesmas temperaturas extremas de 250 K e 450 K?

20.48 **Processos termodinâmicos em um refrigerador.** Um refrigerador opera mediante o ciclo indicado na Figura 20.28. Os processos de compressão ($d \rightarrow a$) e expansão ($b \rightarrow c$) são adiabáticos. A pressão, a temperatura e o volume do refrigerante em cada um dos quatro estados *a*, *b*, *c* e *d* são dados na tabela a seguir.

Estado	*T*(°C)	*P*(kPa)	*V*(m³)	*U*(kJ)	Porcentagem de líquido
a	80	2305	0,0682	1969	0
b	80	2305	0,00946	1171	100
c	5	363	0,2202	1005	54
d	5	363	0,4513	1657	5

a) Em cada ciclo, qual é o calor retirado do interior do refrigerador para o líquido refrigerante enquanto ele se encontra no evaporador? b) Em cada ciclo, qual é o calor rejeitado do refrigerante para o ar fora do refrigerador enquanto o refrigerante está no condensador? c) Em cada ciclo, qual é o trabalho realizado pelo motor que aciona o compressor? d) Calcule o coeficiente de desempenho do refrigerador.

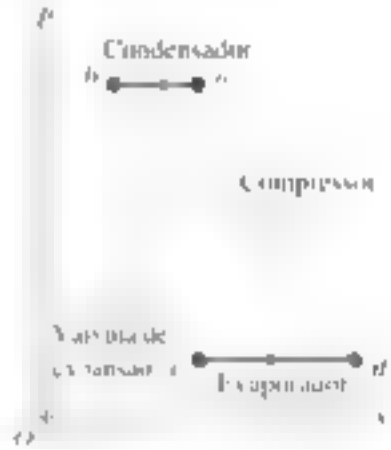


Figura 20.28 Problema 20.48.

20.49 Um gás monoatômico ideal executa o ciclo da Figura 20.29 no sentido indicado na figura. O caminho do processo $c \rightarrow a$ é uma linha reta no diagrama *PV*. a) Calcule *Q*, *W* e ΔU em cada processo $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ e $c \rightarrow a$. b) Quais são os valores de *Q*, *W* e ΔU em um ciclo completo? c) Qual é a eficiência do ciclo?

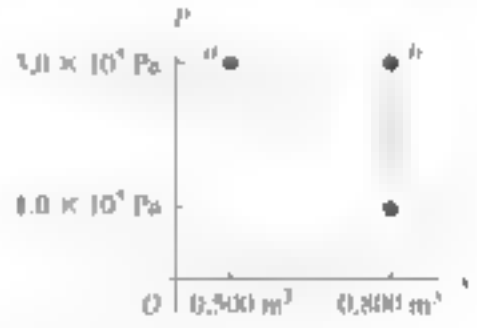


Figura 20.29 Problema 20.49.

20.50 **Ciclo Stirling.** O *ciclo Stirling* é semelhante ao *ciclo Otto*, a não ser pelo fato de que a compressão e a expansão do gás ocorrem isotermicamente e não adiabaticamente, como no ciclo Otto. O ciclo Stirling é usado em uma máquina de combustão *externa* (na verdade, queimar o combustível não é necessário; *qualquer* forma de produzir uma diferença de temperatura serve — gradiente solar geotérmico, de temperatura do oceano etc.), o que significa que o gás dentro do cilindro não é usado no processo de combustão. O calor é fornecido continuamente pelo fluido combustível no exterior do cilindro, em vez de vir de uma explosão no interior do cilindro como no ciclo Otto. Por essa razão, as máquinas que funcionam com o ciclo Stirling são mais silenciosas do que as máquinas que funcionam com o ciclo Otto, uma vez que não existe vál-

vula de admissão nem válvula de exaustão (a principal fonte de ruído do motor). Embora pequenas máquinas de Stirling possam ser usadas em diversas aplicações, o uso do ciclo Stirling em um automóvel não teve êxito porque o motor é maior, mais pesado e mais caro do que o motor convencional do automóvel. No ciclo, o fluido de trabalho realiza as seguintes etapas (Figura 20.30):

(i) Compressão isotérmica à temperatura T do estado inicial a até o estado b, com uma razão de compressão r.

(ii) Aquecimento a volume constante até o estado c com temperatura T_2.

(iii) Expansão isotérmica à temperatura T_2 até o estado d.

(iv) Esfriamento a volume constante retornando para o estado inicial a.

Suponha que o fluido de trabalho seja n moles de um gás ideal (para o qual C_v não depende da temperatura). a) Calcule Q, W e ΔU nas etapas $a \to b$, $b \to c$, $c \to d$ e $d \to a$. b) No ciclo Stirling, os calores transferidos nas etapas $b \to c$ e $d \to a$ não envolvem fontes de calor externas, mas usam a *regeneração*: a mesma substância que transfere calor ao gás dentro do cilindro na etapa $b \to c$ absorve calor de volta do gás na etapa $d \to a$. Portanto, os calores transferidos $Q_{b \to c}$ e $Q_{d \to a}$ não desempenham papel na determinação da eficiência da máquina. Explique essa última afirmação comparando as expressões de $Q_{b \to c}$ e $Q_{d \to a}$ obtidas na parte (a). c) Calcule a eficiência de um ciclo Stirling em termos das temperaturas T_1 e T_2. Como ele se compara com a eficiência de um ciclo de Carnot operando entre essas mesmas temperaturas? (Historicamente o ciclo Stirling foi deduzido antes do ciclo de Carnot.) Esse resultado viola a segunda lei da termodinâmica? Explique. (Infelizmente a máquina que funciona com o ciclo Stirling não pode atingir essa eficiência devido a problemas nos processos de transferência de calor e perdas de pressão na máquina.

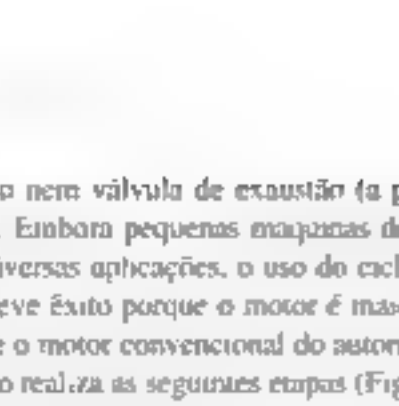


Figura 20.30 Problema 20.50

20.51 Uma máquina de Carnot opera entre dois reservatórios de calor com temperaturas T_H e T_C. Um inventor propõe aumentar sua eficiência fazendo uma máquina operar entre T_H e uma temperatura intermediária T' e uma segunda máquina entre T' e T_C, usando nesta segunda máquina o calor rejeitado pela primeira. Calcule a eficiência dessa máquina composta e compare-a com a eficiência da máquina original.

20.52 Uma usina termelétrica alimentada pela queima de carvão produz uma potência mecânica de 1000 MW com uma eficiência térmica de 40,0%. a) Qual é a taxa de fornecimento de calor para a usina? b) O carvão usado é o antracito, que possui calor de combustão de $2{,}65 \times 10^7$ J/kg. Qual é a massa de carvão queimada por dia, se a usina funciona sem interrupções? c) A que taxa o calor é rejeitado para o reservatório frio, que vem a ser um rio próximo? d) A temperatura do rio é 18 °C antes de chegar à usina, e 18,5 °C depois de receber o calor rejeitado pela usina. Calcule a taxa de escoamento do rio, em metros cúbicos por segundo. e) Em quanto aumenta a entropia do rio a cada segundo?

20.53 **Termodinâmica do automóvel.** Um Passat tem um motor a gasolina com seis cilindros operando com o ciclo Otto a uma razão de compressão $r = 10{,}6$. O diâmetro do cilindro, chamado de *furo* do motor, é igual a 82,5 mm. A distância que o pistão percorre durante a compressão mostrada na Figura 20.5, chamada de *curso*, é 86,4 mm. A pressão inicial da mistura de ar com gasolina (no ponto a da Figura 20.6) é $8{,}50 \times 10^4$ Pa, e a temperatura inicial é 300 K (igual à temperatura do ar externo). Suponha que 200 J de calor sejam fornecidos a cada cilindro em cada ciclo de queima de gasolina e que o gás possua $C_v = 20{,}5$ J/mol · K e $\gamma = 1{,}40$. a) Calcule o trabalho total realizado em um ciclo em cada cilindro do motor e o calor rejeitado quando o gás se esfria até a temperatura do ar externo. b) Calcule o volume da mistura de ar com gasolina no ponto a do ciclo. c) Calcule a pressão, o volume e a temperatura do gás nos pontos b, c e d do ciclo. Em um diagrama PV mostre os valores numéricos de P, V e T em cada um dos quatro estados. d) Compare a eficiência desse motor com a eficiência de um ciclo de Carnot operando entre as mesmas temperaturas extremas.

20.54 Um condicionador de ar funciona com 800 W de potência e apresenta um coeficiente de desempenho de 2,80 a uma temperatura ambiente de 21 °C e uma temperatura externa de 35 °C. a) Calcule a taxa de remoção de calor dessa unidade. b) Calcule a taxa com que o calor é rejeitado para o ar externo. c) Calcule a variação total de entropia na sala se o condicionador de ar funcionar durante 1 hora. Calcule a variação total de entropia no ar externo durante o mesmo período de tempo. d) Qual é a variação total na entropia no sistema (sala + ar externo)?

20.55 **Energia indisponível.** A explicação sobre a entropia e a segunda lei que segue o Exemplo 20.10 (Seção 20.7) afirma que o aumento da entropia em um processo irreversível é associado ao fato de a energia se tornar menos disponível. Considere um ciclo de Carnot que emprega um reservatório de baixa temperatura com uma temperatura em Kelvin T_C. Trata-se de um verdadeiro reservatório — isto é, grande o bastante para não mudar de temperatura ao receber calor da máquina. Vamos supor que a máquina receba calor de um objeto de temperatura T', sendo $T' > T_C$. O objeto é de tamanho finito, logo ele resfria à medida que o calor é extraído dele. A máquina continua a funcionar até que $T' = T_C$. a) Mostre que o módulo total de calor rejeitado para o reservatório à baixa temperatura é $T_C(\Delta S_H)$, onde ΔS_H é a variação de entropia do reservatório de alta temperatura. b) Aplique o resultado da parte (a) a 1,0 kg de água inicialmente a uma temperatura de 373 K como fonte de calor para a máquina e $T_C = 273$ K. Quanto trabalho mecânico total pode ser realizado pela máquina até parar? c) Repita a parte (b) para 2,0 kg de água a 323 K. d) Compare a quantidade de trabalho que pode ser obtida a partir da energia na água do Exemplo 20.10 antes e depois de ser misturada. Discuta se o seu resultado mostra que a energia se tornou menos disponível.

20.56 A potência máxima que pode ser extraída de uma turbina de vento acionada por uma corrente de ar é aproximadamente

$$P = kd^2v^3$$

onde d é o diâmetro da lâmina, v é a velocidade do vento e $k = 0{,}5$ W · s^3/m^5. a) Explique a dependência de P em relação a d e v considerando um cilindro de ar passando sobre a lâmina da turbina no instante t (Figura 20.31). Esse cilindro possui diâmetro d,

comprimento $L = vt$ e densidade ρ. b) A turbina de vento Mod-5B em Kahuku, na Ilha Oahu do Havaí, possui uma lâmina com 97 m de diâmetro (comparável a um campo de futebol) e localiza-se no alto de uma torre de 58 m. Essa turbina pode produzir uma potência elétrica de 3,2 MW. Supondo uma eficiência de 25%, qual é a velocidade do vento necessária para produzir essa potência? Dê a resposta em m/s e km/h. c) As turbinas de vento comerciais são localizadas geralmente nas passagens entre morros ou, de modo geral, na direção do vento. Por quê?

Figura 20.31 Problema 20.56.

20.57 a) Quanto trabalho um refrigerador de Carnot precisa realizar em um dia quente para transferir 1000 J de calor de seu interior a 10 °C para o ar exterior a 35 °C? b) Quanto trabalho o mesmo refrigerador precisa realizar para transferir a mesma quantidade de calor se a temperatura interior for a mesma, mas o ar exterior estiver a apenas 15 °C? c) Desenhe diagramas *PV* para essas duas situações. Você consegue explicar em termos físicos por que é preciso realizar mais trabalho quando a diferença de temperatura entre as duas etapas isotérmicas é maior?

20.58 Um cubo de gelo de 0,0500 kg a uma temperatura inicial de −15 °C é colocado em 0,600 kg de água a uma temperatura $T = 318$ K em um recipiente isolado com massa desprezível. Calcule a variação de entropia do sistema.

20.59 a) No ciclo Otto apresentado na Figura 20.6, calcule as variações de entropia do gás em cada um dos processos a volume constante $b \to c$ e $d \to a$ em termos das temperaturas T_a, T_b, T_c e T_d, e do número de moles n e do calor específico C_V do gás. b) Qual é a variação total de entropia durante um ciclo? (*Sugestão:* use a relação entre T_a e T_b e a relação entre T_c e T_d.) c) Os processos $b \to c$ e $d \to a$ ocorrem de modo ureversível em um ciclo Otto real. Explique como conciliar isso com o resultado que você obteve no item (b).

20.60 **Diagrama *TS*.** a) Faça um gráfico do ciclo de Carnot, indicando a entropia no eixo horizontal e a temperatura Kelvin no eixo vertical. Trata-se de um diagrama temperatura-entropia, ou diagrama *TS*. b) Mostre que a área embaixo da curva que representa qualquer processo reversível no diagrama *TS* representa o calor absorvido pelo sistema. c) Utilize o diagrama *TS* para deduzir a eficiência térmica do ciclo de Carnot. d) Faça um diagrama *TS* do ciclo Stirling descrito no Problema 20.50. Use esse diagrama para relacionar a eficiência do ciclo Stirling com a eficiência do ciclo de Carnot.

20.61 Um aluno de física mergulha uma extremidade de certa barra de cobre na água fervendo a 100 °C e a outra extremidade em uma mistura de água e gelo a 0 °C. Os lados das barras são isolados. Depois que o estado estacionário é atingido na barra, ocorre a fusão de 0,160 kg de gelo em certo intervalo de tempo. Para esse intervalo de tempo, calcule a) a variação de entropia da água que estava fervendo; b) a variação de entropia da mistura de água e gelo; c) a variação de entropia da barra de cobre; d) a variação total de entropia do sistema.

20.62 Para aquecer uma xícara de água (250 cm³) para fazer café, você coloca um resistor de aquecimento dentro da água. Enquanto a temperatura da água aumenta de 20 °C até 65 °C, a temperatura do resistor de aquecimento mantém-se constante e igual a 120 °C. Calcule a variação de entropia a) da água, b) do resistor de aquecimento; c) do sistema constituído pela água mais o resistor. (Adote as mesmas hipóteses do Exemplo 20.10 (Seção 20.7) sobre o calor específico da água e despreze o calor que flui para a xícara de cerâmica.) d) Esse processo é reversível ou irreversível? Explique.

20.63 Um objeto de massa m_1, calor específico c_1 e temperatura T_1 é colocado em contato com um segundo objeto de massa m_2, calor específico c_2 e temperatura $T_2 > T_1$. Por causa disso, a temperatura do primeiro objeto aumenta até T' e a temperatura do segundo objeto diminui para T'. a) Mostre que o aumento de entropia do sistema é dado por

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T}{T_2}$$

e mostre que a conservação da energia exige que

$$m_1 c_1 (T - T_1) = m_2 c_2 (T_2 - T)$$

b) Mostre que a variação de entropia ΔS, considerada função de T, torna-se *máxima* quando $T = T'$, que é precisamente a condição de equilíbrio termodinâmico. c) Discuta o resultado da parte (b) considerando a idéia de que a entropia indica o grau de desordem de um sistema.

Problema desafiador

20.64 Considere um ciclo Diesel que começa (no ponto a da Figura 20.7) com a temperatura do ar igual a T_a. O ar pode ser considerado um gás ideal. a) Se a temperatura do ponto c é T_c, deduza uma expressão para a eficiência do ciclo em termos da razão de compressão r. b) Calcule o valor da eficiência considerando $T_a = 300$ K, $T_c = 950$ K, $\gamma = 1{,}40$ e $r = 21{,}0$.

APÊNDICE A

O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

O Sistema Internacional de Unidades, abreviado por SI, é o sistema desenvolvido por um congresso internacional e adotado por quase todos os países industrializados do mundo. Ele é baseado nas unidades do Sistema MKSA (metro-quilograma-segundo-ampere). O material apresentado a seguir foi adaptado de B. N. Taylor, ed., *National Institute of Standards and Technology Spec. Pub.* 811 (U. S. Govt. Printing Office, Washington, DC, 1995).

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo	
	Unidades básicas do SI		
comprimento	metro	m	
massa	quilograma	kg	
tempo	segundo	s	
corrente elétrica	ampere	A	
temperatura termodinâmica	kelvin	K	
quantidade de substância	mol	mol	
intensidade luminosa	candela	cd	
	Unidades derivadas do SI		**Unidades equivalentes**
área	metro quadrado	m^2	
volume	metro cúbico	m^3	
freqüência	hertz	Hz	s^{-1}
massa específica (densidade)	quilograma por metro cúbico	kg/m^3	
velocidade	metro por segundo	m/s	
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2	
aceleração angular	radiano por segundo ao quadrado	rad/s^2	
força	newton	N	kg · m/s²
pressão (tensão mecânica)	pascal	Pa	N/m²
viscosidade cinemática	metro quadrado por segundo	m^2/s	
viscosidade dinâmica	newton-segundo por metro quadrado	$N \cdot s/m^2$	
trabalho, energia, calor	joule	J	N · m
potência	watt	W	J/s
carga elétrica	coulomb	C	A · s
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V	J/C, W/A
intensidade do campo elétrico	volt por metro	V/m	N/C
resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
capacitância	farad	F	A · s/V
fluxo magnético	weber	Wb	V · s
indutância	henry	H	V · s/A
densidade de fluxo magnético	tesla	T	Wb/m²
intensidade do campo magnético	ampere por metro	A/m	
força magnetomotriz	ampere	A	
fluxo luminoso	lúmen	lm	cd · sr
luminância	candela por metro quadrado	cd/m^2	
iluminamento	lux	lx	lm/m^2
número de onda	um por metro	m^{-1}	
entropia	joule por kelvin	J/K	
calor específico	joule por quilograma-kelvin	J/kg · K	
condutividade térmica	watt por metro-kelvin	W/m · K	

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo	Unidades equivalentes
intensidade da radiação	watt por estereorradiano	W/*sr*	
atividade de uma fonte radioativa	becquerel	Bq	s
dose de radiação	gray	Gy	J/kg
equivalente da dose de radiação	sievert	Sv	J/kg
	Unidades suplementares do SI		
ângulo plano	radiano	rad	
ângulo sólido	esterreorradiano	sr	

Definições das unidades do SI

metro (m) O *metro* é um comprimento igual à distância percorrida pela luz no vácuo em um intervalo de tempo igual à fração (1/299 792 458) do segundo.

quilograma (kg) O *quilograma* é uma unidade de massa igual à massa de um protótipo internacional do quilograma. (O protótipo internacional do quilograma é um cilindro de uma liga de platina-irídio preservado em uma galeria da Agência Internacional de Pesos e Medidas em Sevres, na França.)

segundo (s) O *segundo* é o intervalo de tempo correspondente a 9 192 631,770 ciclos da radiação emitida durante a transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133.

ampère (A) O *ampère* é uma corrente constante que, ao ser mantida em dois fios retilíneos e paralelos de comprimentos infinitos de seções retas desprezíveis e separados por uma distância de 1 m no vácuo, produz entre os fios uma força igual a 2×10^{-7} N para cada metro de comprimento dos fios.

kelvin (K) O *kelvin*, unidade de temperatura termodinâmica, é a fração igual a 1/273,16 da temperatura termodinâmica correspondente ao ponto triplo da água.

ohm (OHM) O *ohm* é a resistência elétrica entre dois pontos de um condutor que transporta uma corrente de 1 A quando uma diferença de potencial constante de 1 volt é aplicada entre esses dois pontos, esse trecho do condutor não pode ser fonte de nenhuma força eletromotriz.

coulomb (C) O *coulomb* é a carga elétrica transportada em um segundo por uma corrente de 1 A.

candela (cd) A *candela* é a intensidade luminosa, em dada direção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática com freqüência igual a 540×10^{12} hertz e cuja intensidade da radiação nessa direção equivale a 1/683 watt por estereorradiano.

molécula-grama (mol) O *mol* é a quantidade de uma substância que contém um número de unidades elementares equivalente ao número de átomos existentes em 0,012 kg de carbono 12. Essas unidades elementares devem ser especificadas e podem ser átomos, moléculas, íons, elétrons, outras partículas ou grupos de tais partículas especificadas.

newton (N) O *newton* é a força que fornece para uma massa de 1 quilograma uma aceleração de um metro por segundo por segundo.

joule (J) O *joule* é o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de uma força constante de 1 N é deslocado até uma distância de 1 metro na direção da força.

watt (W) O *watt* é a potência que dá origem a uma produção de energia com uma taxa igual a 1 joule por segundo.

volt (V) O *volt* é a diferença de potencial elétrico entre dois pontos de um condutor que transporta uma corrente constante igual a 1 ampère, quando a potência entre esses dois pontos é igual a 1 W.

weber (Wb) O *weber* é o fluxo magnético que, ao atravessar um circuito com uma espira, produz nela uma força eletromotriz igual a 1 V quando o fluxo é reduzido a zero com uma taxa uniforme em um segundo.

lúmen (lm) O *lúmen* é o fluxo luminoso emitido em um ângulo sólido igual a 1 estereorradiano por uma fonte pontual uniforme cuja intensidade é igual a 1 candela.

farad (F) O *farad* é a capacitância de um capacitor que possui uma diferença de potencial de 1 V entre suas placas quando ele é carregado por uma carga elétrica igual a 1 coulomb.

henry (H) O *henry* é a indutância de um circuito fechado no qual uma força eletromotriz de 1 V é produzida quando a corrente elétrica no circuito varia com uma taxa uniforme de 1 A por segundo.

radiano (rad) O *radiano* é o ângulo plano entre dois raios do círculo que cortam a circunferência formando um arco de comprimento igual ao raio.

estereorradiano (sr) O *estereorradiano* é um ângulo sólido que, possuindo seu vértice no centro de uma esfera, corta a superfície da esfera formando uma calota cuja área superficial é equivalente à área de um quadrado de lado igual ao raio da esfera.

Prefixos do SI Os nomes dos múltiplos e submúltiplos das unidades do SI podem ser formados usando-se a lista dos prefixos apresentados no Apêndice F.

APÊNDICE B

RELAÇÕES MATEMÁTICAS ÚTEIS

Álgebra

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\quad a^{(x+y)} = a^x a^y$ $\quad a^{(x-y)} = \frac{a^x}{a^y}$

Logaritmos Se $\log_a x = y$ então $a^y = x$ $\quad \log a + \log b = \log(ab)$ $\quad \log a - \log b = \log(a/b)$ $\quad \log(a^n) = n \log a$
Se $\ln x = y$ então $e^y = x$ $\quad \ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\quad \ln a - \ln b = \ln(a/b)$ $\quad \ln a^n = n \ln a$

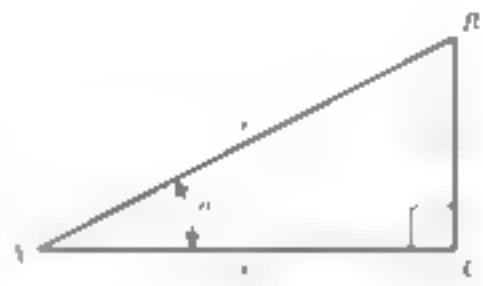
Equação do segundo grau: Se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Série binomial

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

Trigonometria

No triângulo retângulo ABC, $x^2 + y^2 = r^2$



Definições das funções trigonométricas: $\operatorname{sen}\alpha = y/r$ $\quad \cos\alpha = x/r$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = y/x$

Identidades: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ $\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$ $\quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha + \pi/2) = +\cos\alpha$ $\quad \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha + \pi/2) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Geometria

Comprimento de uma circunferência de raio r: $C = 2\pi r$
Área de um círculo de raio r: $A = \pi r^2$
Volume de uma esfera de raio r: $V = 4\pi r^3/3$
Área da superfície de uma esfera de raio r: $A = 4\pi r^2$
Volume de um cilindro de raio r e altura h: $V = \pi r^2 h$

Cálculo diferencial e integral

Derivadas:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Séries de potências (convergentes para os valores de x indicados):

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Integrais.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax + C$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \text{(todo } x\text{)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \text{(todo } x\text{)}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{(todo } x\text{)}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

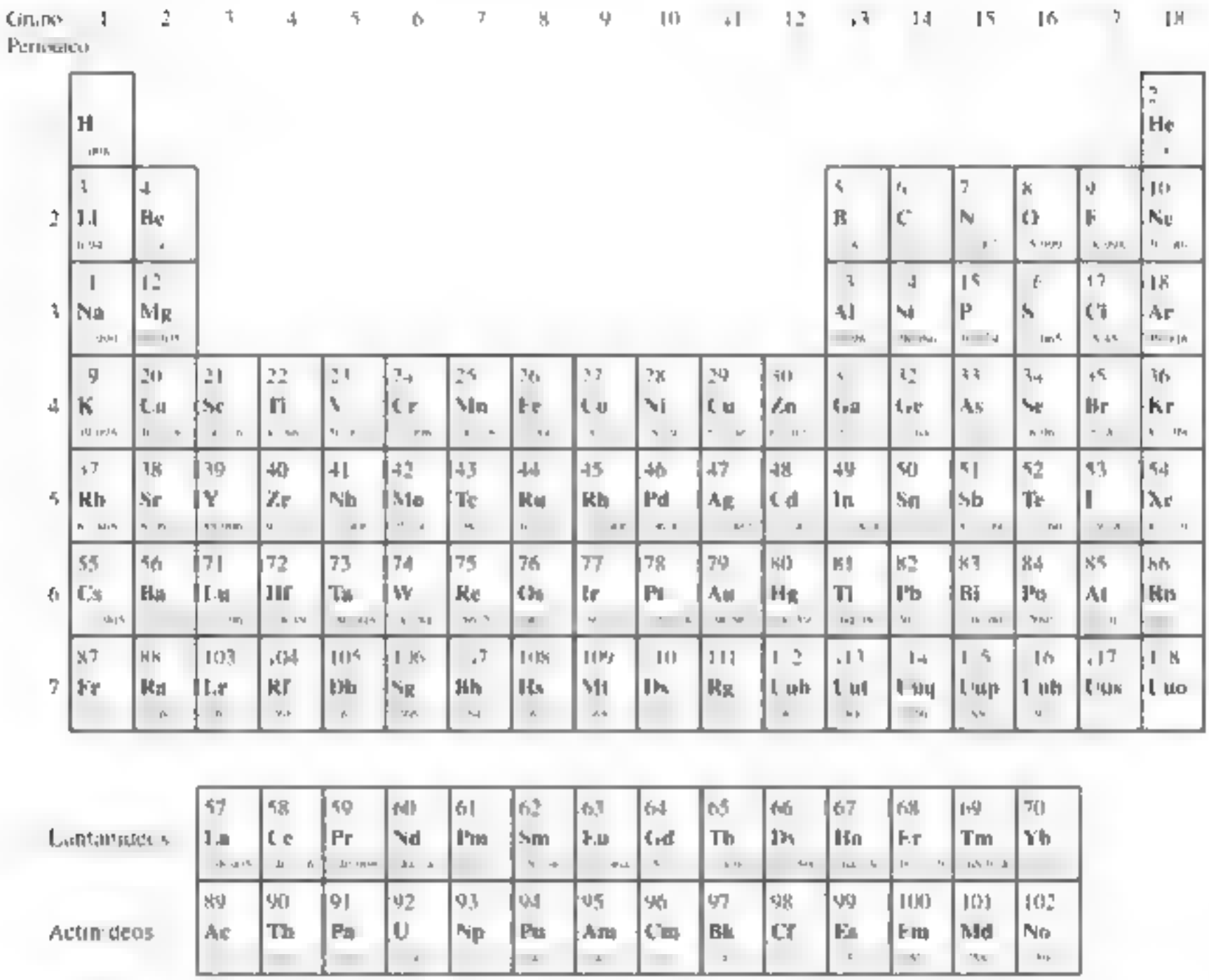
APÊNDICE C

ALFABETO GREGO

Nome	Maiúscula	Minúscula	Nome	Maiúscula	Minúscula
Alfa	A	α	Nu	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ϵ	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Úpsilon	Y	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	M	μ	Ômega	Ω	ω

APÊNDICE D

TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS



Para cada elemento, apresenta-se a massa atômica média da mistura dos isótopos do elemento que se encontram na natureza. Para os elementos que não possuem isótopos estáveis, indica-se entre parênteses a massa atômica média aproximada do elemento de maior duração. Para um elemento previsto, mas ainda não detectado, nenhuma massa atômica é indicada. As massas atômicas são expressas usando-se a unidade de massa atômica: 1 u = ,66053886(28) × 10 , que equivale a grama por mol (g/mol).

APÊNDICE E

FATORES DE CONVERSÃO DAS UNIDADES

Comprimento
1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1000 m = 0,6214 mi
1 m = 3,281 pol = 39,37 pol
1 cm = 0,3937 pol
1 pol = 2,540 cm
1 pol = 30,48 cm
1 yd = 9,144 cm
1 mi = 5280 pés = 1,609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 0,1 nm
1 milha náutica = 6080 pés
1 ano-luz = $9,461 \times 10^{15}$ m

Área
1 cm^2 = 0,155 pol^2
1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10,76 $pés^2$
1 pol^2 = 6,452 cm^2
1 pol = 144 pol^2 = 0,0929 m^2

Volume
1 litro = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 0,03531 $pé^3$ = 61,02 pol^3
1 $pé^3$ = 0,02832 m^3 = 28,32 litros = 7,477 galões
1 galão = 3,788 litros

Tempo
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 d = 86.400 s
1 a = 365,24 d = $3,156 \times 10^7$ s

Ângulo
1 rad = 57,30° = 180°/π
1° = 0,01745 rad = π/180 rad
1 revolução = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0,1047 rad/s

Velocidade
1 m/s = 3,281 pés/s
1 pé/s = 0,3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 pés/s
1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6214 mi/h
1 mi/h = 1,466 pés/s = 0,4470 m/s = 1,609 km/h

Aceleração
1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3,281 $pés/s^2$
1 cm/s² = 0,01 m/s² = 0,03281 pé/s²
1 pé/s² = 0,3048 m/s² = 30,48 cm/s²
1 mi/h·s = 1,467 pés/s²

Massa
1 kg = 10³ g = 0,0685 slug
1 g = $6,85 \times 10^{-5}$ slug
1 slug = 14,59 kg
1 u = $1,661 \times 10^{-27}$ kg
1 kg possui uma massa de 2,205 lb quando g = 9,80 m/s^2

Força
1 N = 10^5 dina = 0,2248 lb
1 lb = 4,448 N = $4,448 \times 10^5$ dina

Pressão
1 Pa = 1 N/m^2 = $1,450 \times 10^{-4}$ lb/pol^2 = 0,209 $lb/pé^2$
1 bar = 10^5 Pa
1 lb/pol^2 = 6895 Pa
1 $lb/pé^2$ = 47,88 Pa
1 atm = $1,013 \times 10^5$ Pa = 1,013 bar
= 14,7 lb/pol^2 = 2117 $lb/pés^2$
1 mm Hg = 1 torr = 133,3 Pa

Energia
1 J = 10 ergs = 0,239 cal
1 cal = 4,186 J (com base em temperatura de 15°)
1 pé · lb = 1,356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal = 778 pés · lb
1 eV = $1,602 \times 10^{-19}$ J
1 kWh = $3,600 \times 10^6$ J

Equivalência entre massa e energia
1 kg ↔ $8,988 \times 10^{16}$ J
1 u ↔ 931,5 MeV
1 eV ↔ $1,074 \times 10^{-9}$ u

Potência
1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 pés · lb/s
1 Btu/h = 0,293 W

APÊNDICE F

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentais*

Nome	Símbolo	Valor
Velocidade da luz	c	$2{,}99792458 \times 10^{8}$ m/s
Módulo da carga do elétron	e	$1{,}602\,7653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6{,}6742(10) \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Constante de Planck	h	$6{,}6260693(11) \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	k	$1{,}3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6{,}0221415(10) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante dos gases	R	8,314472(15) J/mol · K
Massa do elétron	m_e	$9{,}1093826(16) \times 10^{-31}$ kg
Massa do próton	m_p	$1{,}6726217{,}29) \times 10^{-27}$ kg
Massa do nêutron	m_n	$1{,}6749272{,}8(29) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidade do vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m
Permissividade do vácuo	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8{,}854187817\ldots \times 10^{-12}$ C²/N · m²
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8{,}987551787\ldots \times 10^{9}$ N · m²/C²

Outras constantes úteis*

Equivalente mecânico do calor		4,186 J/cal (15° calorias)
Pressão da atmosfera padrão	1 atm	$1{,}01325 \times 10^{5}$ Pa
Zero absoluto	0 K	−273,15°C
Elétron-volt	1 eV	$1{,}602\,17653(14) \times 10^{-19}$ J
Unidade de massa atômica	1 u	$1{,}660538\,86(28) \times 10^{-27}$ kg
Energia de repouso do elétron	$m_e c^2$	0,510 998 918(44) MeV
Volume de um gás ideal (0°C e 1 atm)		22,413 996(39) litro/mol
Aceleração da gravidade (padrão)	g	9,806 65 m/s²

*Fonte: National Institute of Standards and Technology, http://physics.nist.gov/cuu. Os números entre parênteses indicam as incertezas dos algarismos finais dos números principais (por exemplo, a notação 6,6542(14) significa 6,6542 ± 0,0021. Os valores que não possuem incertezas são exatos.

Dados astronômicos[1]

Corpo	Massa (kg)	Raio (m)	Raio da órbita (m)	Período da órbita
Sol	$1{,}99 \times 10^{30}$	$6{,}96 \times 10^{8}$		
Lua	$7{,}35 \times 10^{22}$	$1{,}74 \times 10^{6}$	$3{,}84 \times 10^{8}$	27,3 d
Mercúrio	$3{,}30 \times 10^{23}$	$2{,}44 \times 10^{6}$	$5{,}79 \times 10^{10}$	88,0 d
Vênus	$4{,}87 \times 10^{24}$	$6{,}05 \times 10^{6}$	$1{,}08 \times 10^{11}$	224,7 d
Terra	$5{,}97 \times 10^{24}$	$6{,}38 \times 10^{6}$	$1{,}50 \times 10^{11}$	365,3 d
Marte	$6{,}42 \times 10^{23}$	$3{,}40 \times 10^{6}$	$2{,}28 \times 10^{11}$	687,0 d
Júpiter	$1{,}90 \times 10^{27}$	$6{,}91 \times 10^{7}$	$7{,}78 \times 10^{11}$	11,86 a
Saturno	$5{,}68 \times 10^{26}$	$6{,}03 \times 10^{7}$	$1{,}43 \times 10^{12}$	29,45 a
Urano	$8{,}68 \times 10^{25}$	$2{,}56 \times 10^{7}$	$2{,}87 \times 10^{12}$	84,02 a
Netuno	$1{,}02 \times 10^{26}$	$2{,}48 \times 10^{7}$	$4{,}50 \times 10^{12}$	164,8 a
Plutão[2]	$1{,}31 \times 10^{22}$	$1{,}15 \times 10^{6}$	$5{,}91 \times 10^{12}$	247,9 a

Fonte: Allen's Astrophysical Quantities, 4ª edição. Organizado por KENNETH ULRICH DE MANN. New York: Springer-Verlag, 2000. Para cada corpo, o raio é seu respectivo raio equatorial. O raio da órbita é a distância média entre o corpo e o Sol (para os planetas) ou medida a partir da Terra (no caso da Lua).

[2] Em agosto de 2006, a International Astronomical Union reclassificou Plutão e outros pequenos corpos da órbita de Sol como planetas anões.

Prefixos para as potências de dez

Potência de dez	Prefixos	Abreviaturas
10^{-24}	yocto-	y
10^{-21}	zepto-	z
10^{-18}	atto-	a
10^{-15}	femto-	f
10^{-12}	pico-	p
10^{-9}	nano-	n
10^{-6}	micro-	μ
10^{-3}	mili-	m
10^{-2}	centi-	c
10^{-1}	deci-	d
10^{1}	deca-	da
10^{2}	hecto-	h
10^{3}	quilo-	k
10^{6}	mega-	M
10^{9}	giga-	G
10^{12}	tera-	T
10^{15}	peta-	P
10^{18}	exa-	E
10^{21}	zeta-	Z
10^{24}	yota-	Y

Exemplos:

1 femtômetro = 1 fm = 10^{-15} m

1 picossegundo = 1 ps = 10^{-12} s

1 nanocoulomb = 1 nC = 10^{-9} C

1 microkelvin = 1 μK = 10^{-6} K

1 milivolt = 1 mV = 10^{-3} V

1 quilopascal = 1 kPa = 10^{3} Pa

1 megawatt = 1 MW = 10^{6} W

1 gigahertz = 1 GHz = 10^{9} Hz

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES

Capítulo 12

12.1 2 N

12.3 (a) 0,026 mm

12.5 (a) $2{,}50 \times 10^{9}$ m (b) não

12.7 (a) $2{,}40 \times 10^{-9}$ N (b) $3{,}6 \times 10^{5}$

12.9 (a) $6{,}30 \times 10^{20}$ N, no sentido do Sol
(b) $4{,}77 \times 10^{20}$ N, 24,6° no sentido do Sol para a Terra (c) $2{,}37 \times 10^{21}$ N, no sentido do Sol

12.11 (a) 0,366 m da massa m

12.13 (b) [illegible] para baixo

12.15 (a) [illegible] (b) [illegible] kg/m

12.17 (b) [illegible] para baixo

12.19 [illegible] kg

12.21 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.23 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.25 [illegible] kg

12.27 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.29 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.31 (a) [illegible]
no sentido de [illegible]

12.33 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.35 (a) [illegible]

12.37 (a) $4{,}1 \times 10^{17}$ kg, $2{,}1 \times 10\ M_{sol}$ (b) não
(c) $6{,}3 \times 10^{14}$ m, sim

12.39 (a) [illegible]
(b) [illegible] (c) [illegible]

12.41 (b) $5{,}39 \times 10^{-8}$ N, no sentido horário

12.43 (b) (a) $1{,}63 \times 10^{-3}$ m/s, $4{,}08 \times 10^{-6}$ m/s
(b) $2{,}04 \times 10^{-4}$ m/s (c) 31,9 m

12.45 (a) $3{,}56 \times 10^{7}$ m

12.47 $1{,}8 \times 10^{7}$ m/s

12.49 (a) [illegible] (b) $3{,}59 \times 10^{7}$ m

12.51 (a) $0{,}018\ R_T = 64$ km

12.53 (a) [illegible]

12.55 (a) [illegible] (b) [illegible] (c) [illegible]

12.57 (a) $GMm/4R^2$ (b) $\sqrt{GM/4R}$, $4\pi\sqrt{R^3/GM}$
(c) $GM^2/4R$

12.59 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.61 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.63 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.65 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.67 (a) [illegible] (b) [illegible] (c) [illegible]

12.69 (a) [illegible]

12.71 (a) [illegible]

12.73 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.75 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.77 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.79 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.81 (a) [illegible] (b) [illegible]

12.83 (a) [illegible]

12.85 (a) $U(r) = \dfrac{GMm}{2R_T}\left(\dfrac{r}{R_T}\right)^2$ (b) $7{,}90 \times 10^{9}$ m/s

12.87 (a) [illegible] (b) [illegible] (c) [illegible]

12.89 (a) [illegible]

Capítulo 13

13.1 (a) $4{,}54 \times 10^{-5}$ s, $1{,}38 \times 10^{5}$ rad/s
(b) $2{,}27 \times 10^{-5}$ s, $2{,}76 \times 10^{5}$ rad/s

13.3 $5{,}53 \times 10^{3}$ rad/s, $1{,}14 \times 10^{-3}$ s

13.5 [illegible]

13.7 (a) [illegible] (b) [illegible] (c) [illegible]

13.9 (a) 0,375 s (b) 2,66 Hz (c) 16,7 rad/s

13.11 (a) [illegible] (b) [illegible] (c) [illegible]
sen ([13,2 rad/s]t)

13.13 (a) $-2{,}71$ m/s² (b) $x(t) = (+4{,}46\ \text{cm})\cos([15{,}7\ \text{rad/s}]t + 0{,}715\ \text{rad})$, $v_x(t) = (-22{,}9\ \text{cm/s})\sen$ ([15,7 rad/s]t + 0,715 rad), $a_x(t) = (-359\ \text{cm/s}^2)$ cos ([15,7 rad/s]t + 0,715 rad)

13.15 120 kg

13.17 (a) [illegible] (b) [illegible] (c) [illegible]

13.19 (a) 1,51 s (b) 2640 N/m (c) 0,820 m/s
(d) 192 N (e) $-0{,}0125$ m, 0,303 m/s, 0,216 m/s²

13.21 (a) 1,46 m/s (b) $2{,}96 \times 10^{-3}$ J

13.23 (a) 1,20 m/s (b) 1,11 m/s (c) 36 m/s
(d) 13,5 m/s (e) 0,46 J

13.25 [illegible]

13.27 0,240 m

13.29 [illegible]

13.31 [illegible]

13.33 (b) 3,49 cm, 3,45 Hz

13.35 [illegible]

13.37 [illegible]

13.39 [illegible]

13.41 [illegible]

13.43 [illegible]

13.45 [illegible]
período = [illegible]

13.47 [illegible]

13.49 [illegible]

13.51 [illegible]

13.53 [illegible]

13.55 (a) [illegible] (b) [illegible]

13.57 (a) 0,72 s (b) 0,82 kN
(c) 14,3 m/s, 74 N (d) 17 m/s, 74 N

13.59 [illegible]

13.61 $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{5}}\sqrt{\dfrac{g}{L}} = 0{,}921\left(\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L}}\right)$

13.63 (a) 1,49 s (b) $2{,}12 \times 10^{4}$ s por s, diminuindo
(c) 0,795 s

13.65 (a) 0,350 m/s (b) 0,122 m/s² para baixo
(c) 0,700 s (d) 1,38 m

13.67 (a) 7,26 m/s (b) 0,21 m (c) 0,89 s

13.69 $9{,}08 \times 10^{-2}$ kg

13.71 1,17 s

13.73 (a) sim (c) $2{,}40 \times 10^{-4}$ s (d) não

13.75 [illegible] Hz

13.77 0,705 Hz, 14,5°

13.79 $2\pi\sqrt{M/k}$

13.81 [illegible]

13.83 $4\pi^2 M/T^2$

13.85 (a) $0{,}430$ m

13.87 (a) $k^{eq} = k' + k''$ (b) $k^{eq} = k'k''/(k' + k'')$
(c) $k^{eq} = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ (d) $\sqrt{2}$

13.89 (a) [illegible] (b) $\omega = \sqrt{3k/M}$, $M = 3k/\omega^2$
1 500 N/m

Capítulo 14

14.1 $p = 47{,}8$ N; não

14.3 $7{,}02 \times 10^{3}$ kg/m³, sim

14.5 1,6

14.7 (a) 1,7 N

14.9 (a) $1{,}86 \times 10^{5}$ Pa (b) 18,9 m

14.11 1,561

14.13 (a) absoluta: 46,7 lb/in.² = $3{,}22 \times 10^{5}$ Pa = 3,18 atm, manométrica: 32,0 lb/in.² = $2{,}21 \times 10^{5}$ Pa = 2,18 atm (b) não (c) 432 cm

14.15 $6{,}27 \times 10^{5}$ Pa = 6,19 atm

14.17 $6{,}0 \times 10^{5}$ Pa

14.19 $1{,}01 \times 10^{5}$ Pa, $4{,}03 \times 10^{5}$ Pa

14.21 $2{,}3 \times 10^{7}$ N

14.23 (a) 637 Pa (b) (c) 1170 Pa (d) 170 Pa

14.25 [illegible] Pa = 1,64 atm

14.27 $6{,}43 \times 10^{-4}$ m³, $2{,}78 \times 10^{3}$ kg/m³

14.29 (a) $p < p_{fluido}$
(c) submerso pV_{fluido} acima da superfície
(d) pV_{fluido} [illegible]

14.31 (a) 116 Pa (b) 92,8 Pa (c) 0,822 kg, 822 kg/m³

14.33 [illegible] = 10^{3} kg/m³

14.35 [illegible]

14.37 (a) [illegible] (b) [illegible]

14.39 28,4 m/s

14.41 $1{,}47 \times 10^{5}$ Pa

14.43 [illegible]

14.45 $7{,}05 \times 10^{5}$ Pa

14.47 (a) [illegible] (b) 774 N, 776 N

14.49 (a) $5{,}9 \times 10^{4}$ N (b) $1{,}76 \times 10^{5}$ N

14.51 (c) não dependem da área da superfície

14.53 (a) $p_0 + \rho^{ar}Vg$, $p_0 + \rho^{ar}Vg + \rho^{gás}Vg$

14.55 (a) 2 700 kg/m³, 3140 kg/m³

14.57 (a) 1470 Pa (b) 13,9 cm

14.59 $9{,}8 \times 10^{7}$ kg, sim

14.61 [illegible]

14.63 $4{,}66 \times 10^{-4}$ m, 5,27 kg

14.65 (a) $1{,}10 \times 10^{4}$ m³ (b) 113 kN

14.67 (a) 0,107 m (b) [illegible]

14.69 (a) $\rho V/2$ (b) ρV

14.71 0,0956 kg

14.73 [illegible]

14.75 (b) 12,2 N (c) 11,8 N

14.77 [illegible]

14.79 sobra $5{,}37 \times 10^{-2}$ m

14.81 (a) [illegible] (b) [illegible]
(c) [illegible]

14.83 (a) [illegible] (b) [illegible]

14.85 (a) 0,980 m/s (b) $6{,}07 \times 10^{4}$ Pa

14.87 [illegible]

14.89 (a) $v = v_0(1 + 2g(y/v_0)^{1/2})$ (b) 1,10 m

14.91 (a) 80,4 N

14.93 (a) $\sqrt{2gh}$ (b) $(\rho_2/\rho_1) - h$

Capítulo 15

15.1 (a) 1,639 m, 1,28 m (b) 0,219 m

15.3 220 m/s ± 600 m/s

15.5 (a) $4{,}3 \times 10^{14}$ Hz a $7{,}5 \times 10^{14}$ Hz, $1{,}3 \times 10^{-15}$ s a $2{,}5 \times 10^{-15}$ s (b) não

15.7 (a) $f = 250$ Hz, $T = 0{,}0400$ s, $k = 9{,}6$ rad/m
(b) $y(x, t) = (0{,}200\ \text{m})\cos 2\pi\left[\left(\dfrac{x}{0{,}920\ \text{m}} + \dfrac{t}{0{,}0400\ \text{s}}\right)\right]$
(c) +0,345 m (d) 0,0150 s

15.9 (c) sentido − para ambos
(d) $y(x, t) = \omega A[\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$
$= 2\omega A\cos(kx)\cos(\omega t)$

15.11 (a) 4,0 mm (b) 0,08 s (c) 0,04 m, 3,6 m/s
(d) 0,24 m, 0,0 m/s (e) não

15.13 (b) sentido +

15.15 [illegible] amplitude aumentará por um fator de $\sqrt{2}$

15.17 0,390 s

15.19 (a) 10,0 m/s (b) 0,250 m
(c) $v(x, t) = (3{,}00\ \text{cm/s})\cos[(8{,}66\text{m}^{-1})x - (80{,}0\ \text{rad/s})t]$ (d) 1890 m/s (e) sim

15.21 (a) 95 km (b) $2{,}5 \times 10^{-9}$ W/m² (c) $1{,}1 \times 10^{5}$ W

15.23 (a) 0,050 W/m² (b) $2{,}2 \times 10^{4}$ J

15.25 707 W

15.27 (a) $(1{,}33\ \text{m/s})n = 0, \pm 2, 3$
(b) [illegible] $n = 0$ [illegible]

15.29 [illegible]

15.44 a) 2,50 cm c) 277 cm
d) 185 cm, 0, 36 s, 1470 cm/s
e) 260 cm/s, 0, (x, t) = (5,00 cm) sen[(π rad/cm)x − (133 rad/s)t]
15.45 a) v(x, t) = −4,0π cm/s sen[(6,98 rad/cm)x − sen([742 rad/s)t
b) 3rd
c) 39,4 Hz
15.45 a) 45,0 cm b) não
15.47 a) 3 nós, 2 barrigas, 45 Hz, 4 cm
15.49 a) 200 Hz, 126 rad/s, 3,49 rad/m
b) y(x, t) = (2,50 mm) cos[(3,49 rad/m)x − (126 rad/s)t]
c) y (0) = (2,50 mm) cos(126 rad/s)t
d) y(x) = 2,50 mm cos(3π/2 − 126 rad/s)t
e) 0,314 m/s f) 2,50 mm, 0
15.51 a) [illegible] b) [illegible]
15.53 a) $\sqrt{2\pi A/\lambda}\sqrt{FL/M}$ b) aumenta por um fator de 2
15.55 a) $\sqrt{F/\mu}$ b) [illegible]
15.57 a) [illegible]
b) [illegible]
c) [illegible] resposta levemente [illegible] mais alta
d) [illegible] nenhuma alteração
15.61 c) $\sqrt{2}N$
15.63 b) A diminui por um fator de $2\sqrt{2}$, ω diminui por um fator de $\sqrt{2}$
15.65 a) [illegible] b) [illegible] W
15.67 [illegible]
15.69 a) [illegible]
15.71 c) [illegible]
15.73 [illegible]
15.75 a) 0, b) 0, $L/2$, d) não
15.77 a) [illegible] b) [illegible]
15.79 b) [illegible]
15.81. $\sqrt{2}$ vibra $\sqrt{2}$
15.83. a) 99,4 N c) −4,28 Hz, diminui

Capítulo 16

16.1 a) 0,344 m b) 2×10^{-3} m c) 6,9 m, 50 Hz
16.3 a) 7,78 Pa b) 77,8 Pa c) 778 Pa
16.5 a) $2,35 \times 10^{-10}$ Pa b) $9,47 \times 10^{-10}$ Pa
16.7 0,81 m
16.9 a) 5 °C
16.11 1,506 s
16.13 1,98 s
16.15 a) $9,44 \times 10^{-14}$ m, 0,434 m
b) $5,66 \times 10^{-9}$ m, 0,401 m c) m: $4^n/4^{(n-1)} = 0,9n$
16.17 a) 1,94 Pa b) $4,38 \times 10^{-3}$ W/m² c) 96,6 dB
16.19 a) $4,4 \times 10^{-7}$ W/m² b) 6,39 dB c) $5,8 \times 10^{-11}$ m
16.21 14,0 dB
16.23 [illegible]
16.25 a) *fundamental*: nó de deslocamento a 0,80 m, nós de pressão a 0 e 1,60 m; *primeiro sobretom*: nós de deslocamento a 0, 0,80 m e 1,60 m, nós de pressão a 0, 0,40 m e 1,20 m; *segundo sobretom*: nós de deslocamento a 0, 0,40 m, 0,80 m e 1,20 m b: *fundamental*: nó de deslocamento a 0, nó de pressão a 1,20 m, *primeiro sobretom*: nós de deslocamento a 0 e 0,80 m, nós de pressão a 0,40m e 1,20 m e *segundo sobretom*: nós de deslocamento a 0, 0,48 m e 0,96 m, nós de pressão a 0,24 m, 0,72 m, 1,20 m
16.27 500 Hz 420 Hz 250 Hz
16.29 a) 267 Hz b) não
16.31 [illegible]
16.33 a) [illegible] Hz b) 86 Hz
16.35 [illegible] m
16.37 a) 4 batimentos/s b) $3,0 \times 10^{-6}$ m, 0
16.39 1,4 Hz
16.41 780 m/s
16.43 a) 375 Hz b) 375 Hz c) 4 Hz
16.45 a) 0,25 m/s b) 0,91 m
16.47 19,8 m/s
16.49 [illegible] Hz
16.51 [illegible]
16.53 [illegible]
16.55 a) [illegible]
16.57 a) [illegible]
16.59 a) [illegible]
16.61 [illegible]
16.63 [illegible]
16.65 [illegible]
16.67 [illegible]
16.69 [illegible]
16.71 [illegible]
16.73 [illegible]
16.75 [illegible]
16.77 [illegible]
16.79 [illegible]
16.81 [illegible]
16.83 [illegible]
16.85 [illegible]
16.87 [illegible]
16.89 [illegible]
16.91 [illegible]
16.93 [illegible]
16.95 [illegible]
16.97 [illegible]
16.99 [illegible]
16.101 [illegible]

Capítulo 17

17.1 [illegible] b) 134 °F c) [illegible]
17.3. [illegible]
17.5 a) [illegible] b) 10 °C
17.7 a) 104,4 °F sem b) 94 °F
17.9 a) 218,9 K b) 125,9 K c) 205,4 K
17.11 a) 210 °C b) 63 K
17.13 [illegible]
17.15 a) 202 °C b) cobre, 4,76 × 10⁷ Pa
17.17 [illegible]
17.19 [illegible]
17.21 [illegible]
17.23 [illegible]
17.25 [illegible]
17.27 [illegible]
17.29 [illegible]
17.31 [illegible]
17.33 [illegible]
17.35 [illegible]
17.37 [illegible]
17.39 [illegible]
17.41 [illegible]
17.43 [illegible]
17.45 [illegible]
17.47 [illegible]
17.49 [illegible]
17.51 [illegible]
17.53 [illegible]
17.55 [illegible]
17.57 [illegible]
17.59 [illegible]
17.61 [illegible]
17.63 [illegible]
17.65 [illegible]
17.67 [illegible]
17.69 [illegible]
17.71 [illegible]
17.73 [illegible]
17.75 [illegible]
17.77 [illegible]
17.79 [illegible]
17.81 [illegible]
17.83 a) 36,1 °C b) nada de gelo, 0,136 kg de água líquida, nada de vapor
17.85 a) 100 °C b) 0,02 4 kg de vapor, 0,2 9 kg de água líquida
17.87 [illegible]
17.89 a) 94 W b) 1 3
17.91 [illegible]
17.93 a) 6,0 × 05 s (cerca de 17 h)
d) 1 5 × 1010 s (cerca de 90 anos); não
17.95 0,106 W/m K
17.97 [illegible]
17.99 a) 03 °C b) 27 W
[illegible]
d) o intervalo é de 1,93 °C
17.101 a) [illegible] 900 W [illegible] 6,748 W [illegible] 5, [illegible] 0 W
[illegible] 136 W radiação do Sol
b) 5,72 L/h c) 4 L/h

Capítulo 18

18.1. a) 56,2 mols b) 6,8 × 10⁵ Pa 67,2 atm
18.3 [illegible]
18.5 [illegible]
18.7 [illegible]
18.9 [illegible]
18.11 [illegible]
18.13 [illegible]
18.15 [illegible]
18.17 [illegible]
18.19 [illegible]
18.21 [illegible]
18.23 [illegible]
18.25 [illegible]
18.27 [illegible]
18.29 [illegible]
18.31 [illegible]
18.33 [illegible]
18.35 [illegible]
18.37 [illegible]
18.39 [illegible]
18.41 [illegible]
18.43 [illegible]
18.45 [illegible]
18.47 [illegible]
18.49 [illegible]
18.51 [illegible]
18.53 [illegible]
18.55 [illegible]
18.57 [illegible]
18.59 [illegible]
18.61 [illegible]
18.63 [illegible]
18.65 [illegible]
18.67 [illegible]
18.69 [illegible]
18.71 [illegible]
18.73 [illegible]
18.75 [illegible]
18.77 [illegible]
18.79 [illegible]
18.81 [illegible]
18.83 [illegible]
18.85 [illegible]
18.87 [illegible]
18.89 [illegible]
18.91 [illegible]
18.93 [illegible]
18.95 [illegible]
18.97 [illegible]
18.99 [illegible]
18.101 [illegible]

8.80 a) 2,8 b) menor
8.81 [illegible]
8.82 a) 0,25%
8.83 a) $4,5 \times 10^{[illegible]}$ m
b) 703 m/s; $0,4 \times 10^{[illegible]}$ s (cerca de 30 mm). Não
[illegible] Pa
d) cerca de 650 m/s; vaporizam-se
f) 2×10^{3} K; não
8.84 a) $T_c = 8a/27Rb$; $V_c = 3b$ c) $p_c = a/27b^2$
f) 8/3 g) 3,28; 3,44; 4,35

Capítulo 19

19.1 b) 1140 J
19.2 b) 6,9 m
19.3 a) 50 J para cima
19.4 a) [illegible]
b) trabalho feito sobre o gás negativo realizado no sentido inverso
19.5 a) $3,78 \times 10^{5}$ J b) $7,72 \times 10^{5}$ J c) não
19.6 a) 410 J b) quarenta
19.7 a) 6,4 m/s b) 139 m/s = 501 km/h
19.8 a) energia interna b) sob c) permitem
19.9 a) positivo b) I: positivo; II: negativo
c) absorve d) I: absorve; II: libera
19.10 a) $1,67 \times 10^{5}$ J b) $2,03 \times 10^{5}$ J
19.11 b) 206 J c) sobre o pistão d) 712
e) 920 J f) 206 J
19.12 a) 948 K b) 406 K
19.13 c) 2/3
19.14 a) 25 °C b) 179 °C c) a
19.15 a) 6686 J b) 0 c) cem; 6695 J; libera
19.16 a) 7465 J b) 1,36
19.17 a) $4,76 \times 10^{5}$ Pa b) $1,06 \times 10^{5}$ J
c) 98; aquecido
19.18 a) $S_2 = 10$ J; aumenta, aumenta
19.19 b) 224 J c) Q = 0 d) 224 J
19.20 11,6 °C

19.21 a) isotérmica b) 2400 J
19.22 a) 450 J b) libera 650 J
c) $Q_{ab} = 230$ J, $Q_{ac} = 220$ J
19.23 a) igual b) absorve 3000 J
c) absorve mais
19.24 b) 2460 J
19.25 a) 1174 K b) $1,22 \times 10^{5}$ J c) $4,26 \times 10^{5}$ J
d) $4,5 \times 10^{5}$ J
19.26 −0,236 m
19.27 a) $4,32 \times 10^{-3}$ m³ b) 648 J c) $7,15 \times 10^{5}$ J
d) $3,4 \times 10^{5}$ J e) não há diferença substancial
19.28 $3,8 \times 10^{5}$ J/kg
19.29 b) 11,9 °C
19.30 a) 0,373 m b) 206 °C c) $7,46 \times 10^{5}$ J
d) [illegible] ΔE_{int} [illegible]
e) $Q = 750$ J, $\Delta E_{int} = 450$ J
19.31 a) $W = -738$ J, $Q = 2580$ J, $\Delta E_{int} = 1850$ J
b) $W = 0$, $Q = 1850$ J, $\Delta E_{int} = 1850$ J c) 0
19.32 a) $W = -187$ J, $Q = -654$ J, $\Delta E_{int} = -467$ J
b) $W = 113$ J, $Q = 0$, $\Delta E_{int} = -113$ J
[illegible]
19.33 a) 360 K, $2,67 \times 10^{5}$ Pa b) 1,14 L

Capítulo 20

20.1 a) 6,9 kJ b) 34%
20.2 a) 21% b) 82 400 J c) 0,350 g
d) 333 kW = 398 hp
20.3 a) 25% b) 970 MW
20.4 [illegible]
20.5 a) $1,62 \times 10^{5}$ J b) $5,02 \times 10^{5}$ J
20.6 a) 767 W b) 7,2
20.7 a) 515 J b) 420 K c) 39,1%
20.8 [illegible]
20.9 a) 447 J b) 212 W c) 5,4
20.10 a) 480 W b) 10,7 c) 3600 kg
20.11 45 mm
20.12 a) 428 J/K b) 917 J/K c) 46 J/K
20.13 a) irreversível b) $+6,25 \times 10^{5}$ J/K, é compatível
20.14 [illegible]

20.15 a) 0,15 g/s b) J/K
[illegible]
20.16 gelo: +60,3 J/K; água: −6,48 J/K; a variação de entropia do gelo é maior
20.17 a) [illegible] b) [illegible] J/K c) [illegible] J/K
20.18 a) [illegible] b) [illegible] J
20.19 a) [illegible] b) [illegible] h
20.21 b) alternativa não registrada sob exame
c) $T_a = T_b = 341$ K, $T_c = 481$ K
d) $Q_{ab} = W_{ab} 610$ e) 8,7%
20.23 a) entra; $2,10 \times 10^{5}$ J; sai; $1,86 \times 10^{5}$ J
b) $4,4 \times 10^{4}$ J; 21% c) o máximo é 67%
20.25 a) 7,0% b) $1,0 \times 10^{9}$ J; $2,8 \times 10^{9}$ J
c) 6×10^{5} kg/h = 6×10^{5} L/h
20.27 a) $p_1 = 2,0$ atm, $V_1 = 4,0$ L, $p_2 = 2,0$ atm, V
[illegible] atm, $V_3 = 8,0$ L, $p_4 = 1,67$
[illegible]
[illegible] 55 J
[illegible]
[illegible]
20.29 a) [illegible]
b) [illegible]
20.31 $\left\{\frac{T_H - T}{T_H}\right\}\left\{\frac{T - T_L}{T}\right\}$, menor
20.32 [illegible]
[illegible]
20.33 b) $6,20 \times 10^{5}$ J c) $3,42 \times 10^{5}$ J
[illegible]
20.34 a) [illegible]
b) $nC_v \ln\left\{\frac{T_2}{T_1}\frac{T_3}{T_2}\right\}$
20.35 a) 141 J/K b) +140 J/K c) zero d) +51 J/K

ÍNDICE REMISSIVO

A

Aceleração
  no MHS, 42, 43, 56
afelio, 14 15, 16
água
  calor específico da, 191, 192, 197 295 297
  densidade da, 73, 148, 188
  dilatação térmica da, 188
altura, 41 48, 59, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 103, 106, 127 ,40, 144, 145 156, 157 162, 163, 164, ,67 168, 221, 235, 259
amortecimento, 56, 57
  crítico, 57, 58, 59, 60, 158
amplitude, 36, 37, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57 58, 59, 60, 105, 106, 107 108, 110, 111 1 4 117 118, 121 123, 124, 140, 141 142 143, 144, 145 148, 149, 150, 151 154, 157 158, 159 161, 162, 167 185, 224
  da pressão, 142, 143, 144, 149, 150, 51 153
  no MHS, 41, 44
análise harmônica, 126
anatomia do ouvido, 143
ângulos
  de fase 43, 109
argônio, 52, 199

B

baixo, 127 128
bulão, 79
barômetro de mercúrio, 77 78, 79
batimentos, 16., 162, 166
Bell, Alexander Graham, 152
bomba de calor, 286
Bourdon, manômetro, 78
buraco negro, 23, 24

C

calor
  cálculo, 196
  condução de 198, 199, 200, 201
  de combustão, 196, 198, 252, 281 282
  de fusão, 194, 195, 197 201 294
  de vaporização, 194, 195, 196, 223, 238, 26
  definição, 190
  específico, 191, 192, 193, 196, 197 200, 217 218, 223, 226, 231-235 259, 263, 264, 265, 295, 297
  molar, 192, 193, 196, 218, 226, 231 232, 233, 234, 263, 264, 265
    à pressão constante, 264, 265
    a volume constante 232 234, 264, 265
  quantidade de, 278, 281, 282, 285, 286, 290, 291 292, 293, 294, 296
caloria, 190, 191, 196, 201, 259
calorímetro, 148, 149, 191, 265
caminho, 57, 124, 160, 231, 251 255, 256, 257 258, 259, 260, 262, 268, 282, 295, 297
caos, 298
células capilares, 143, 144
ciclo
  de Carnot, 288, 289, 290,291 292, 293, 296, 297
  Diesel, 294 296
  Otto, 282, 283, 284, 296, 308
circuitos 40 58, 59, 158 192
círculo de referência, 39, 40, 41
clarineta, 144, 145 157
CNTP 220
coeficiente de
  desempenho, 285, 286, 291, 292
  dilatação linear, 139, 185, 186, 187, 189
  dilatação volumétrica, 186, 188
composição harmônica, 126, 144, 145, 157
compressor, 221, 252, 266, 285, 286
comprimento de onda, 23, 103, 105, 106, 107 108, 109, 110, 111, 115, 116, 121 122, 123, 124, 125, 127 128, 140, 141, 142, 147 148, 149, 154, 155, 156, 159, ,60, 161 163, 164
Concorde, 168, 169
condensador, 285,286
condições
  de contorno, 119, 120, 124
  normais de temperatura e pressão, 220
condução, 179, 198, 199, 200, 201, 202 203, 204, 252
condutor 180 181, 199
constante
  de Boltzmann, 228, 233, 299
  de Stefan Boltzmann, 203
  dos gases ideais, 219
convecção
  definição, 202
  forçada, 202 203
  natural 202 203
Copérnico, Nicolau, 4
corpo negro, 204
curva
  adiabática, 262 266
  refletida, 23

D

decibel, 151, 152
densidade
  do ar, 76, 88, 151
  empuxo e, 72
  média, 72, 73, 74, 79
  relativa, 73
densímetro, 73, 79, 80
desordem, 278, 279 293, 294, 295, 298, 299
Dewar, Sir James, 204
Diagrama
  de fase, 237 239
  PV 222, 223, 238, 254, 255, 256, 259, 260, 262, 264, 266, 282, 283, 284, 289, 297
dinâmica dos fluidos, 72
distribuição de Maxwel Boltzmann, 236, 237
Doppler Christian, 163

E

efeito Doppler, 140, 162 167, 168
eficiência térmica, 281 282, 283, 286 288, 289 290, 293
efluxo, 86
elevador hidráulico, 76, 77
elipse, 14
emissividade, 203, 204
empuxo, 72, 79-81
energia
  de ativação, 237
  interna, 223, 251, 256, 257, 258, 259 260, 261, 262 263, 264, 265 266, 267 280, 286, 288, 290, 291 293, 294 295, 296 298
  potencial gravitacional, 8 10, 84, 85,26
entropia, 278, 293 298 299, 300
equação
  da continuidade, 82, 83, 84, 85, 86, 87
  de Bernoulli, 72 84 88, 89
  de estado, 218, 222, 223, 226, 239, 240, 258, 263, 264, 267
  de onda, 112 115, 121, 128
  de van der Waals, 232, 250
  do gás ideal 218, 219, 221 222 226, 227 228, 231 264, 267, 268, 296
equilíbrio
  de fase, 194, 237
  térmico, 179, 180, 181, 182, 184, 190, ,93, 197 204, 229, 262, 267 285, 288, 293 298
  termodinâmico, 279
escala
  Celsius de temperatura, 181
  dBA, 152
  decibel, 151, 152
  Fahrenheit de temperatura, ,82
  Kelvin de temperatura, 183, 293
escoamento
  estacionário 82 83, 85 89
  laminar 82, 88, 89
  turbulento, 82 89 90 ,56
estado
  macroscópico, 299 300
  microscópico 299
estática dos fluidos, 77
etanol 180

evaporador, 285, 286
exaustão, 220, 280, 281, 282, 283, 284, 292
excentricidade, 14, 15,16, 17
expansão
isotérmica, 254, 255, 263, 288, 289, 290, 291, 293, 296
livre, 255, 256, 262, 263, 278, 279, 293, 295, 296, 297, 300

F

fase, 43, 44, 45, 57, 60, 105, 107, 108, 109, 110, 111, 123, 142, 154, 159, 160, 161, 162, 179, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 222, 223, 224, 225, 237, 238, 239, 240, 261, 262, 280, 285
fasor, 40, 42
flauta, 140, 144, 145, 157
fluido
ideal, 82, 84
incompressível, 82, 83, 84, 85, 86
refrigerante, 285
força
central, 15
conservativa, 45, 80
de empuxo, 79, 80
energia potencial gravitacional, 224
gravitacional,
peso e, 25
propulsora, 36, 58, 59, 60, 157, 158, 162, 169
restauradora, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 49, 50, 51,52, 53,113, 115, 145
frequência
angular, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 44, 49, 50, 55 ,57, 58, 59, 105, 110, 111, 124, 143
natural, 58, 59
MHS, 50
dos batimentos, 161, 162, 166
fundamental, 125, 126, 127, 128, 144, 145, 155, 156, 157, 158, 159
do oscilação, 41, 50, 59, 121, 158
função de
distribuição, 235, 236, 237
onda, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 117, 120, 123, 124, 126, 128, 141

G

gálio, 194, 195
gás ideal. *Ver também* gases
calor específico de, 217, 232, 263
ciclo de Carnot, 289
definição, 219
energia interna de, 251, 262-263, 264, 266, 293
modelo cinético-molecular de, 226-231
processo adiabático de, 265, 266-268, 283
gás monoatômico, 226, 232, 233, 265, 266, 268
gases. *Ver também* gás ideal
calor específico de, 217, 232, 263
calor específico molar de, 226, 264, 265
energia interna de, 251, 262-263, 264, 266, 293
ondas sonoras em, 115, 145
gradiente de temperatura, 200, 279, 288
graus de liberdade, 233, 234, 249

H

Halley, cometa, 16, 17
harmônicos, 39, 53, 125, 126., 127, 144, 145, 155, 156, 157, 158
horizonte de eventos, 23

I

infra-som, 140
intensidade sonora, 144, 150, 151, 152, 153
intensidade
de ondas sonoras, 118
do som, 118, 149-153, 162
interação de van der Waals, 51, 52
interferência
construtiva, 123, 159, 160, 161, 162, 167
destrutiva, 123, 159, 160, 161
de ondas mecânicas, 103
intervalo audível, 140, 144, 145, 152
isóbara, 262
isócora, 262
isolante, 180, 181, 199, 200, 203, 256, 261
ideal, 180, 199
real, 180
isoterma, 222, 250, 262, 266

K

Kepler, Johannes, 14

L

lâmina bimetálica, 181, 182, 190
lei
da gravitação, 1, 2, 4, 6, 10, 11, 14, 17
de Hooke, 180, 181
de Kepler, 13, 14, 15, 16, 24, 25
de Newton, 1, 4, 6, 11, 19, 47, 50, 56, 114, 145, 167, 218, 227
de Pascal, 75, 76, 77
de Stefan-Boltzmann, 203
zero da termodinâmica, 180, 181
linha de
corrente, 82
escoamento, 82
livre caminho médio, 231

M

manômetro, 77, 78, 180, 217, 220
máquina térmica, 278, 280, 281, 282, 284, 285, 286, 287, 288, 291, 292, 298
massa molecular, 192, 225, 229
meio ambiente, 4, 193, 196, 197, 204, 255, 259, 261, 262
MHS, 36, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 60, 105, 106, 107, 108, 111, 115, 121, 123, 124, 141, 157,
modo normal, 103, 126, 128, 155, 156, 157, 158
módulo de compressão adiabática, 142, 143, 145, 146, 147, 148, 149, 151, 153
mol, 148, 149, 192, 193, 218, 219, 220, 221, 222, 225, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 250, 290, 291, 296, 299
moléculas
diatômica, 232
poliatômicas, 232, 234
motor
a gasolina, 253, 281, 282, 283, 284, 293
de combustão
interna, 252, 262, 280, 283
movimento
aleatório, 286
amplitude do, 37, 39, 42, 111, 121, 122, 157
harmônico simples, 36, 38-45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 105, 106, 109, 111, 142, 224
aplicações do, 49-52
definição, 38
energia no, 45-49
equação do, 50, 54
periódico, 36-71, 105, 106
perpétuo, 226

N

nível da intensidade sonora, 151, 152, 153
nó, 121, 122, 123, 124, 126, 154, 155, 156, 158
de deslocamento, 153, 154, 155, 156, 159
de pressão, 153, 154, 155, 156, 159
número de
Avogadro, 225, 228, 230, 299
Mach, 168, 169
moléculas, 192, 222, 225, 226, 227, 229, 231, 235, 237
mols, 192, 218, 219, 220, 221, 223, 226, 228, 229, 259, 266, 267, 268, 290
onda, 109, 110, 111, 124, 142, 143, 144

O

Onda
de choque, 167, 168, 169
estacionária, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 153, 155, 157, 159
longitudinal, 104, 107, 112, 117, 140, 141, 145, 146, 147, 148, 154
mecânica, 103, 105

periódica, 103, 105, 106, 107, 109, 128, 147
progressiva, 122, 123, 124, 159
senoidal, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 117, 118, 121, 124, 141, 142, 147, 161, 164
transversal, 104, 105, 106, 109, 111, 113, 114, 115, 116, 119, 128, 141, 145, 146, 147
ondas senoidais
definição, 140
em fase, 160
estudos em, 107
puras, 158
ondas sonoras
amplitude de, 157
batimentos, 161
efeito Doppler, 162
intensidade, 140, 149, 150, 151, 152, 153
no ar, 118, 128, 143, 149, 153
ressonância, 157
timbre, 145
órbita
circular, 11, 12
elíptica, 14, 15
oscilação, 18, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 50, 52, 55, 56, 58, 59, 60, 107, 121, 124, 157, 158
amortecida, 56
forçada, 58, 59, 157, 158
oscilador harmônico, 39, 42, 43, 56, 58, 59
ossículos, 143, 144
ouvido, 126, 127, 140, 141, 143, 144, 149, 150, 151, 152, 154, 157, 158, 162, 166

P

Pascal, 74, 75, 76, 77, 78, 85
pêndulo
físico, 36, 54-56
simples, 36, 52-54, 55, 56
periélio, 14, 15, 16, 17
período da oscilação, 40, 41, 42, 48, 52, 55
peso
aparente, 6, 11, 12, 20, 21, 22
real, 20, 21, 80
planetas, 13
poço de potencial, 224
poluição, 284
ponto
crítico, 237, 238, 239
de ebulição, 181, 184, 194, 195
de fusão, 194, 195
triplo, 184, 237, 238, 293
pressão
absoluta, 77, 78, 85, 141, 183, 218, 220, 221
atmosférica, 74, 75, 76, 77, 78, 86, 88, 141, 143, 148, 149, 182, 193, 194, 195, 217, 221, 222, 238, 240, 263
manométrica, 77, 78, 141, 155, 221
primeira lei da termodinâmica, 251-277, 278, 280, 281, 282, 284, 286, 288, 290, 291
princípio
da conservação da energia, 196, 251, 257
da equipartição da energia, 233, 234, 235, 236
da superposição, 119, 120, 121, 122, 161
processo adiabático, 261, 262, 263, 266, 267, 268, 289, 295
compressão, 267, 283
de um gás ideal, 265, 266, 267, 283
expansão, 267
processo
cíclico, 258, 259, 260, 280, 282, 284, 297
de equilíbrio, 279
irreversível, 279, 287, 288, 297, 298
isentrópico, 295
isobárico, 261, 262, 264, 265, 266
isocórico, 261, 262, 263, 264
isotérmico, 254, 255, 261, 262, 263, 288, 294, 296
reversível, 279, 294, 295, 296, 297, 298, 300
termodinâmico, 251, 252, 255, 257, 258, 259, 260, 268, 278, 288, 300

Q

quilocaloria, 190, 191, 196

R

radar, 160
radiação, 103, 148, 179, 181, 182, 199, 203, 204
raio de Schwarzschild, 23, 25
razão de compressão, 220, 267, 282, 283, 284
refrigerador, 79, 195, 278, 281, 284, 285, 286, 287, 288, 291, 292, 298
regra de Dulong e Petit, 193, 234, 235
resistência térmica, 200
ressonância, 36, 58, 59, 60, 140, 157, 158, 159
ruído, 59, 90, 140, 145, 152, 158, 161, 308

S

satélites artificiais, 10
Saturno, 1, 5, 12, 16
Schwarzschild, Karl, 23
segunda lei da termodinâmica, 278-309
semi-eixo maior, 14, 15, 16, 24
série de Fourier, 127
série harmônica, 125
sistemas termodinâmicos, 251, 252
sobre tom, 155
sólido monoatômico, 234
som, 36, 41, 59, 103, 107, 113, 118, 121, 126, 127, 128, 140-178, 186
subamortecimento, 57, 58
substância de trabalho, 280, 281, 285, 288, 292, 293, 296
superamortecimento, 57, 58
supersônica, 167, 168

T

taxa de transferência de
calor, 192, 199, 200, 201, 203, 281, 285
energia, 103, 117
temperatura
absoluta, 148, 179, 184, 203, 218, 219, 220, 225, 227, 229, 232, 233, 267, 289, 294
de ebulição, 182, 194, 195, 198, 238
tensão superficial, 81, 223
tensões térmicas, 189, 190
teorema binomial, 50, 51
termodinâmica, 179, 180, 181, 183, 251-277, 278-309
termômetro, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 188, 192, 217, 219, 293
Terra,
massa da, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 20
terremoto, 103
timbre, 145
transição de fase, 193, 194, 196, 197, 198, 223, 237, 238, 246
tubo
aberto, 77, 155, 156, 157, 158
de escoamento, 82, 83, 84, 85, 86
fechado, 155, 156, 157, 159, 188
turbulência, 88, 89, 90, 284

U

ultra-som, 147, 148, 168

V

van der Waals, J. D., 222
variáveis de estado, 217
velocidade
angular, 39, 40, 42, 90
da onda, 103, 104, 106, 107, 108, 110, 112, 113, 114, 115, 116, 122, 124, 127, 142, 143, 145, 147, 148, 149, 150, 151, 159, 162, 163, 165
de escape, 10, 22, 229
quadrática média, 228, 229, 230, 231, 236
venire, 105, 110, 122, 123, 124, 154, 155, 156, 158
de deslocamento, 153, 154, 155, 156, 159
de pressão, 153, 154, 155
viscosidade, 82, 84, 85, 88, 89, 90, 203, 238

Z

zero absoluto, 184, 195, 293

CRÉDITOS DAS FOTOS

Capítulo 12 Abertura: Nasa/JPL/Space Science Institute; Figura 12.3: Nasa/JPL/Caltech; Figura 12.6: Nasa; Figura 12.7: George Hall/Corbis; Figura 12.13: Nasa; Figura 12.16: Nasa; Figura 12.17a: NASA; Figura 12.17b: Nasa; Figura 12.18: Nasa; Figura 12.21: Smithsonian Astrophysical Observatory; Figura 12.27: Nasa/Johnson Space Center; Figura 12.28: Nasa; Figura 12.29: Nasa; Figura 12.30: Keck/UCLA Galactic Center Group.

Capítulo 13 Abertura: Mark Antman/The Image Works; Figura 13.7: American Diagnostic Corporation; Figura 13.21a: Frank Herholdt/Getty Images; Figura 13.25: Christopher Griffin/Alamy; Figura 13.29a: AP/Wide World Photos; Figura 13.29b: AP/Wide World Photos.

Capítulo 14 Abertura: Digital Vision/AGE Fotostock; Figura 14.2: Nicholas Pinturas/Getty Images; Figura 14.7: Cenco Physics; Figura 14.10b: Photodisc Green/Getty Images; Figura 14.15: Robert B. Suter, Vassar College; Figura 14.20: Pearson Addison Wesley; Figura 14.21: Cordelia Molloy/Photo Researchers; Figura 14.28: Digital Vision/AGE Fotostock; Figura 14.30a: Photodisc Green/Getty Images; Figura 14.30b: Colin Barker/ Getty Images; Figura 14.31f: The Harold E. Edgerton 1992 Trust, Palm Press, Inc.

Capítulo 15 Abertura: David Hume Kennerly/Getty Images; Figura 15.2: Tony Arruza/Corbis; Figura 15.12: R. Dolan/ Camerique/H. Armstrong Roberts; Figura 15.18: imagem reproduzida da *PSSC Physics*, 2ª Ed. (1965), D.C. Heath & Company e Educational Development Center, Inc., Newton Massachusets; Figura 15.25: Photodisc Green/Getty Images; Figura 15.27: National Optical Astronomy Observatories.

Capítulo 16 Abertura: John Powell/The Image Works; Figura 16.5a: Lisa Pines/Getty Images; Figura 16.5c: David Young-Wolff/PhotoEdit Inc.; Figura 16.6: Dorling Kindersley; Figura 16.9: Bernard Benoit/Photo Researchers; Figura 16.10: Eastcott-Momatiuk/The Image Works; Figura 16.20: Martin Bough/Fundamental Photographs; Figura 16.25: David Young-Wolff/PhotoEdit Inc.; Figura 16.28: Mark Reinstein/The Image Works; Figura 16.36: Nasa/Robert A. Hoover, Dryden Flight Research Center.

Capítulo 17 Abertura: Cameramann/The Image Works; Figura 17.4: Exergen Corporation; Figura 17.11: NASA/Jim Ross, Dryden Flight Research Center; Figura 17.13: Marshall Henrichs; Figura 17.18: Paul Seheult/Corbis; Figura 17.19: Adam Hart-Davis/Photo Researchers; Figura 17.20: Richard Megna/Fundamental Photographs; Figura 17.22: John Giustina/Getty Images; Figura 17.24: Russ Underwood, Lockheed Martin Missiles & Space Company, Inc.; Figura 17.28: Nancy Rogers; Figura 17.29: Dr. Arthur Tucker/Photo Researchers.

Capítulo 18 Abertura: James Marshall/The Image Works; Figura 18.2: John Powell/The Image Works; Figura 18.10: Park Scientific Instruments; Figura 18.13: Stone/Getty Images; Figura 18.14: Tatsuyuki Tayama/The Image Works; Figura 18.16: David Grossman/The Image Works; Figura 18.25: PhotoDisc/Getty Images; Figura 18.28: Royal Observatory, Edinburgh/Anglo-Australian Obsevatory; Figura 18.30: fotografia de David Malin, Anglo-Australian Observatory.

Capítulo 19 Abertura: Richard A. Cooke III/Getty Images; Figura 19.1: John P. Surey; Figura 19.2a: PhotoDisc/ StockTrek/Getty Images; Figura 19.2b: Lawrence Migdale/Photo Researchers; Figura 19.10: John Kelly/Getty Images; Figura 19.14: Tom Branch/Photo Researchers; Figura 19.15: Patrick Watson/The Image Works; Figura 19.32: Thomas Eisner e Daniel Aneshansley.

Capítulo 20 Abertura: Stock Food/Getty Images; Figura 20.2: Bruno Perousse/AGE Fotostock; Figura 20.12: Bill Bachman/Photo Researchers; Figura 20.16: Mark Wagner/Getty Images; Figura 20.17: Erich Schrempp/Photo Researchers; Figura 20.21: Paul Silverman/Fundamental Photographs; Summary: Paul Silverman/Fundamental Photographs.

Sobre os autores Hugh D. Young; John P. Surey.

SOBRE OS AUTORES

Hugh D. Young é professor emérito de física na Universidade Carnegie-Mellon em Pittsburgh, PA. Ele estudou na Carnegie-Mellon tanto na graduação quanto na pós-graduação, obtendo o título de Ph.D. na teoria de partículas fundamentais, sob a orientação do professor Richard Cutkosky. Young começou a trabalhar na Faculdade Carnegie-Mellon em 1956 e atuou durante um ano como professor visitante na Universidade da Califórnia, em Berkeley.

A carreira do professor Young foi centralizada inteiramente no ensino de graduação. Ele escreveu diversos livros de física em nível de graduação e, em 1973, tornou-se co-autor, com Francis Sears e Mark Zemansky, dos famosos livros de introdução à Física. Depois que Sears e Zemansky faleceram, ele assumiu toda a responsabilidade das edições consecutivas desses livros, sendo que a oitava edição do livro *University Physics* é uma das mais recentes.

O professor Young é um entusiasta esquiador, alpinista e excursionista. Ele também foi organista associado durante diversos anos na Catedral de St. Paul, em Pittsburgh, e nessa cidade fez inúmeros recitais de órgão. O professor Young e sua mulher, Alice, normalmente viajam no verão para a Europa e para o deserto do Canyon no sul de Utah.

Roger A. Freedman é conferencista de física na Universidade da Califórnia, Santa Bárbara. Ele fez a graduação no campus da Universidade da Califórnia em San Diego e Los Angeles, e suas pesquisas para a tese de doutorado versaram sobre teoria nuclear, na Universidade de Stanford, sob a orientação do professor J. Dirk Walecka. O dr. Freedman ingressou na UCSB em 1981 depois de ter trabalhado em pesquisa e ensino de física na Universidade de Washington.

Na UCSB, lecionou no Departamento de Física, bem como na College of Creative Studies, um setor da universidade destinado a alunos de graduação altamente motivados e competentes. Ele publicou trabalhos de pesquisa em teoria nuclear, física das partículas elementares e física do laser. Também ajudou a desenvolver métodos computacionais para o ensino da física e da astronomia.

O dr. Freedman obteve licença de piloto comercial e, quando não está ensinando nem escrevendo, está voando com sua mulher, Caroline.

A. Lewis Ford é professor de física na Universidade A&M do Texas. Ele recebeu o grau de B.A. da graduação na Universidade Rice em 1968 e o título de Ph.D. em físico-química na Universidade do Texas, em Austin, em 1972. Depois de um pós-doutorado de um ano na Universidade de Harvard, ele começou a trabalhar na faculdade de física da Universidade A&M do Texas, em 1973, e ali permanece até hoje. Suas pesquisas versam sobre física atômica teórica, com especialização em colisões atômicas. Na Universidade A&M do Texas, lecionou diversos cursos de graduação e de pós-graduação, porém se dedicou mais à física básica.